அடிப்படை இயந்திரவியல்

(இரண்டாம் பாகம்)

[இயக்கவிசையியல்]

ஆர். இராமகிருஷ்ணன்

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

த.பா.நி. (க.வெ.) வரிசை எண்—854

அடிப்படை இயந்திரவியல்

(பட்டப்படிப்பிற்குரியது)

இரண்டாம் பாகம்

இயக்கவிசையியல்

ஆசிரியர்

ஆர். இராமகிருஷ்ணன், எம்.ஏ., எம்.எஸ்சி.,
துணைப் பேராசிரியர், கணிதத்துறை,
இராஜபாளையம் ராஜுக்கள் கல்லூரி,
இராஜபாளையம்.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition — September, 1979

Number of Copies— 2000

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 854

ELEMENTARY MECHANICS—Part II

R. RAMAKRISHNAN

Price Rs. 19-00

Published by the Tamilnadu Textbook Society under the Centrally Sponsored Scheme of production of books and literature in regional languages at the University level, of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi.

This book has been printed on concessional paper made available by the Government of India.

Printed by

V. P. S. PRINTERS,
Madras-600 005.

அணிந்துரை

(திரு. செ. அரங்கநாயகம், தமிழகக் கல்வி அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கிப் பத்தொன்பது ஆண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் இளங்கலை வகுப்புவரை மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்று வந்தனர். 1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து அறிவியல் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன்வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளில் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித்தர முன்வந்துள்ள நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத்திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மன நிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்று வருகிறது. இவ்வகையில் கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் கலை, அறிவியல் பாடங்களை மாணவர்களுக்குத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக்கழகமும் சென்னைப் பல்கலைக்கழகமும் ஆண்டுதோறும் எடுத்துவரும் பெரு முயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்லவேண்டும்.

வரலாற்றியல், அரசியல், உளவியல், பொருளியல், மெய்ப்பொருளியல், புவியியல், புவியமைப்பியல், மனையியல், கணிதவியல், இயற்பியல், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல், விலங்கியல், தாவரவியல், பொறியியல், சட்டவியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் மூலநூல்கள், மொழிபெயர்ப்பு நூல்கள் என்று இரு வகையிலும் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம் நூல்களை வெளியிட்டு வருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான அடிப்படை இயந்திரவியல் (இரண்டாம் பாகம்) என்னும் இந்நூல் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் **854** ஆவது வெளியீடாகும். கல்லூரித் தமிழ்க் குழுவின் சார்பில் வெளியான **35** நூல்களையும் சேர்த்து இதுவரை **889** நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன. இந்நூல் மைய அரசு, கல்வி, சமூகநல அமைச்சகத்தின் 'மாநில மொழியில் பல்கலைக்கழக நூல்கள் வெளியிடும் திட்டத்'தின்கீழ் வெளியிடப்படுகிறது.

தமிழில் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெறவேண்டும் என்பதே நம் குறிக்கோளாகும். கல்லூரிகளிலும் பல்கலைக்கழகங்களிலும் கலையியற் பாடங்களையும், அறிவியற் பாடங்களையும், தொழில்நுட்ப அறிவுப் பாடங்களையும் பயிலுகின்ற மாணவர்கள் அவற்றைத் தமிழில் பயில வேண்டும் என்பதை வலியுறுத்தி வருவதற்குக் காரணம், தமிழறிவு வளர வேண்டும் என்பதைவிட, தமிழ் மக்களின் அறிவு ஆற்றல் எளிதாக, விரைவாக வளரவேண்டும் என்பதுதான். 'எதிலும் தமிழ்; எங்கும் தமிழ்' என்னும் குறிக்கோளை நிறைவேற்ற வேண்டிய கடப்பாடு தமிழக ஆசிரியப் பெருமக்களையும் மாணவர்களையும் சார்ந்ததாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக்கழகங்களின் பல்வகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம்கலந்த நன்றி உரித்தாகுக !

செ. அரங்கநாயகம்

தோற்றுவாய்

பல விசைகளின் தாக்கங்களுக்குட்பட்ட பொருள்களின் சமநிலைபற்றி இந் நூலின் முதற் பகுதியாகிய 'நிலையியலில்' (Statics) விரிவாக ஆராய்ந்தோம். ஆனால், ஒரு பொருளின்மீது செயல்படும் பல விசைகள் அப்பொருளைச் சமநிலையில் வைத்திருக்க முடியாத நிலையில் அப்பொருள் நகரத் தொடங்குகிறது. இவ்வாறு நகர்கின்ற பொருள்களின் இயக்கம் இடப் பெயர்ச்சியாகவோ, அல்லது சுழற்சியாகவோ அல்லது இடப் பெயர்ச்சியும் சுழற்சியும் சேர்ந்ததாகவோ இருக்கலாம். 'அடிப்படை இயந்திரவியல்' என்னும் இந் நூலின் இரண்டாம் பகுதியாகிய 'இயக்கவிசையியல்'லில் பொருள்களின் இயக்கம்பற்றி ஆராயப்படுகிறது. விசைகளின் தாக்கங்களினால் பொருள்களில் ஏற்படும் இயக்கம் இயக்கவிசையியல் என்னும் இப் பகுதியில் இரு நோக்குகளில் ஆராயப்படுகிறது. பொருள்களில் இயக்கமேற்படக் காரணமான விசைகளைக் கருத்திற் கொள்ளாது நீக்கிவிட்டு, அப் பொருள்களின் இயக்கத்தையும் அவ்வியக்கத்தின் தன்மைகளைப் பற்றியும் மட்டுமே ஆராய்வது ஒரு நோக்கு. இத்தகைய நோக்குடன் ஆராயும் பகுதி 'இயக்கவியல்' (Kinematics) எனப்படுகிறது. மாறாக, பொருள்களில் இயக்கமேற்படக் காரணமாயிருக்கும் விசைகளை அவற்றின் இயக்கத்துடன் தொடர்பு படுத்தி ஆராய்வது இரண்டாவது நோக்கு ஆகும். இத்தகைய நோக்குடன் ஆராயும் பகுதி 'விசையியல்' (Kinetics) என்றழைக்கப்படுகிறது. 'இயக்கவிசையியல்' என்னும் இவ்விரண்டாம் பாகத்தின் முதல் அத்தியாயம் இயக்கவியல் பற்றிய விளக்கங்கள் கொண்டதாகவும், பிற அத்தியாயங்கள் விசையியல் பற்றிய விளக்கங்கள் கொண்டவையாகவும் அமைக்கப்பட்டுள்ளன.

இயக்கவிசையியல் பற்றிய கல்வி வளர்ச்சிக்கு மூல காரணமாகவிருந்தவர் கலீலியோ (Galileo, 1564—1642) என்னும் அறிஞராவார். இவர் இத்துறையில் ஆராய்ச்சிகள் பலசெய்து பலகோட்பாடுகளை அறிவியல் ஆதாரங்களுடன் அளித்திருப்பதோடு, அரிஸ்டாட்டிலின் அறிவியல் ஆதாரமற்ற சில தத்துவங்களையும் ஏற்றுக்கொள்ள மறுத்துவிட்டார். ஆனால், காலத்தை மிகச்

சரியாக அளவிடும் கருவியில்லாத காரணத்தால் இவரால் இத் துறைக்கு அதிக அளவில் உதவமுடியவில்லை. இக் குறை 1657-ல் ஹைஹென்ஸ் (Huygens) என்பவரால் கண்டுபிடிக்கப் பட்ட ஊசலிக் கடிகாரத்தின் (Pendulum Clock) மூலம் நீக்கப் பட்டபின்னர், கலிலியோவின் ஆராய்ச்சிக் குறிப்புகளைக் கொண்டு நியூட்டன் (Newton, 1642—1727) என்னும் அறிஞர் பொருள்களின் இயக்கங்கள் பற்றிய விதிகளை மிகச் சரியாக வரை யறுத்துக் கூறி 'இயக்கவிசையியல்' என்னும் இவ்வறிவியலுக்கு உறுதியான அடிப்படையினை வகுத்தார். இவ்வடிப்படையில் வளர்ச்சி பெற்ற இவ்வறிவியலின் தத்துவங்களே இன்று நடை முறையில் காணப்படும் பலதிறப்பட்ட பொறிகள், கப்பல்கள், சக்கரங்களுடன் கூடிய ஊர்திகள், ஆகாய விமானங்கள் போன்றவற்றின் இயக்க அமைப்புகள்பற்றிய பகுப்பாய்வுக்கு அடிப்படையாக அமைந்துள்ளன.

பொருள்களின் இயக்கம் பற்றிய இவ்வியக்க விசையியலை, துகள்களின் இயக்கம் பற்றிய 'துகளியக்க விசையியல்' (Dynamics of a Particle) என்றும், 'கட்டிறுக்கப் பொருள் களின் இயக்கவிசையியல்' (Dynamics of Rigid Bodies) என்றும் இருவகையாகப் பிரிக்கலாம். இயக்கவிசையியல் என்னும் இப் பாகத்தில் முதற்பெரும் பகுதியில் துகளியக்க விசையியல் பற்றியும், பிற்பகுதியில் கட்டிறுக்கப் பொருள்களின் இயக்க விசையியல் பற்றியும் விளக்கப்பட்டுள்ளன.

இரண்டாம் பாகம்

இயக்கவிசையியல்

(DYNAMICS)

1. இயக்கவியல்

(Kinematics)

இயக்கவியல் என்னும் இப் பகுதியில் பொருள்களின் இடப் பெயர்ச்சி (displacement), திசைவேகம் (velocity), முடுக்கம் (acceleration), காலம் (time) ஆகியவை பற்றி விளக்கப்படு கின்றன. அதாவது, பொருள்களில் இயக்கத்தையுண்டு பண்ணும் விசைகள்பற்றி ஆராயாது அப் பொருள்களின் இயக்கப் பாதைகளின் வடிவமைப்பு பற்றி மட்டுமே இவ்வியலில் ஆராயப் படுகின்றது. இதன் காரணமாக இவ்வியக்கவியல் 'இயக்க வடிவியல்' (Geometry of Motion) என்றும் அழைக்கப்படுவ துண்டு.

நேர்கோட்டியக்கம் (Rectilinear motion)

ஒரு துகள் அல்லது பொருள் ஏதேனுமொரு நிலையான புள்ளியைப் பொறுத்துத் தன் நிலையை மாற்றிக்கொண்டேயிருக் குமானால் அத் துகள் அல்லது பொருள் இயக்கத்திலிருப்பதாகக் கூறப்படுகிறது. இவ்வாறு இயக்கத்திலிருக்கும் ஒரு துகளின் இயக்கப்பாதையென்பது பல்வேறு கணங்களில் அத் துகளின் நிலைகளை வரிசைக்கிரமமாக இணைப்பதனால் கிடைக்கப் பெறும் கோடு ஆகும். ஒரு நேர்கோட்டை இயக்கப் பாதையாகக் கொண்ட ஒரு துகளின் இயக்கம் 'நேர்கோட்டியக்கம்' (Rectilinear motion) என்றழைக்கப்படுகிறது.

வேகம் (Speed)

இயக்கத்திலிருக்கும் ஒரு துகளின் வேகம் என்பது, அத் துகள் தன் இயக்கப் பாதையை வரையும் வீதமாகும். வேகத்தைப் பற்றிய இவ் வரையறையில் இயக்கத்தின் திசையைப்பற்றி எதுவும் குறிப்பிடப்படாமல் இயக்கத்தின் அளவுபற்றி மட்டிலுமே குறிப்பிடப்பட்டுள்ளதைக் கவனிக்கவும். எனவே, வேகம் என்பது அளவு (magnitude) மட்டுமே கொண்ட திசை (direction) இல்லாத ஒரு கணியம் (quantity) ஆகும். ஆகவே, வேகம் என்பது ஒரு திசையிலிக் கணியம் (Scalar quantity) ஆகும்.

சீரான வேகம் (Uniform speed)

இயக்கத்திலிருக்கும் ஒரு துகள் சமகால இடைவெளிகளில், அக்கால இடைவெளிகள் எத்துணைக் குறுகியவையாயிருப் பினும், சமதூரங்களைக் கடக்குமானால் அத் துகளின் வேக மானது சீரான வேகம் என்றழைக்கப்படும். சீரான வேகத் துடன் இயங்கிக்கொண்டிருக்கும் ஒரு துகளின் வேகமானது ஓர் அலகு காலத்தில் அத் துகள் கடக்கும் தூரத்தின் மூலம் அளவிடப்படுகின்றது. இயக்கத்திலிருக்கும் ஒரு துகள் ஒரு குறிப்பிட்ட கால இடைவெளியில் கடந்து செல்லும் தூரத்தை அக் கால இடைவெளியினால் வகுப்பதன்மூலம் அக்கால இடை வெளியில் அத் துகளின் சராசரி வேகம் கணக்கிடப்படுகிறது.

உதாரணமாக, உந்து வண்டியொன்று 120 கிலோமீட்டர் தூரத்தை 3 மணி நேரத்தில் கடந்து செல்லுவதாகக் கொள் வோம். அவ் வண்டி ஒரு மணி நேரத்தில் கடந்து செல்லும் தூரம் 40 கிலோமீட்டர் ஆகையால், அந்த மூன்றுமணி நேரக் கால இடைவெளியில் அதன் பயணத்தின் சராசரி வேகம் மணிக்கு 40 கிலோமீட்டர் ஆகும். இச் சராசரி வேகம் சுருக்கமாக 40 கி.மீ./மணி என்று குறிப்பிடப்படுகிறது. இவ்வாறு அந்த வண்டியின் சராசரி வேகம் 40 கி.மீ./மணி என்று குறிப்பிடுவதன் மூலம் அவ் வண்டியானது அதன் பயணக் காலம் முழுவதும் ஒரு மணிக்கு 40 கி. மீ. என்ற மாருத வேகத்துடன் பயணம் செய்வ தாகக் கொள்கிறோம். இதுபோல், ஒரு துகளின் சராசரி வேகம் 10 மீட்டர்/விநாடி என்று குறிப்பிடுவதன் மூலம் அத் துகளானது அதன் பயணக் காலம் முழுவதும் விநாடிக்கு 10 மீட்டர் என்னும் மாருத வேகத்துடன் செல்லுவதாகப் பொருள் கொள்ள வேண்டும். ஒரு குறிப்பிட்ட கணத்தில் ஒரு துகளின் வேகம் என்பது அக்கணத்தைத் தொடர்ந்து அத் துகளின் வேகம் மாறு பட முடியாத அளவிற்கு மிகமிகச் சிறிய கால இடைவெளியில் அத்துகளின் இயக்கவீதமாகும். வகை நுண்கணிதக் குறியீட் டினைக் கொண்டு இத்தகைய வேகத்தைப் பின்வருமாறு குறிப் பிடலாம்.

ஒரு துகளானது t என்னும் கால இடைவெளியில் s என்னும் தூரத்தைக் கடந்து சென்றிருப்பதாகக் கொள்வோம். இப் பொழுது t என்னும் கணத்தை அடுத்து Δt என்னும் மிக மிகச் சிறிய கால இடைவெளியை எடுத்துக் கொள்க. இச் சிறிய கால இடைவெளியில் அத் துகள் சென்றுள்ள தூரம் Δs எனில், இக்கால இடைவெளியில் அதன் சராசரி வேகம் $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ ஆகும்.

$\Delta t \to 0$ ஆகும்போது இச் சராசரி வேகத்தின் எல்லை மதிப்பாகிய $\frac{ds}{dt}$ என்பதே t என்னும் கணத்தில் அத் துகளின் வேகமாகும்.

இடப்பெயர்ச்சி (Displacement)

ஒரு துகள் மேற்கிலிருந்து கிழக்கு நோக்கிச் செல்லும் ஒரு நேர்கோட்டின்மேல் O என்னும் நிலையான புள்ளியிலிருந்து புறப்பட்டுக் கிழக்குநோக்கி விரைந்து செல்லுவதாகக் கொள்வோம். t அலகு நேரத்தில் அத்துகள் P என்னும் இடத்திலிருந்தால் OP என்பது இக்கால இடைவெளியில் அத் துகள் அடைந்துள்ள இடப்பெயர்ச்சியாகும். அதாவது, t என்னும் கால இடைவெளியில் அத்துகளின் இடப்பெயர்ச்சியென்பது என்பது O-விலிருந்து கிழக்குத் திசையில் OP என்னும் தூரமாகும். ஆகவே, இடப்பெயர்ச்சி என்பது அளவும், திசையும் கொண்ட ஒரு திசை என்று அறிகிறோம்.

திசைவேகம் (Velocity)

இயக்கத்திலிருக்கும் ஒரு துகளின் திசைவேகம் என்பது அதன் இடப்பெயர்ச்சி வீதமாகும். இடப்பெயர்ச்சியானது ஒரு திசையிக் கணியமாகையால் திசையி வேகமும் ஒரு திசையிக் கணியமாகும்.

சீர்த் திசைவேகம் (Uniform velocity)

ஒரு நிலையான திசையில் நகர்ந்து சென்றுகொண்டிருக்கும் ஒரு துகள் சமகால இடைவெளிகளில், அக்கால இடைவெளிகள் எத்துணைக் குறுகியதாகவிருப்பினும், சமதூரங்களைக் கடந்து செல்லுமானால், அது சீர்த்திசை வேகத்துடன் செல்லுவதாகக் கூறப்படும். சீர்த்திசை வேகத்துடன் நகர்ந்து கொண்டிருக்கும் ஒரு துகளின் திசைவேகமானது ஓர் அலகு காலத்தில் அத்துகளடைகின்ற இடப்பெயர்ச்சி வீதத்தின்மூலம் அளவிடப்படுகிறது. ஆனால் சீரற்ற திசைவேகத்துடன் நகர்ந்து கொண்டிருக்கும் ஒரு துகளின் வேகத்தை இது போன்று எளிதாகக் கணக்கிட இயலாது. ஒரு நேர்கோட்டில் நகர்ந்து கொண்டிருக்கும் ஒரு துகளின் திசைவேகமும், வேகமும் ஒன்றாகவேயிருக்கும். ஆனால் ஒரு வளைகோட்டின்மீது நகர்ந்து கொண்டிருக்கும் துகளின் வேகம் அத் துகளிருக்கும் புள்ளியின் வழியே அவ் வளைகோட்டிற்கு வரையப்படும் தொடுகோட்டின் வழியே செயல்படுமாகையால் அதன் திசை கணத்திற்குக்

கணம் மாறுபட்டுக் கொண்டேயிருக்கும். எனவே, ஒரு துகள் ஒரு வளைகோட்டின் மேல் சீரான வேகத்துடன் சென்று கொண்டிருந்தால், எந்தக் கணத்திலும் அதன்வேகம் ஒரே அளவுடையதாகவிருந்த போதிலும், அதன் திசைவேகத்தின் திசை கணத்திற்குக் கணம் மாறுபடுமென்பதை அறிந்து கொள்க.

இயக்கத்திலிருக்கும் ஒரு துகள் அதன் இயக்கப் பாதையிலுள்ள O என்னும் நிலையான புள்ளியிலிருந்து t நேரத்தில் s தூரத்தையும், $t+\Delta t$ நேரத்தில் $s+\Delta s$ தூரத்தையும் கடந்து செல்லுவதாகக் கொள்வோம். Δt கால இடைவெளியில் அத் துகள் கடந்துள்ள தூரம் Δs ஆகையால், இக் குறுகிய கால இடைவெளியில் அத் துகளின் சராசரி வேகம் $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ ஆகும். $\Delta t \to 0$ ஆகும்போது இச் சராசரி வேகத்தின் எல்லை t நேரத்தில் அத் துகளின் திசைவேகத்தைக் குறிக்கும். அதாவது, v என்பது t நேரத்தில் அத்துகளின் திசைவேகமெனில்,

$$v = \underset{\Delta t \to 0}{\text{எல்லை}} \left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right) = \frac{ds}{dt}$$

இத் திசைவேகம் v ஆனது t நேரத்தில் அத்துகளின் நிலையில் அதன் இயக்கப் பாதைக்கு வரையப்படும் தொடுகோட்டின் வழியே செயல்படும்.

திசைவேகத்தின் அலகுகள்

ஓர் அலகு கால இடைவெளியில் ஓர் அலகு இடப்பெயர்ச்சி வீதம் இயங்கும் வேகம் ஓர் அலகு திசைவேகம் எனப்படுகிறது. இடப் பெயர்ச்சியானது தூரத்தின் அலகுகளைக் கொண்டே அளவிடப்படுவதால், திசைவேகம், வேகம் ஆகியவற்றின் அலகுகள் ஒன்றுகவேயிருக்கும். செ. கி. வி. (சென்டிமீட்டர்-கிராம்-விநடி) முறையிலும், அ.ரா.வி. (அடி-ராத்தல்-விநடி) முறையிலும் காலம் என்பது விநடி என்னும் ஒரே அலகு கொண்டுதான் அளவிடப்படுகின்றது. செ.கி.வி. முறையில் இடப் பெயர்ச்சியானது சென்டிமீட்டர் (செ.மீ.) என்னும் அலகு கொண்டும், அ. ரா. வி. முறையில் இடப் பெயர்ச்சியானது அடி என்னும் அலகு கொண்டும் அளவிடப்படுகின்றது. ஆகவே, செ.கி.வி. முறையில் ஓர் அலகு வேகம் அல்லது திசைவேகம் என்பது ஒரு விநடிக்கு ஒரு சென்டிமீட்டர் (செ.மீ./வி.) என்றும் அ. ரா. வி. முறையில் ஓர் அலகு வேகம் அல்லது திசைவேகம் என்பது ஒரு விநடிக்கு ஓர் அடி

(அடி/வி.) என்றும் வரையறுக்கப்படுகின்றன. ஆனால் செ.கி.வி. முறையில் சென்டிமீட்டர், கிராம் என்பன மிகவும் சிறிய அலகு களாயிருப்பதால் அவற்றிற்குப் பதிலாக முறையே நடைமுறை யில் பழக்கத்திலிருக்கும் மீட்டர், கிலோகிராம் என்பன அலகு களாகப் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. இவ்வாறு மீட்டர், கிலோ கிராம், விஞடி ஆகியவற்றை அலகுகளாகப் பயன்படுத்தும் முறையை மீ.கி.வி. முறை (மீட்டர்-கிலோகிராம்-விஞடி முறை) என்று கூறலாம். இம் முறையில் ஓர் அலகு வேகம் என்பது ஒரு விஞடிக்கு ஒரு மீட்டர் (மீ./வி.) என்ற இடப் பெயர்ச்சி வீதமாகும். மேலும் மிகவும் அதிகமான வேகங்களை அளவிட மீட்டர், விஞடி என்ற அலகுகள் மிகவும் சிறியன வாகக் கருதப்படுகின்றமையால் இவற்றிற்குப் பதிலாக முறையே கிலோமீட்டர், மணி என்ற அலகுகளும் நடைமுறையில் பயன் படுத்தப்படுகின்றன. எனவே, இவ் வலகுகளைக் கொண்டு வேகமானது ஒரு மணிக்கு ஒரு கிலோமீட்டர் (கி.மீ./மணி) என்ற அலகு கொண்டும் நடைமுறையில் அளவிடப்படுகின்றது. இதுபோல் அ.ரா.வி. முறையிலும் அடி, விஞடி என்பன மிகச் சிறிய அலகுகளாயிருப்பதால் இவற்றிற்குப் பதிலாக முறையே மைல், மணி என்ற அலகுகளைக் கொண்டு வேகத்தின் அலகு ஒரு மணிக்கு ஒரு மைல் (மைல்/மணி) என்றும் வரையறுக்கப் பட்டுள்ளது.

திசைவேகங்களின் தொகுப்பு

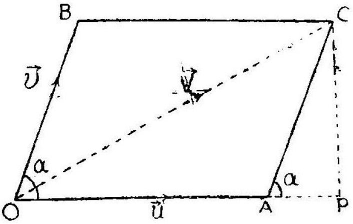
ஒரு பொருள் ஒரே சமயத்தில் பல திசைவேகங்களைக் கொண்டதாயிருக்கலாம். எடுத்துக்காட்டாக, கப்பலில் பயணம் செய்துகொண்டிருக்கும் ஒருவன் கப்பலின் தளத்தின் மேலேயே ஓரிடத்திலிருந்து மற்றோர் இடத்திற்கு நடந்து செல்லும்போது அவன் கப்பலின் திசைவேகத்துடன் கப்பலில் நடந்து செல்லும் திசைவேகத்தையும் கொண்டிருக்கிறன். இவ்விரு திசை வேகங்களின் திசைகள் ஒன்ருகவுமிருக்கலாம்; மாறுபட்டு மிருக்கலாம். கடலின் நீர்ப் பரப்பைப் பொறுத்து அவனுடைய இடப்பெயர்ச்சியை அளவிட்டு, திசைவேகத்தைக் கணக்கிட்டுப் பார்த்தால், இத் திசைவேகமானது கப்பலின் திசைவேகம், கப்பலைப் பொறுத்து அவனுடைய திசைவேகம் ஆகியவற்றுடன் மாறுபட்டிருப்பதோடு, அவ்விரு விசைகளின் விளைவுக்குச் சமமாகவிருப்பதையும் காணலாம். இரு திசைவேகங்களுடன் இயங்கிக் கொண்டிருக்கும் ஒரு துகளின் இடப் பெயர்ச்சி வீதங் களின் மொத்தத்துக்குச் சமமான இடப் பெயர்ச்சி வீதத்தை யளிக்கக் கூடிய ஒரு தனித் திசைவேகமானது அவ்விரு திசை வேகங்களின் விளைவுத் திசைவேகம் (Resultant velocity)

எனப்படும். அவ்விரு திசைவேகங்களும் இவ் விளைவுத் திசை வேகத்தின் கூறுகள் (components) எனப்படும்.

திசைவேக இணைகரம் (Parallelogram of velocities)

இயக்கத்திலிருக்கும் ஒரு துகளின் ஒருமித்த இரு திசை வேகங்கள் அளவிலும் திசையிலும் ஓர் இணைகரத்தின் அடுத் தடுத்த இரு பக்கங்களால் குறிப்பிடப்பட்டால், அவற்றின் விளைவுத் திசைவேகம் அவ் விருபக்கங்களின் வெட்டுப்புள்ளி வழியே வரையப்படும் அவ் விணைகரத்தின் மூலைவிட்டத்தினால் அளவிலும் திசையிலும் குறிப்பிடப்படும்.

நிறுவல் :



படம் 1

O என்பது $\vec{u}$, $\vec{v}$ என்னும் திசைவேகங்களுடன் ஒருங்கே இயங்கிக்கொண்டிருக்கும் ஒரு துகள்.

$\vec{OA} = u$; $\vec{OB} = v$; $\angle AOB = \alpha$ என்க. $OACB$ என்னும் இணைகரத்தைப் பூர்த்தி செய்க.

$AC = OB$, $AC \parallel OB$.

$\therefore \vec{AC} = \vec{OB} = \bar{v}$.

$\vec{u}$, $\vec{v}$ ஆகியவற்றின் விளைவுத் திசைவேகம் $V = \vec{u} + \vec{v}$

$= \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OC}$.

மேலும், $OC^2 = OA^2 + AC^2 - 2\, OA \cdot AC.\cos \angle OAC$

அதாவது, $V^2 = u^2 + v^2 - 2.u.v.\cos(180° - \alpha)$

$= u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha$.

$\therefore$ விளைவுத் திசைவேகம் $V = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha}$ ...... (1)

$\angle COA = \theta$ என்க ; $CP \perp OA$ வரைக.

$$\tan\theta = \frac{CP}{OP} = \frac{AC\sin\alpha}{OA + AP} = \frac{v\sin\alpha}{u + v\cos\alpha} \quad \ldots (2)$$

(1), (2) ஆகிய தொடர்புகளிலிருந்து விளைவுத் திசைவேகத்தின் அளவு, திசை ஆகியவற்றை நிர்ணயிக்கலாம்.

குறிப்பு 1: $\vec{u}, \vec{v}$ ஆகிய இரு திசைவேகங்களும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான திசைகளிலிருப்பின், α $\pi/2$. எனவே, அவற்றின் விளைவுத் திசை $\vec{V}$-ன் அளவு

$$V = \sqrt{u^2 + v^2}$$

என்றும், $\vec{u}$ திசைவேகத்தின் திசையுடன் அதன் கோணச் சாய்வு $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v}{u}\right)$

என்றும் காணலாம்.

குறிப்பு 2: இரு திசைவேகங்களும் சமஅளவுடையனவாகவும், α கோணச் சாய்விலுமிருந்தால் (1), (2) ஆகிய தொடர்புகளில் $v = u$ என்று பிரதியிட்டு விளைவுத் திசைவேகம் $\vec{V}$-ன் அளவு, திசை ஆகியவற்றைப் பெறலாம்.

(1)-லிருந்து, $V = \sqrt{2u^2 + 2u^2 \cos\alpha}$

$$= \sqrt{2u^2(1 + \cos\alpha)}$$

$$= \sqrt{2u^2\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$= 2u\cos\frac{\alpha}{2}$$

(2)-லிருந்து, $\tan\theta = \dfrac{u\sin\alpha}{u + u\cos\alpha}$

$$= \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha}$$

$$= \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \tan\frac{\alpha}{2}$$

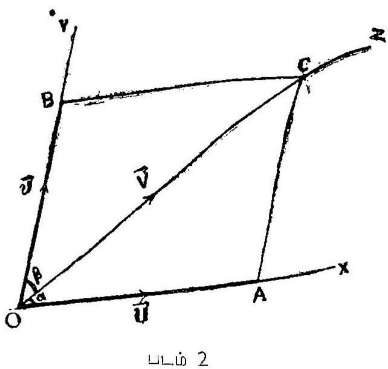
$$\therefore \theta = \frac{\alpha}{2}$$

ஆகவே, இருசமமான திசைவேகங்களின் விளைவுத் திசைவேகம் அத் திசைவேகங்களின் திசைகளுக்கிடையேயுள்ள கோணத்தின் இருசம வெட்டியின் திசையிலிருக்கும்.

திசைவேகங்களின் கூறுபாடுகள் (Resolution of velocities)

இரு திசைவேகங்களை ஒருங்கே பெற்றிருக்கும் ஒரு துகள் அவற்றின் விளைவுத் திசைவேகத்துடன் இயங்குமென்றும், இவ் விளைவுத் திசைவேகத்தின் அளவு, திசை ஆகியவற்றைத் திசைவேக இணைகர விதியின் மூலம் கணக்கிடலாமென்றும் கண்டோம். இப்பொழுது, ஒரு திசையில் இயங்கிக்கொண்டிருக்கும் ஒரு துகளின் திசைவேகத்தை விளைவுத் திசைவேகமாகக் கொண்ட இரு திசைவேகக் கூறுகளாக ஏதேனுமிரு திசைகளில் எவ்வாறு பிரிக்கலாமென்று காணலாம்.

O என்னும் துகள் $\vec{V}$ என்னும் திசைவேகத்துடன் OZ வழியே இயங்கிக் கொண்டிருப்பதாகக் கொள்க. OX, OY என்பன O வழியே OZ-ன் இருபுறமும் OZ-உடன் முறையே α, β கோணச் சாய்வுகளிலுள்ள இருதிசைகள். OZ-ல் திசைவேகம் $\vec{V}$-யை அளவிலும் திசையிலும் குறிப்பிடுமாறு $\overrightarrow{OC}$ என்னும் திசையியை எடுத்துக் கொள்க. அதாவது



படம் 2

$\overrightarrow{OC} = \vec{V}$. C வழியே OY, OX-க்கு இணையாக முறையே CA, CB என்னும் நேர்கோடுகள் OX, OY ஆகியவற்றை

A, B-ல் வெட்டுமாறு வரைக. எனவே, $OACB$ என்பது ஓர் இணைகரமாகும்.

இப்பொழுது, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{V}$.

ஆகவே, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ ஆகியவற்றால் குறிப்பிடப்படும் திசை வேகங்களின் விளைவுத் திசைவேகம் $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{V}$ ஆகும். ஆதாவது, $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{v}$ எனில், $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ என்பன முறையே OX, OY ஆகிய திசைகளில் திசைவேகம் $\overrightarrow{V}$-ன் திசைவேகக் கூறுகளாகும்.

$\triangle OAC$-ல், $OA = u$; $AC = OB = v$; $OC = V$.

$$\angle AOC = \alpha \; ; \; \angle OCA = \angle BOC = \beta \; ;$$

$$\angle OAC = 180^\circ - (\alpha + \beta)$$

இப்பொழுது, $$\frac{OA}{\sin \angle OCA} = \frac{AC}{\sin \angle AOC} = \frac{OC}{\sin \angle OAC}$$

அதாவது, $$\frac{u}{\sin \beta} = \frac{v}{\sin \alpha} = \frac{V}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$\therefore u = \frac{V \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad v = \frac{V \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$

குறிப்பு:

திசைவேகத்தின் குத்துப்பிரிவுகள்

OX, OY என்ற திசைகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக விருப்பின் $\alpha + \beta = 90^\circ$ ஆகும். எனவே, $\beta = 90^\circ - \alpha$. இம் மதிப்புகளை மேற்கண்ட சூத்திரங்களில் பிரதியிட்டு, திசை வேகம் $\overrightarrow{V}$-ன் செங்குத்துப் பிரிவுகளைப் பெறலாம். அதாவது, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ என்பன திசைவேகம் $\overrightarrow{V}$-யுடன் முறையே α, $90^\circ - \alpha$ சாய்வுகளிலுள்ள செங்குத்துத் திசைவேகக் கூறுகளெனில்,

அவற்றின் அளவுகளைப் பின்வரும் தொடர்புகளின் மூலம் பெறலாம்.

$$u = \frac{V \sin (90^\circ - \alpha)}{\sin 90^\circ} = V \cos \alpha,$$

$$v = \frac{V \sin \alpha}{\sin 90^\circ} = V \sin \alpha$$

திசைவேக முக்கோணம் (Triangle of velocities)

இயக்கத்திலிருக்கும் ஒரு துகள் ஒருங்கே பெற்றுள்ள இரு திசைவேகங்கள் ஒரு முக்கோணத்தின் AB, AC என்னும் பக்கங்களால் அளவிலும் திசையிலும் குறிப்பிடப்பட்டால், அவற்றின் விளைவுத் திசைவேகம் அம் முக்கோணத்தின் AC என்னும் பக்கத்தினால் அளவிலும் திசையிலும் குறிப்பிடப்படும்.

திசையிக் கூட்டல் விதியின்படி $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. எனவே, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ ஆகிய திசையிகளினால் அளவிலும் திசையிலும் குறிப்பிடப்படுகின்ற இரு திசைவேகங்களின் விளைவுத் திசைவேகம் அளவிலும் திசையிலும் $\overrightarrow{AC}$ ஆல் குறிப்பிடப்படும்.

குறிப்பு 1: ஒரு முக்கோணத்தின் ஒருமுக வரிசையிலெடுக்கப்பட்ட மூன்று பக்கங்களினாலும் அளவிலும் திசையிலும் குறிப்பிடப்படுகின்ற மூன்று விசைகளை ஒருங்கே பெற்றிருக்கும் ஒரு துகள் ஓய்விலிருக்கும்.

குறிப்பு 2: O என்னும் புள்ளி வழியே OA, OB என்னும் திசைகளில் $\lambda \cdot \overrightarrow{OA}$, $\mu \cdot \overrightarrow{OB}$ (λ, μ மாறிலிகள்) என்பவற்றால் குறிப்பிடப்படுகின்ற திசைவேகங்களுடன் ஒருங்கே இயங்கிக் கொண்டிருக்கும் ஒரு துகளின் விளைவுத் திசைவேகம் AB-ல் $\lambda \cdot AC = \mu \cdot CB$ என்றவாறு அமையப் பெறும் C என்னும் புள்ளி வழியே செல்லும் $(\lambda + \mu) \overrightarrow{OC}$ ஆல் குறிப்பிடப்படுகின்ற திசைவேகமாகும்.

(நிலையியல் $\lambda - \mu$ தேற்றம் பார்க்க)

பல்கோணத்தின் திசைவேகங்கள் (Polygon of velocities)

$A_1 A_2 A_3, \ldots\ldots\ldots\ldots A_{n-1} A_n$ என்னும் பல கோணத்தின் $A_1 A_2$, $A_2 A_3, \ldots\ldots\ldots\ldots, A_{n-1}, A_n$ என்னும் பக்கங்களால் அளவிலும் திசையிலும் குறிப்பிடப்படுகின்ற திசைவேகங்களுடன் ஒருங்கே இயங்கிக்கொண்டிருக்கும் ஒரு துகளின் விளைவுத் திசைவேகம் அப் பல்கோணத்தின் $A_1 A_n$ என்ற பக்கத்திஞல் அளவிலும் திசையிலும் குறிப்பிடப்படும்.

$$\text{விளைவுத் திசைவேகம்} = \overrightarrow{A_1 A_2} + \overrightarrow{A_2 A_3} + \ldots\ldots + \overrightarrow{A_{n-1} A_n}$$

$$= \overrightarrow{A_1 A_n}$$

(நிலையியல்—விசை பல்கோண விதி பார்க்க)

குறிப்பு: ஒரு மூடிய பல்கோணத்தின் ஒரு முகவரிசையி லெடுக்கப்பட்ட பக்கங்களால் அளவிலும் திசையிலும் குறிப்பிடப் படுகின்ற திசைவேகங்களைப் பெற்றிருக்கும் ஒரு துகள் ஓய்வி லிருக்கும்.

ஒரு துகள் பெற்றிருக்கும் பல திசைவேகங்களின் விளைவு காணல்

$u_1, u_2, u_3, \ldots\ldots\ldots, u_n$ என்னும் பல ஒரு தளத் திசைவேகங் களுடன் O என்னும் துகள் ஒருங்கே இயங்கிக்கொண்டிருப்ப தாகக் கொள்க. V என்பது இத் திசைவேகங்களின் விளைவுத் திசைவேகம் என்க. திசைவேகம் V-ம் ஏனைய திசைவேகங் களின் தளத்திலேயே அமைந்திருக்கும்.

O-வழியே இத் திசைவேகங்களின் தளத்தில் OX, OY என்னுமிரு நிலையான திசைகளைக் குறித்துக் கொள்க. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots\ldots, \alpha_n$, θ என்பன முறையே $u_1, u_2, u_3, \ldots\ldots u_n$, V ஆகிய திசைவேகங்களின் திசைகள் OX திசையுடன் கொண்டுள்ள சாய்வுகள் என்க.

OX திசையில் இத் திசைவேகங்களின் கூறுகள் முறையே $u_1 \cos \alpha_1$, $u_2 \cos \alpha_2$, $u_3 \cos \alpha_3, \ldots\ldots\ldots, u_n \cos \alpha_n$, $V \cos \theta$ ஆகும்.

OY திசையில் இத் திசைவேகங்களின் கூறுகள் முறையே $u_1 \sin \alpha_1$, $u_2 \sin \alpha_2$, $u_3 \sin \alpha_3, \ldots\ldots\ldots u_n \sin \alpha_n$, $V \sin \theta$ ஆகும்.

OX திசையில் விளைவுத் திசைவேகத்தின் கூறு அதே திசையில் எல்லாத் திசைவேகங்களின் கூறுகளின் மொத்தத்துக்குச் சமமாகுமாகையால்,

$$V \cos \theta = u_1 \cos \alpha_1 + u_2 \cos \alpha_2 + u_3 \cos \alpha_3 + \ldots\ldots + u_n \cos \alpha_n$$

இதுபோல், OY திசையில் திசைவேகங்களின் கூறுகளைச் சமன்படுத்த,

$$V \sin \theta = u_1 \sin \alpha_1 + u_2 \sin \alpha_2 + u_3 \sin \alpha_3 + \ldots\ldots\ldots + u_n \sin \alpha_n.$$

$$\therefore \quad V^2 = (V \cos\theta)^2 + (V \sin \theta)^2$$

$$= (\Sigma u_1 \cos \alpha_1)^2 + (\Sigma u_1 \sin \alpha_1)^2$$

$$= \Sigma u_1^2 \cos^2 \alpha_1 + 2\Sigma u_1 u_2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \Sigma u_1^2 \sin^2 \alpha_1 + 2 \Sigma u_1 u_2 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2$$

$$= \Sigma (u_1^2 \cos^2 \alpha_1 + u_1^2 \sin^2 \alpha_1) + 2 \Sigma u_1 u_2 (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \sin \alpha_1 \sin \alpha_2)$$

$$= \Sigma u_1^2 + 2 \Sigma u_1 u_2 \cos (\alpha_1 - \alpha_2) \qquad \ldots \quad (1)$$

மேலும், $\tan \theta = \dfrac{V \sin \theta}{V \cos \theta}$

$$= \frac{\Sigma u_1 \sin \alpha_1}{\Sigma u_1 \cos \alpha_1} \qquad \ldots \quad (2)$$

(1), (2) ஆகிய தொடர்புகளிலிருந்து விளைவுத் திசைவேகம் V-யின் அளவு, திசை ஆகியவற்றைப் பெறலாம்.

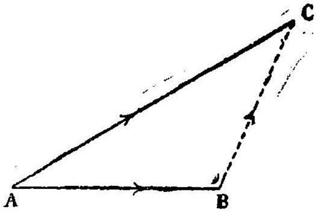
திசைவேக இணைகரத் திண்மம் (Parallelopiped of velocities)

திசைவேகங்களின் இணைகர விதியை முப்பரிமாணங்களுக்கு விரிவுபடுத்தித் திசைவேகங்களின் இணைகரத் திண்ம விதியைப் பெறலாம்.

இயக்கத்திலிருக்கும் ஒரு துகள் ஒருங்கே பெற்றிருக்கும் மூன்று திசைவேகங்கள் ஓர் இணைகரத் திண்மத்தின் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்ற மூன்று ஓரங்களினால் அளவிலும் திசையிலும் குறிப்பிடப்படின், அவற்றின் விளைவுத் திசைவேகம் அப்புள்ளி வழியே செல்லும் அவ் இணைகரத் திண்மத்தின் மூலைவிட்டத் திசையிலும் குறிப்பிடப்படும்.

திசைவேக மாறுபாடு (Change of velocity):

இயக்கத்திலிருக்கும் ஒரு துகளின் திசைவேகம் அளவிலோ அல்லது திசையிலோ அல்லது இரண்டிலுமோ மாறுபடும்போது அத் திசைவேகம் மாறுவதாகச் சொல்லப்படுகிறது.



படம் 3

t என்னும் நேரத்தில் ஒரு துகளின் திசைவேகம் $\overrightarrow{AB}$ யாலும், $t + \Delta t$ என்னும் நேரத்தில் அதன் திசை வேகம் $\overrightarrow{AC}$ யாலும் குறிப்பிடப்படின், திசைவேக முக்கோண விதியின்படி, Δt என்னும் கால இடைவெளியில் அதன் திசைவேகத்திலேற்பட்டுள்ள மாறுதல் $\overrightarrow{BC}$ யால் குறிப்பிடப்படுமென்று காணலாம்.

$AB = AC$ எனில், அத் துகளின் திசைவேகம் அளவில் மாறாது திசையில் மாறியிருப்பதாகக் கொள்க.

முடுக்கம் (Acceleration)

இயக்கத்திலிருக்கும் ஒரு துகளின் முடுக்கம் என்பது அதன் திசை வேகத்தின் மாறுபாட்டு வீதமாகும். துகளின் இயக்கத் திசைக்கு எதிர்த்திசையில் செயல்படும் முடுக்கம் 'எதிர் முடுக்கம்' அல்லது 'வேகத் தளர்ச்சி வீதம்' (Retardation) எனப்படும்.

சீர்முடுக்கமும் மாறுமுடுக்கமும்

இயக்கத்திலிருக்கும் ஒரு துகளின் திசைவேக மாறுபாடு சம கால இடைவெளிகளில், அக்கால இடைவெளிகள் எத்துணைக் குறுகியனவாயிருப்பினும், சமமாகவிருப்பின் அத் துகளின் முடுக்கம் 'சீர் முடுக்கம்' (Uniform acceleration) எனப்படும். சீர்முடுக்கமானது ஓர் அலகு கால இடைவெளியிலேற்படும் திசைவேக மாறுபாட்டின் மூலம் அளவிடப்படுகின்றது. அதாவது, ஓர் அலகு முடுக்கமென்பது ஓர் அலகு கால இடைவெளியிலேற்படும் ஓர் அலகு திசைவேக மாறுபாடு ஆகும். செ.கி.வி. முறையில் ஓர் அலகு முடுக்கம் என்பது வினடிக்கு ஒரு செ.மீ./வி. திசை வேகமாறுபாட்டு வீதமாகும்.

அதாவது, ஓர் அலகு முடுக்கம் $= \dfrac{\text{ஒரு செ.மீ./வி.}}{\text{விநாடி}}$

$= \dfrac{\text{ஒரு செ.மீ.}}{(\text{விநாடி})^2}$

$=$ ஒரு செ.மீ./வி^{2}.

$=$ விநாடிக்கு விநாடிக்கு ஒரு செ.மீ. திசைவேக மாறுபாடு.

இதுபோல், அ.ரா.வி. முறையில் ஓர் அலகு முடுக்கம் என்பது விநாடிக்கு ஒரு அடி/விநாடி திசைவேகமாறுபாடு ஆகும்.

அதாவது, ஓர் அலகு முடுக்கம் $= \dfrac{\text{ஓர் அடி/வி}}{\text{விநாடி}}$

$= \dfrac{\text{ஓர் அடி}}{(\text{விநாடி})^2}$

$=$ ஓர் அடி/வி.^{2}

$=$ விநாடிக்கு விநாடிக்கு ஓர் அடி திசைவேக மாறுபாடு.

திசைவேக மாறுபாட்டு வீதம் அளவிலோ அல்லது திசையிலோ அல்லது இரண்டிலுமோ கணத்துக்குக் கணம் மாறுபடின் அத்தகைய முடுக்கம் 'மாறு முடுக்கம்' (Variable acceleration) எனப்படும்.

குறிப்பிட்ட கணத்தில் ஒரு துகளின் முடுக்கம்

முடுக்கத்துடன் இயங்கிக் கொண்டிருக்கும் ஒரு துகளின் திசைவேகம் t நேரத்தில் v என்றும், $t + \delta t$ நேரத்தில் $v + \delta v$ என்றும் கொள்க. எனவே, δt நேரத்தில் அத் துகளின் திசைவேக மாறுபாடு δv ஆகும்.

$\therefore$ δt நேரத்தில் அதன் திசைவேக மாறுபாட்டு வீதம் $= \dfrac{\delta v}{\delta t}$

$\delta t \to O$ ஆயின் $(t + \delta t) \to O$ ஆகுமாகையால்,

t நேரத்தில் அதன் முடுக்கம் $= \underset{\delta t \to O}{\text{எல்லை}} \left(\dfrac{\delta v}{\delta t}\right) = \dfrac{dv}{dt}$ ஆகும்.

ஆனல், s என்பது t நேரத்தில் கடந்துள்ள தூரமெனில்,

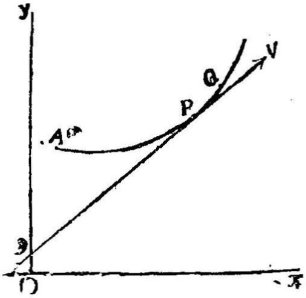
$$= \frac{ds}{dt} \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore t \text{ நேரத்தில் துகளின் முடுக்கம் } = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right)$$

$$= \frac{d^2s}{dt^2}.$$

முடுக்கம் என்பது அளவு, திசை ஆகிய இரண்டும் கொண்ட ஒரு கணியம் ஆகையால் அது ஒரு திசையி ஆகும். திசைவேகங்களைப் போன்று முடுக்கங்களும் முக்கோண விதி, இணைகர விதி, பல்கோண விதி போன்ற விதிகட்குட்பட்டனவாயிருக்கின்றன.

திசைவேகம், முடுக்கம் ஆகியவற்றின் கூறுகள் :



படம் 4.

Ox, Oy என்ற செங்குத்து அச்சுக்களைக் கொண்ட தளத்தில் இயங்கிக் கொண்டிருக்கும் P என்னும் ஒரு துகளின் இயக்கப் பாதை $= yf(x)$ என்னும் வளை வரை என்று கொள்க. P (x, y), Q $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ என்பன முறையே $t, t + \Delta t$ ஆகிய குறுகிய இடைவெளி நேரங்களில் அத்துகளின் நிலைகள் என்று கொள்க. அவ்வளை வரையிலுள்ள A என்னும் நிலையான புள்ளியிலிருந்து P, Q ஆகியவற்றின் வளைவரைத் தூரங்கள் முறையே $s, s + \Delta s$ என்று கொள்க.

வரையறையின்படி, t நேரத்தில் Pயின் திசைவேகம்

$$= \underset{\Delta t \to O}{\text{எல்லை}} \left(\frac{PQ}{\Delta t}\right)$$

$$= \underset{\Delta t \to O}{\text{எல்லை}} \left(\frac{PQ}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t}\right)$$

$$= \underset{\Delta t \to O}{\text{எல்லை}} \left(\frac{PQ}{\Delta s}\right) \cdot \underset{\Delta t \to O}{\text{எல்லை}} \left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)$$

$$= 1. \frac{ds}{dt} \text{ (ஏனெனில் } PQ - \Delta s)$$

அதாவது, $V = \frac{ds}{dt}$.

இத்திசை வேகம் வளைவரைக்கு Pயில் வரையப்படும் தொடு கோட்டின் வழியே செயல்படும்.

Ox, Oy ஆகிய அச்சுக்களின்மீது PQவின் வீச்சுக்கள் முறையே Δx, Δy ஆகும். எனவே Ox, Oy வழியே துகள் Pயின் திசைவேகக் கூறுகள் முறையே $\lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)$, $\lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)$ ஆகும். அதாவது, x, y அச்சுக்களின் வழியே V-ன் கூறுகள் $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ ஆகும். ஆனால் வகை நுண் கணித முறையில் இவற்றை முறையே $\dot{x}$, $\dot{y}$ என்று குறிப்பிடலாமாகையால் துகள் Pயின் திசைவேகக் கூறுகள்

$$Ox \text{ வழியே } \dot{x} = \frac{dx}{dt} \text{ என்றும்,}$$

$$Oy \text{ வழியே } \dot{y} = \frac{dy}{dt} \text{ என்றும்,}$$

கூறலாம்.

இதுபோல், Pயின் முடுக்கம் f இன் கூறுகள்

$$Ox \text{ வழியே } \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} \text{ என்றும்,}$$

$$Oy \text{ வழியே } \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2} \text{ என்றும்}$$

காணலாம்.

ஒரு துகள் தொகுதியின் திணிவு மையத்தின் வேகமும், முடுக்கமும் (Velocity and Acceleration of the centre of mass of a system of Particles)

Ox, Oy என்ற செங்குத்து அச்சுக்களைக் கொண்ட தளத்தின் மீது இயங்கிக் கொண்டிருக்கும் $m_1, m_2, m_3 \ldots$—என்னும் பொருண்மைகளுள்ள துகள்களின் அச்சுத் தூரங்கள் முறையே (x_1, y_2), (x_2, y_2), $(x_3\ y_3)$,.........என்று கொள்க. இத்துகள்களின் மொத்தப் பொருண்மை M என்றும், இத்துகள் தொகுதியின் திணிவு மையம் $(\bar{x}, \bar{y})$ என்றும் கொள்க.

$$\therefore M = m_1 + m_2 + m_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \quad \ldots (1)$$

$$M\bar{x} = m_1x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \ldots\ldots\ldots, \quad \ldots (2)$$

$$M\bar{y} = m_1y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + \ldots\ldots\ldots, \quad \ldots (3)$$

என்று நாமறிவோம் (பார்க்கவும்: நிலையியல்—புவியீர்ப்பு மையம்) (2), (3) ஆகிய தொடர்புகளிலிருந்து, t குறித்து வகையீடு செய்து

$$M\dot{\bar{x}} = m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2 + m_3 \dot{x}_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots, \quad \ldots (4)$$

$$M\dot{\bar{y}} = m_1 \dot{y}_1 + m_2 \dot{y}_2 + m_3 \dot{y}_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots (5)$$

என்ற தொடர்புகள் பெறப்படுகின்றன. இத் தொடர்புகளிலிருந்து திணிவு மையத்தின் Ox, Oy வழித் திசைவேகக் கூறுகளைப் பெறலாம். இத் திசை வேகக் கூறுகளிலிருந்து திணிவு மையத்தின் திசை வேகத்தை எளிதில் பெறலாம். மேலும்,

பொருண்மை $\times$ திசைவேகம் = உந்தம் (Momentum) ஆகையால், (4), (5) ஆகிய தொடர்புகளிலிருந்து,

ஏதேனுமொரு திசையில், எவ்வெண்ணிக்கையிலுமான துகள்களைக் கொண்ட ஒரு தொகுதியின் உந்தம் அதே திசையில் அத் துகள்களின் மொத்த உந்தத்துக்கு சமமாகும் என்றறிகிறோம்.

இப்பொழுது (4), (5) ஆகிய தொடர்புகளை மீண்டும் t குறித்து வகையீடு செய்து

$$M\ddot{\bar{x}} = m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 + m_3 \ddot{x}_3 + \ldots\ldots\ldots \quad \ldots (6)$$

$$M\ddot{\bar{y}} = m_1 \ddot{y}_1 + m_2 \ddot{y}_2 + m_3 \ddot{y}_3 + \ldots\ldots\ldots \quad \ldots (7)$$

என்ற தொடர்புகள் பெறப்படுகின்றன. இத் தொடர்புகளிலிருந்து திணிவு மையத்தின் Ox, Oy வழி முடுக்கக் கூறுகளிலிருந்து திணிவு மையத்தின் முடுக்கத்தை எளிதில் பெறலாம்.

சார் வேகம் (Relative Velocity)

வேகம் என்பது ஒரு சார்புக் கணியமாகும். தொடர் வண்டியில் பயணம் செய்து கொண்டிருக்கும் ஒருவன் வெளியே தரையில் நின்று கொண்டிருக்கும் ஒருவனைப் பொறுத்தவரைத் தொடர் வண்டியின் வேகத்துடன் சென்று கொண்டிருப்பதாக

கூறுகிறோம். ஆனால் அதே வண்டியில் அவன் பக்கத்தில் அமர்ந்திருக்கும் ஒருவனைப் பொறுத்தவரை அவன் ஓய்விருப்ப தாகக் கூறவேண்டும். மேலும், அவ்வண்டியின் பக்கத்திலேயே அதே திசையில் செல்லும் மற்றொரு தொடர் வண்டியைப் பொறுத்தவரை அவன் குறைந்த வேகத்துடன் செல்லுவதை நாமறிவோம். இக்குறைவான வேகமானது இரு வண்டிகளின் வேகங்களின் வித்தியாசத்திற்குச் சமமாகும். இதுபோல், அவ் வண்டியின் பக்கத்திலேயே எதிர்த்திசையில் சென்று கொண் டிருக்கும் மற்றொரு தொடர் வண்டியைப் பொறுத்தவரை அவனுடைய வேகம் மிகவும் அதிகமாகயிருப்பதையும் காண லாம். இந்த அதிகமான வேகமானது, இரு வண்டிகளின் வேகங்களின் மொத்தத்துக்குச் சமமாகும். இவ்வாறு, இயக்கத் திலிருக்கும் ஒரு பொருளின் வேகம் இயக்கத்திலிருக்கும் மற்றொரு பொருளைப் பொறுத்துக் கணக்கிடப்பட்டால், அவ்வாறு கணக் கிடப்படும் வேகமானது அந்த மற்றொரு பொருளைப் பொறுத்த சார்வேகம் என்றழைக்கப்படுகிறது.

இரு புள்ளிகளுக்கிடையேயுள்ள தூரம் அளவிலோ, அல்லது திசையிலோ அல்லது அளவிலும் திசையிலுமோ மாறிக்கொண் டிருந்தால் ஒவ்வொரு புள்ளியும் மற்ற புள்ளியைப் பொறுத்த வரை ஒரு சார் வேகத்துடன் இயங்குவதாகக் கூறப்படும்.

ஒரு தளத்தில் இயக்கத்திலிருக்கும் ஒரு துகளின் திசை வேகம் என்பது அத் தளத்திலுள்ள ஒரு நிலையான புள்ளியைப் பொறுத்து அத்துகளின் இடப் பெயர்ச்சியென்று நாம் கண் டோம். இதுபோல், ஒரு தளத்தில் இயக்கத்திலிருக்கும் Q என்னும் ஒரு துகளைப் பொறுத்து, அதே தளத்தில் இயக்கத்தி லிருக்கும் துகள் Pயின் திசைவேகம் என்பது $\vec{PQ}$ என்னும் திசை யின் மாறுபாட்டு வீதமாகும். இப்பொழுது, இவ்விரு துகள் களும் தங்கள் திசை வேகங்களைச் சம அளவுகளில் மாற்றிக் கொள்வதாகக் கருதுவோம். இவ்வாறு மாற்றப்பட்ட பின்னரும் $\vec{PQ}$ - வின் மாறுபாட்டுவீதம் முன்போலவே யிருக்குமென்று காணலாம். அதாவது, ஒரே தளத்தில் இயக்கத்திலிருக்கும் இரு துகள்களின் திசை வேகங்களைச் சம அளவில் கூட்டுவ தாலோ அல்லது குறைப்பதாலோ அவ்விரு துகள்களுக்கிடையே யுள்ள சார்வேகம் மாறுவதில்லை யென்று அறிகிறோம்.

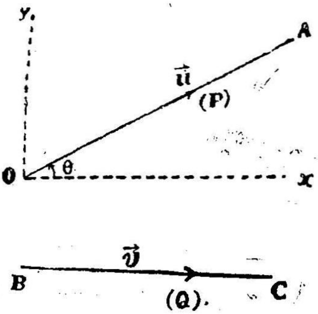
ஒரு தளத்தில் இயக்கத்திலிருக்கும் P, Q என்னும் இரு துகள் களின் திசைவேகங்கள் முறையே $\vec{u}, \vec{v}$ என்று கொள்க. இப்

பொழுது இரு துகள்களின் திசை வேகங்களுடனும் $-\vec{u}$ என்னும் திசை வேகத்தைக் கூட்டுக. எனவே, இப்பொழுது இரு துகள்களின் திசைவேகங்கள் முறையே $\vec{u}-\vec{u}=o, \vec{v}-\vec{u}$ ஆகும். அதாவது, துகள் P ஆனது ஓய்வு நிலைக்குக் கொண்டு வரப்படுகிறது; Qவின் திசைவேகம் $\vec{v}-\vec{u}$ ஆக மாறுகிறது. அதாவது, Pயைப் பொறு Q-வின் திசைவேகம் $\vec{v}-\vec{u}$ ஆகும். இதுவே, துகள் P-யைப் பொறுத்து துகள் Q-வின் சார்வேகமாகும் அதாவது, $\vec{u}$ திசை வேகத்துடன் இயங்கிக் கொண்டிருக்கும் P என்னும் துகளைப் பொறுத்து, அதே தளத்தில் $\vec{v}$ என்னும் திசை வேகத்துடன் இயங்கிக் கொண்டிருக்கும் Q என்னும் துகளின் சார்வேகம் $(\vec{v}-\vec{u})$ ஆகும்.

ஆகவே, இயக்கத்திலிருக்கும் P என்னும் ஒரு துகளைப் பொறுத்து, அதே தளத்தில் இயக்கத்திலிருக்கும் மற்றொரு துகள் Q-வின் சார்வேகம் என்பது Q-வின் திசை வேகத்துடன் Pயின் திசை வேகத்தை எதிர்த்திசையில் கூட்டும் கூட்டு வேகமாகும்.

சார்வேகத்தின் அளவு, திசை ஆகியவற்றைக் காணல் :

OA, BC என்னும் திசைகளில் முறையே $\vec{u}, \vec{v}$ ஆகிய திசைவேகங்களுடன் இயங்கிக் கொண்டிருக்கும் P, Q என்னும் இரு துகள்களைக் கருதுக.



திசைவேகம் $\vec{u}$-வை, $\vec{v}$ இன் திசையிலும், அதற்குச் செங்குத் திசையிலும் கூறுகளாகப் பிரிக்கவும். $\vec{u}, \vec{v}$ ஆகிய திசைவேகங்களின் திசைகளுக்கிடையேயுள்ள கோணம் θ எனில், $\vec{v}$ இன் திசைக்கு இணையான திசையில் $\vec{u}$ இன் கூறு $u \cos\theta$ ஆகும்; $\vec{u}$ இன் திசைக்குச் செங்குத்துத்

திசையில் u இன் து $u \operatorname{Sin} \theta$ ஆகும். எனவே, BC திசையில் துகள் Q - வைப் பொறுத்து, துகள் Pயின் சார்வேகக் கூறு $(u \cos \theta - v)$ ஆகும். இதுபோல், BC க்குச் செங்குத்துத் திசையில் Q - வைப் பொறுத்து, Pயின் சார்வேகக் கூறு $U \operatorname{Sin} \theta - 0 = U \operatorname{Sin} \theta$ ஆகும்.

Q - வைப் பொறுத்து P யின் சார்வேகம் V என்றும், BC திசையுடன் (அதாவது Ox - உடன்) இச்சார் வேகத்தின் சாய்வு x என்றும் கொண்டால், BC க்குச் செங்குத்துத் திசையிலும் V - யின் கூறுகள் முறையே $V \cos \propto$, $V \operatorname{Sin} \propto$ ஆகும்.

$$\therefore V \cos \propto = u \cos \theta - v$$

$$V \operatorname{Sin} \propto = u \operatorname{Sin} \theta$$

$$\therefore V^2 = (\cos \theta - u)^2 + u^2 \operatorname{Sin}^2 \theta$$

$$= u^2 + v^2 - 2\, ov \cos \theta.$$

$$V = \sqrt{u^2 + v^2 - 2\, uv \cos \theta}$$

$$\tan \propto = \frac{V \operatorname{Sin} \propto}{V \cos \propto} = \frac{u \operatorname{Sin} \theta}{u \cos \theta = v}$$

குறிப்பு 1.

$\vec{u}, \vec{u}$ ஆகிய இருதிசை வேகங்களும் ஒரே திசையி லிருந்தால்,

$$\theta = 0^\circ. \quad \therefore V = \sqrt{u^2 + u^2 - 2\, uv \cos 0^\circ}$$

$$= \sqrt{(e - u)^2}$$

$$= (u - u)$$

குறிப்பு 2.

$\vec{u}\ \vec{v}$ ஆகிய இரு திசை வேகங்களும் எதிர்த்திசைகளி லிருந்தால், $\theta = 180^\circ$.

$$\therefore V = \sqrt{u^2 + v^2 - 2\, uv \cos 180^\circ}$$

$$= \sqrt{u^2 + v^2 + 2\, uv}$$

$$= \sqrt{(u + v^8)}$$

$$= (u + v)$$

சார் முடுக்கம் (Relative Acceleration)

இயக்கத்திலிருக்கும் துகள் Q வைப் பொறுத்து அதே தளத்தில் இயக்கத்திலிருக்கும் துகள் P யின் சார்முடுக்கம் என்பது P யின் முடிக்கம், Q - வின் முடுக்கத்திற்குச் சம அளவான எதிர்த்திசை முடுக்கம் ஆகியவற்றின் விளைவு முடுக்கம் ஆகும்.

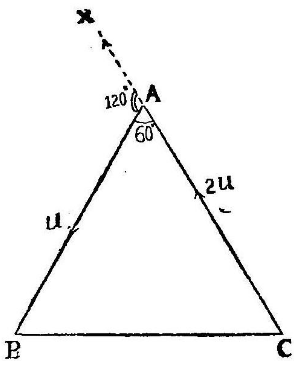
இரு இணை நேர்கோடுகளில் ஒரே திசையில் சமதிசை வேகங்களுடன் இயங்கிக் கொண்டிருக்கும் இரு துகள்களின் சார்வேகம் பூச்சியமாகும்; ஆனால் அவற்றின் சார்முடுக்கம் பூச்சியமாகயிருக்க வேண்டுமென்பதில்லை.

மாதிரி 1.

1. ABC என்பது ஒரு சமபக்க முக்கோணம். ஒரு துகளானது Aயிலிருந்து Bவரை u என்னும் திசைவேகத்துடனும், Cயிலிருந்து A வரை $2u$ என்னும் திசைவேகத்துடன் இயங்கினல், விளைவுத் திசை வேகத்தின் அளவு, திசை ஆகியவற்றினைக் காண்க.

தீர்வு :

CA யை $\times$ க்கு நீட்டுக. ABC என்பது சமபக்க முக்கோண மாகையால் $\angle BAC = 60^\circ$ $\therefore$ $\angle BAX = 120^\circ$ A என்றும் புள்ளியில் AB, Ax என்னும் திசைகளில் முறையே u, $2u$ ஆகிய திசை வேகங்களுடன் ஒரு துகள் இயங்குகிறது.



$\therefore u = u$; $v = 2u$; $a = 120$°

$\therefore$ விளைவுத் திசைவேகம் V என்றும், AB யுடன் அவ்விளைவுத் திசை வேகத்தின் சாய்வு θ என்றும் கொண்டால்,

$$V = \sqrt{v^2 + v^2 + 2\,uv \cos \alpha}$$

$$= \sqrt{v^2 + 4\,u^2\,4u^2 \cos 120^\circ}$$

$$= \sqrt{u^2 + 4\,u^2 + 4\,u^2\,(-\tfrac{1}{2})}$$

$$= \sqrt{u^2 + 4\,u^2 - 2\,u^2}$$

$$= \sqrt{3u^2}$$

$$= \sqrt{3}\,u.$$

$$\tan\theta = \frac{v \text{ Sin } \alpha}{n + v\cos\alpha}$$

$$= \frac{2u \text{ S sln } 120^\circ}{u + 2u\cos 120^\circ}$$

$$= \frac{2u\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)}{u + 2u\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{3}\,u}{v - u} = 0$$

$$\therefore \theta = 90^\circ.$$

∴ விளைவுத் திசைவேகம் AB க்குச் செங்குத்தான திசையில் $\sqrt{3}\,u$ அளவுடன் இயங்குகிறது.

மாதிரி 2.

ஒரு திசை வேகத்தின் கூறுகள் அதன் திசையுடன் 45°, 30° சாய்வுகளிலுள்ளன. முந்திய திசையில் அதன் கூறு $6\sqrt{3}$ அலகுகளெனில் அதன் மற்ற கூறினைக் காண்க.

தீர்வு :

V என்னும் திசைவேகத்தின் கூறுகள் 45° சாய்வுத் திசையில் u என்றும், 30° சாய்வுத் திசையில் v என்றும் கொள்க.

$$\therefore \alpha = 45^\circ;\ \beta = 30^\circ.$$

45° சாய்வுத் திசையில் V இன் கூறு $= V\cos 45^\circ = 6\sqrt{2}$ (தரப்பட்டுள்ளது)

$$V\sqrt{\tfrac{1}{2}} = 6\sqrt{2}$$

அல்லது, $V = 6 \times 2 = 12$ அலகுகள்.

$\vec{u}$ திசையில் V - யின் கூறு $V\dfrac{V \text{ Sin } \alpha}{\text{Sin}(\alpha + \beta)}$

$$= \frac{V.\text{ Sin } 30^\circ}{\text{Sin}(45^\circ + 30^\circ)}$$

$$= \frac{12 \times \frac{1}{2}}{\text{Sin } 45^\circ.\cos 30^\circ + \cos 45^\circ.\text{ S}in\ 30^\circ}$$

$$= \frac{6}{\dfrac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{6 \times 2\sqrt{2}}{\sqrt{3} + 1.}$$

$$= \frac{12\sqrt{2}\,(\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)}$$

$$= 6\sqrt{2}\,(\sqrt{3} - 1)$$

திசையில் V - யின் கூறு $= \dfrac{V \operatorname{Sin} \beta}{\operatorname{Sin}(\alpha + \beta)}$

$$= \frac{12 \times \operatorname{Sin} 45^\circ}{\operatorname{Sin}(45^\circ + 30^\circ)}$$

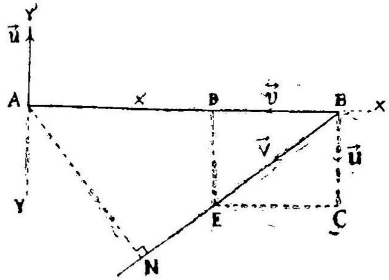
$$= \frac{12 \times \dfrac{1}{\sqrt{2}}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \dfrac{1}{2\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{12 \times \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times 2\sqrt{2}}{\sqrt{3} + 1}$$

$$= \frac{24}{\sqrt{3} + 1}$$

$= 12\,(\sqrt{3} - 1)$ அலகுகள்.

சார் வேகப் பாதை காணல் :



A என்னும் துகள் yy^1 என்னும் திசையில் $\vec{u}$ திசை வேகத்துடனும், B என்னும் துகள் xx^1 என்னும் திசையில் $\vec{v}$ திசைவேகத்துடனும் இயங்கிக் கொண்டிருப்பதாகக் கொள்க. ஏதேனுமொரு குறிப்பிட்ட நேரம் t-யில் அவை முறையே A, B

என்ற நிலைகளில் இருப்பதாகக் கொள்க. A யைப் பொறுத்து Bயின் சார்வேகம் என்பது A யிலிருந்து பார்க்கும் ஒருவனுக்கு B எந்த வேகத்துடன் நகர்ந்து கொண்டிருப்பதாகத் தோன்றுமோ அந்த வேகமாகும். இச்சார் வேகமானது Bயின் திசைவேகம் $\vec{v}$ யுடன் A யின் திசைவேகம் $\vec{u}$-வின் திசையை எதிர்த்திசையாக மாற்றிக் கூட்டப்படும் விளைவுத் திசைவேக மாகும்.

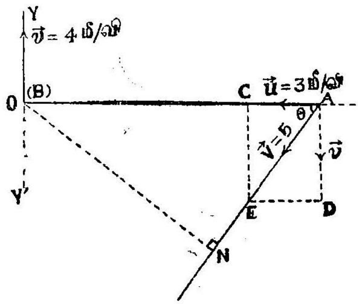
எனவே, xx^1 இல் $\vec{BD} = \vec{v}$ என்றவாறு D என்னும் புள்ளியைக் குறுத்துக் கொள்க. B யில் A யின் இயக்கப் பாதைக்கு இணையான பாதையில் $\vec{u}$ வின் திசைக்கு எதிர்த்திசை யில் $\vec{BC} = \vec{u}$ என்றவாறு $\vec{BC}$ என்னும் நேர்கோட்டுத் துண்டத்தைக் குறித்துக் கொள்க. $BDEC$ என்னும் இணை கரத்தைப் பூர்த்தி செய்க. $\vec{BE}$ என்ற மூலைவிட்டம் அளவிலும் திசையிலும் A யைப் பொறுத்து Bயின் சார்வேகத்தைக் குறிக்கும்.

இப்பொழுது, Aயிலிருந்து இச் சார்வேக இயக்கப்பாதைக்கு AN என்னும் செங்குத்துக் கோடு வரைக. எனவே, துகள் B ஆனது N என்னும் நிலையிலிருக்கும்போது துகள் Aக்கு மிக நெருங்கி இருக்கும். Aயைப் பொறுத்து Bயின் சார்வேகம் V எனில், நேரம் t யிலிருந்து $\frac{BN}{V}$ நேரத்தில் துகள்களிரண்டும் மிக அருகிலிருக்கும்.

மாதிரி 3.

நேர்குக்தான இரு சாலைகள் O என்னுமிடத்தில் சந்திக் கின்றன. 3 மீட்/வி. வேகத்தில் ஒரு சாலையில் சைக்கிளில் சென்று கொண்டிருக்கும் A என்னும் ஒரு மனிதன் அடுத்த சாலையில் 4 மீட்./வி. வேகத்தில் சைக்கிளில் சென்று கொண் டிருக்கும் B என்னும் மனிதனைப் பார்க்கிருன். அவர்களிருவம் 100 மீட்டர்கள் தூரத்திலிருந்தால், அவர்களிருவரும் மிக அருகி லிருக்கும் போது A எவ்வளவு தூரம் சென்றிருப்பான் ?

தீர்வு :



AO, OY என்பன O-வில் சந்திக்கும் இரு நேர்குத்துச் சாலைகள். B என்பவன் O-விலிருக்கும்போது A என்பவன் A யிலிருக்கிறன். AO = 100 மீட்டர். AO திசையில் A யின் வேகம் $u = 3$ மீட்/வி. OY திசையில் B யின் வேகம் $v = 4$ மீட்./வி. AO வில் $\vec{AC} = 3$ மீ/வி. என்ற வேகத்தைக் குறிக்குமாறு AC என்னும் நேர்கோட்டுத் துண்டத்தை யெடுத்துக் கொள்க. AO க்குச் செங்குத்தாக OY க்கு எதிர்ப்பக்கத்தில் AD என்னும் நேர்கோடு வரைந்து $\vec{AD} = 4$ மீட்/வி. என்ற வேகத்தைக் குறிக்குமாறு AD என்னும் நேர்கோட்டுத் துண்டம் வரைந்து, $ACED$ னும் இணைக் கரத்தைப் பூர்த்தி செய்க.

$\therefore \vec{AE} = B$ யைப் பொறுத்து Aயின் சார்வேகமாகும். ஆனல் ACE ஒரு செங்கோண முக்கோணமாகையால்,

$$AE_2 = AC^2 + CE^2 = 3^2 + 4^2 - 25$$

$$AE = 5$$

அதாவது, B-யைப் பொறுத்து A-யின் சார்வேகம் = 5 மீட்/வி· இப்பொழுது, $ON \perp AE$ எனில், A என்பவன் Nஇல் இருக்கும் போது இருவருக்குமிடையேயுள்ள தூரம் மிகச் சிறியதாயிருக்கும்.

இப்பொழுது, $\angle CAE = \theta$ எனில், $\cos\theta = \dfrac{AC}{AE} = \dfrac{3}{5}$

நேர்கோண முக்கோணம் ONAயிலிருந்து,

$$AN = AO\cos\theta$$

$$= 100 \times \frac{3}{5}$$

$$= 60 \text{ மீட்டர்கள்.}$$

5 மீட்/வி. சார்வேகத்துடன் $AN = 60$ மீட். தூரத்தைக் கடக்கும் நேரம் $= \dfrac{60}{5} = 12$ விஞடிகள்.

எனவே, 12 விஞுடிகளில் இருவரும் மிக அருகில் இருப்பார்கள். இந்த 12 விஞுடிகளில் A-சென்ற தூரம் $= 12 \times 3 = 36$ மீட்டர்கள்.

மாதிரி 4. வடக்குத் திசை நோக்கி ஒரு கப்பல் $15\sqrt{2}$ கி.மீ./மணி வேகத்திலும், வடமேற்குத் திசையை நோக்கி மற்ருெரு கப்பல் 15கி.மீட்/மணி வேகத்திலும் சென்று கொண்டிருக்கின்றன. தோற்றத் திசைவேகத்தை (apparent Velocity) யும், முதல் கப்பலிலுள்ள பார்வையாளரைப் பொறுத்து இரண்டாவது கப்பலின் இயக்கத் திசையினையும் காண்க.

தீர்வு : u = முதல் கப்பலின் வேகம் $= 15\sqrt{2}$ கி.மீ./மணி

v = 2வது கப்பலின் வேகம் $= 15$ கி.மீ./மணி.

θ = இரு திசைகளுக்குமிடையேயுள்ள கோணம்

= வடக்கு, வடமேற்குத் திசைகளுக்கிடையே கோணம்

$= 45^\circ$

சார்வேகம் V எனில்,

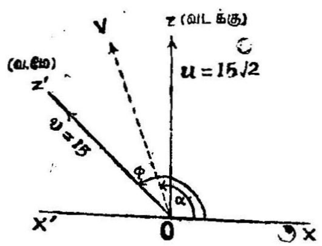
$$V^2 = u^2 + v^2 - 2uv\cos\theta$$

$$= (15\sqrt{2})^2 + 15^2 - 2\,(15\sqrt{2})\,(15)\cos 45^\circ$$

$$= 15^2 \times 2 + 15^2 - 2 \times 15^2 \times \sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= 15^2$$

$$V = 15 \text{ கி.மீ./மணி.}$$



படம் 9

XOX' என்பது கிழக்கு மேற்கு நேர்கோடு. OZ, OZ' என்பன மேற்கு, வடமேற்கு நேர்கோடுகள். α என்பது கிழக்குத் திசையுடன் சார் வேகம் V-யின் சாய்வு.

ϕ = கிழக்குத் திசையுடன் வடமேற்குத் திசையின் சாய்வு $= 135^\circ$.

OX, OXக்குச் செங்குத்து ஆகிய திசைகளின் வேகங்களைக் கூறுகளாகப் பிரிக்கவும்.

$$V\cos\alpha = v\cos\phi = 15\cos 135^\circ = \frac{15}{-\sqrt{2}}$$

$V \sin \alpha$ = வடக்குத் திசையில் வேகக் கூறுகளின் சார் வேகம்

$$= v \cos 45^\circ - v$$

$$= \frac{15}{\sqrt{2}} - 15\sqrt{2}$$

$$= \frac{15}{\sqrt{2}}(1-2)$$

$$= -\frac{15}{\sqrt{2}}.$$

$$\therefore \cos \alpha = \frac{-15/\sqrt{2}}{V} = \frac{-15/\sqrt{2}}{15} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin \alpha = \frac{-15/\sqrt{2}}{V} = \frac{-15\sqrt{2}}{15} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \alpha = 225^\circ.$$

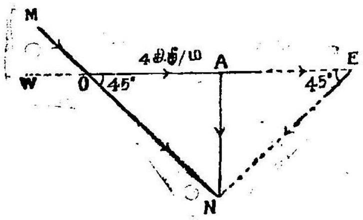
அதாவது, கிழக்குத் திசையுடன் சார்வேகத் திசை 225° சாய்வி லுள்ளது. அதாவது, முதல் கப்பலைப் பொறுத்து இரண்டாவது கப்பல் 15கி.மீ./மணி வேகத்தில் வடமேற்குத் திசையில் செல்லு வதாகத் தோன்றும்.

மாதிரி 5. கிழக்குத் திசையில் 4 கி.மீ./மணி வேகத்தில் நடந்து செல்லும் ஒரு மனிதன் காற்று நேர் வடக்கிலிருந்து வீசுவதாகக் காண்கிருன். அவன் தன் வேகத்தை இரட்டித்த போது காற்று வடகிழக்கிலிருந்து வீசுவதாகக் காண்கிருன். காற்றின் வேகத்தையும் திசையையும் காண்க.

(மதுரை 1970 ஏப்.)

தீர்வு :

மனிதன் O என்னும் புள்ளியிலிருந்து புறப்பட்டு, கிழக்கு நோக்கி OE வழியே நடந்து செல்லுகிருன். MO என்பது காற்று வீசும் உண்மையான திசை. இத்திசை மேற்குத் திசையுடன் θ கோணச் சாய் விலிருப்பதாகக் கொள்க. காற்றின் உண்மையான வேகம் v என்க.



படம் 10

$\vec{OA}$ = மனிதனின் வேகம் = 4 கி.மீ./மணி Aயிலிருந்து OAக்குச் செங்குத்தாக வரையப்படும் நேர்கோடு காற்றின் உண்மைத்திசை MO—ஐ N இல் வெட்டட்டும்.

காற்றின் தோற்றவிசையானது, காற்றின் உண்மை வேகத்துடன் மனிதனின் வேகத்தை எதிர்த்திசையில் மாற்றிக் கூட்டிய விளைவு வேகத்திற்குச் சமமாகும்.

அதாவது, $\vec{AN} = \vec{AO} + \vec{ON}$.

இப்பொழுது OA-ஐ $OA = AE$ என்றவாறு E என்னும் புள்ளிக்கு நீட்டுக.

$\therefore \vec{OE} = 2\,\vec{OA}$ = மனிதனின் இரட்டிக்கப்பட்ட வேகம் = 8 கி.மீ./மணி.

$\vec{ON}$ = காற்றின் உண்மை வேகம்.

காற்றின் இப்போதைய தோற்றவேகம் = எதிர்த்திசையில் மாற்றப்பட்ட இரட்டிக்கப்பட்டவேகம், காற்றின் உண்மை வேகம் ஆகியவற்றின் விளைவு

$$= \vec{EO} + \vec{ON}$$

$$= \vec{EN}$$

இத் தோற்ற வேகமானது வடகிழக்கிலிருந்து வீசுவதால் $\angle AEN = 45°$.

$$\triangle OAN \equiv \triangle EAN$$

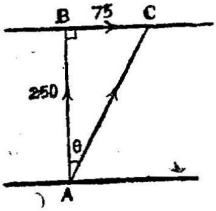
$$\therefore \quad \angle AON = 45°$$

$$\therefore ON = OA \text{ Sec } 45° = 4\sqrt{2}.$$

ஆகவே, காற்று வடகிழக்குத் திசையில் $4\sqrt{2}$ கி.மீ./மணி வேகத்தில் வீசுகிறது.

மாதிரி 6. ஒரு மனிதன் $\frac{1}{4}$ கி மீட்டர் அகலமுள்ள ஒரு ஆற்றின் நேர்குறுக்காக 8 கி.மீ./மணி வேகத்தில் தனது படகைச் செலுத்துகிறான். அவன் புறப்பட்ட இடத்திற்கு எதிர் புள்ளியிலிருந்து ஆற்றேடு 75 மீட்டர் தூரத்தில் அக்கரையை அடைந்தால், ஆற்றுத் தண்ணீரின் வேகத்தைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு :



படம் 11.

A என்பது படகு புறப்பட்ட இடம்.

B என்பது அக்கரையில் Bக்கு எதிர்ப் புள்ளி.

$\therefore AB$ = ஆற்றின் அகலம் = $\frac{1}{4}$ கி.மீ. = 250 மீட்டர்.

C என்பது படகு அக்கரையை அடைந்த புள்ளி.

$\therefore BC$ = 75 மீட்டர்.

$\overrightarrow{AB}$ = படகின் வேகம் = 8 கி.மீ./மணி = u.

$\overrightarrow{BC}$ = ஆற்றின் வேகம் = v என்க.

$\overrightarrow{AC}$ = விளைவு வேகம் = V.

$\propto$ = படகின் வேகம், ஆற்றின் வேகம் ஆகியவற்றின் திசைகளுக்கிடையேயுள்ள கோணம் = 90°

θ என்பது படகின் திசையுடன் விளைவு வேகத்தில் திசையின் சாய்வு எனில்,

$$\tan\theta = \frac{v \text{ Sin} \propto}{u + v \cos\propto}$$

$$= \frac{v \text{ Sin } 90°}{8 + v \cos 90°}$$

$$= \frac{v}{8}$$

ஆனால், $\tan\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{75}{250} = \frac{3}{10}$

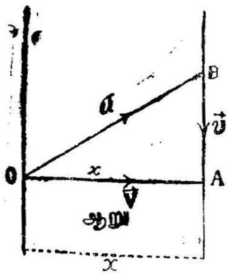
$$\therefore \frac{v}{8} = \frac{3}{10}$$

$$\therefore v = 2{\cdot}4$$

ஆற்றின் வேகம் = 2·4 கி.மீ./மணி.

மாதிரி 7. ஒரு மனிதன் ஒரு ஆற்றின் நேர்குறுக்காக நீந்திச் சென்று அக்கரையை அடைந்து, மீண்டும் நேர்குறுக்காக நீந்தி

புறப்பட்ட இடம் வந்து சேர t_1 நேரமாகிறது. அவற்றிற்குச் சமமான தூரம் ஆற்றோடு சென்று மீண்டும் ஆற்றை எதிர்த்துப் புறப்பட்ட இடம் வந்துசேர t_2 நேரமாகிறது. நிலையான நீரில் மனிதனின் நீச்சல் வேகம் u, ஆற்றின் வேகம் v எனில், $t_1 : t_2 = \sqrt{u^2 - v^2} : u$ என்று நிறுவுக.



படம் 12

தீர்வு: O என்பது ஆற்றின் ஒரு கரையில் மனிதன் புறப்பட்ட இடம்.

A என்பது அக்கரையில் Oக்கு நேர் எதிர்ப் புள்ளி.

Oவிலிருந்து புறப்படும் மனிதன் Aயை அடைய வேண்டுமாயின் அவன் OB என்னும் வேறொரு திசையில் நீந்த வேண்டும். எனவே, $\vec{OB}$ = மனிதனின் உண்மையான வேகம். $= \vec{u}$

$\vec{BA}$ = ஆற்றின் வேகம். $= \vec{v}$

$\vec{OA}$ = மனிதனின் விளைவு வேகம். $= V$ என்க.

இப்பொழுது, $OA^2 = OB^2 - BA^2$

$\therefore V^2 = u^2 - v^2$

அல்லது $V = \sqrt{u^2 - v^2}$.

ஆற்றின் அகலம் x என்க.

$\therefore$ Oஇலிருந்து புறப்பட்டு Aயை அடைய நேரம் $= \dfrac{x}{V}$

$$= \frac{x}{\sqrt{u^2 - v^2}}.$$

இதுபோல், Aயில் புறப்பட்டு O-ஐ அடைய நேரம் $\dfrac{x}{\sqrt{u^2 - v^2}}$

$\therefore$ Oவிலிருந்து புறப்பட்டு Aயை அடைந்து மீண்டும் O-வந்து சேர நேரம் $= \dfrac{2x}{\sqrt{u^2 - v^2}}$ t_1

ஆற்ருேடு மனிதனின் வேகம் $= (u + v)$

$\therefore$ ஆற்ருேடு x தூரம் செல்ல நேரம் $= \dfrac{x}{u + v}.$

ஆற்றை எதிர்த்து மனிதனின் வேகம் $(u - v)$

$\therefore$ ஆற்றை எதிர்த்து x தூரம் செல்ல நேரம் $= \dfrac{x}{u - v}.$

$\therefore$ ஆற்ருேடு x தூரம் சென்று திரும்பி வர நேரம் $= \dfrac{x}{u + v}$

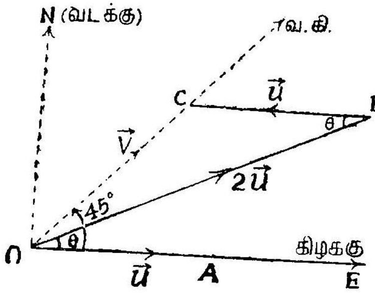
$$+ \frac{x}{u - v} = \frac{2\,ux}{u^2 - v^2}$$

அதாவது, $t_2 = \dfrac{2\,ux}{u^2 - v^2}.$

$$\therefore t_1 : t_2 = \frac{2x}{\sqrt{u^2 - v^2}} : \frac{2\,ux}{u^2 - v^2} = 1 : \frac{u}{\sqrt{u^2 - v^2}}$$

$= v^2 \quad \sqrt{u^2 - h^2} : u$

மாதிரி 8. நீராவிக் கப்பலொன்று கிழக்குத் திசை நோக்கி u கி மீ./மணி வேகத்தில் சென்றுகொண்டிருக்கிறது. மற்ருெரு நீராவிக் கப்பல் கிழக்குத் திசையுடன் வடக்காக θ கோணச் சாய்வில் $2u$ கி.மீ./மணி வேகத்தில் சென்று கொண்டிருக்கிறது. முதல் கப்பலிலிருந்து பார்க்கும் ஒரு மனிதனுக்கு இரண்டாவது கப்பல் வடகிழக்குத் திசையில் சென்று கொண்டிருப்பதாகத் தோற்றினுல், $\theta = \frac{1}{2}\,\mathrm{Sin}^{-1}\,\frac{3}{4}$ என்று நிறுவுக.



படம் 13

தீர்வு:

$\overrightarrow{OA}$ = கிழக்குத் திசையில் முதல் கப்பலின் வேகம் $= \overrightarrow{u}$

$\overrightarrow{OB}$ = இரண்டாவது கப்பலின் வேகம் $= 2\,\overrightarrow{u}$

$\hat{AOB} = \theta$ (தரப்பட்டுள்ளது)

$\vec{OC}$ = வடகிழக்குத் திசையில் இரண்டாவது கப்பலின் தோற்றும் வேகம் = $\vec{V}$ என்க.

Bயிலிருந்து OAக்கு இணையாக எதிர்த்திசையில் $\vec{BC} = \vec{AO}$ வரைக. இது OCயை Cயில் சந்திக்கட்டும்.

$\vec{OC} = \vec{OB} + \vec{BC}$ $\vec{2u} - \vec{u}$ = முதல் கப்பலின் வேகம் + இரண்டாம் கப்பலின் எதிர்த்திசை வேகம்

= இரண்டாம் கப்பலின் சார்வேகம்.

$\triangle OBC$யில், $B\hat{O}C = (45°—\theta)$; $O\hat{B}C = \theta$;

$O\hat{C}B = 135°$.

$$\therefore \frac{BC}{\text{Sin } (45°—\theta)} = \frac{OB}{\text{Sin } 135°}$$

$$\frac{u}{\text{Sin } (45_o—\theta)} = \frac{2u}{\text{Sin } 45°}$$

$$\therefore 2 \sin (45°—\theta) = \sin 45°$$

$$2 (\sin 45° \cos\theta - \cos 45° \sin \theta) = \sin 45°$$

$$2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$2 (\cos \theta - \sin \theta) = 1$$

$$\cos - \sin \theta = \tfrac{1}{2}$$

$$\therefore (\cos \theta - \sin \theta)^2 = \tfrac{1}{4}$$

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta—2 \sin\theta \cos \theta = \tfrac{1}{4}$$

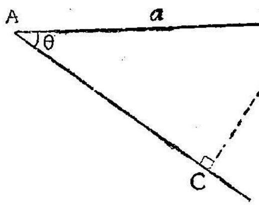
$$1 - \sin 2 = \tfrac{1}{4}$$

$$\sin 2\theta = 1 - \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4}$$

$$2 \theta = \sin^{-1} (\tfrac{3}{4})$$

$$\theta = \tfrac{1}{2} \sin^{-1} (\tfrac{3}{4})$$

மாதிரி 9 ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில் இரு நகரும் புள்ளிகளுக்கிடையேயுள்ள தூரம் a; அவற்றின் சார்வேகம் V; தூரம் a அளவிடப்படும் திசையிலும், அதற்குச் செங்குத்தான திசையிலும் இச்சார்வேகத்தின் பிரிவுகள் முறையே u, v ஆகும். அவ்விரு புள்ளிகளும் மிக அருகிலிருக்கும்போது அவற்றிற்கிடையேயுள்ள தூரம் av/V என்றும், இவ்வாறு மிக அருகாமையில் வருவதற்கு ஆகும் நேரம் au/V^2 என்றும் காட்டுக.



படம் 14

தீர்வு : A, B என்பன குறிப்பிட்ட நேரத்தில் புள்ளிகளின் நிலைகள். $\therefore AB = a$. AC என்பது Bயைப் பொறுத்து Aயின் சார்வேகப் பாதை. θ என்பது ABயுடன் இச்சார்வேகப் பாதையின் சாய்வு. V என்பது சார்வேகம்.

Bயிலிருந்து பார்க்கும்போது A-ஆனது AC திசையில் V வேகத்துடன் செல்லுவதாகத் தோற்றும்.

$u = AB$ திசையில் V-யின் பிரிவு $= V\cos\theta$.

$v = AB$க்குச் செங்குத்துத் திசையில் V-யின் பிரிவு $= V\sin\theta$.

$BC \perp AC$ வரைக. A ஆனது Cயிலிருக்கும்போது, இரு புள்ளிகளுக்குமிடையேயுள்ள தூரம் மிகக் குறைவாகயிருக்கும்.

இரு புள்ளிகளுக்குமிடையேயுள்ள மிகக் குறைந்த தூரம்

$$= BC$$

$$= AB\sin\theta.$$

$$= a\left(\frac{v}{V}\right)$$

$$= \frac{av}{V}$$

மிகக் குறைந்த தூர நிலையை அடையும் நேரம் $= V$ சார்வேகத்துடன் AC தூரத்தை A கடந்து செல்ல ஆகும் நேரம்

$$= \frac{AC}{V}$$

$$= \frac{a \cos \theta}{V}$$

$$= \frac{a\,(u/V)}{V}$$

$$= \frac{a\,u}{V^8}$$

பயிற்சி 1

1. 45 கி. மீ. /மணி வேகத்தில் சென்று கொண்டிருக்கும் தொடர் வண்டி அதற்கு இணையான மற்றொரு பாதையில் 33 கி.மீ./மணி வேகத்தில் அதே திசையில் சென்று கொண்டிருக்கும் 60 மீட்டர் நீளத் தொடர் வண்டியை $\frac{1}{2}$ நிமிடத்தில் கடந்து சென்றால் முதல் வண்டியின் நீளமென்ன ?

2. ஒரு சமபக்கமுக்கோணத்தின் ஒரு முகவரிசையிலெடுக்கப்பட்ட பக்கங்களின் வழியே செயல்படுகின்ற 1 மீட்./வி., 2 மீட்./வி., 3 மீட்./வி. என்னும் மூன்று திசைவேகங்களை ஒரு துகள் ஒருங்கே பெற்றிருக்கிறது. விளைவுத்திசை வேகத்தின் அளவு, திசை ஆகியவற்றைக் காண்க.

3. ஒரு துகள் கிழக்குத் திசையில் 1 மீட்./வி. என்னும் திசைவேகம், வடக்குத் திசையில் $\sqrt{3}$ மீட்./வி. என்னும் திசை வேகம் ஆகியவற்றுடன் ஒருங்கே இயங்கிக் கொண்டிருக்கிறது. அத்துகள் ஓய்வு நிலைக்குக் கொண்டு வரப்பட வேண்டுமாயின் இவ்விரு திசை வேகங்களுடன் கூட்டப்பட வேண்டிய திசை வேகம் யாது ?

4. v, u என்னுமிரு திசைவேகங்கள், அவற்றின் விளைவுத் திசைவேகம் u ஆக யிருக்குமாறு இரு திசைகளில் செயல்படுகின்றன. u இரட்டிக்கப்பட்டால், $2u$, v ஆகியவற்றின் விளைவுத் திசைவேகம், திசைவேகம் vக்குச் செங்குத்தாயிருக்கு மென்று காட்டுக.

5. ஒருதுகள் இரு திசைகளிலுள்ள சம அளவுத் திசை வேகங்களுடன் ஒருங்கே இயங்கிக் கொண்டிருக்கிறது. ஒரு திசை வேகம் அளவில் பாதியாக்கப்பட்டால், அடுத்த திசை வேகத்துடன் விளைவுத்திசை வேகம் கொண்டுள்ள சாய்வுக் கோணமும் பாதியாகிறது. இரு திசை வேகங்களுக்கிடையேயுள்ள கோணத்தைக் காண்க.

6. u, v என்னும் இரு திசை வேகங்களின் விளைவு $v/2$; இவ்விளைவுத் திசை வேகம் u-வின் திசைக்குச் செங்குத்தாக வுள்ளது. u-இன் திசையையும் $v:u$ விகிதத்தையும் காண்க.

7. ஒரு தொடர் வண்டி 15 மைல்/மணி வேகத்தில் சென்று கொண்டிருக்கிறது. அவ்வண்டியிலிருக்கும் ஒரு பயணி வண்டியின் இயக்குத் திசைக்குச் செங்குத்தாக 11 அடி/வி: வேகத்துடன் ஒரு பொருளை வெளியில் எறிகிருன். தரையைப் பொறுத்து அப்பொருள் வேகத்தைக் காண்க.

8. ஒரு உந்து வண்டி வடக்கு நோக்கி 15 மைல்/மணி வேகத்தில் ஓடிக்கொண்டிருக்கிறது. சாலைக்குக் கிழக்கே சாலை யிலிருந்து 10 அடி தூரத்தில் நின்று கொண்டிருக்கும் ஒரு மனிதன் வண்டியின் மீது ஒரு கல்லை வீசி எறிகிருன். கல்லானது வண்டியைத் தாக்க ஒரு விஞடி நேரம் பிடித்தது. கல்லை வீசும் போது வண்டி அவனுக்கு நேராக இருந்தால் கல் வீசப்பட்ட திசையினைக் காண்க.

9. ஒரு மனிதன் கால் மைல் அகலமுள்ள ஓர் ஆற்றின் குறுக்கே 8மைல்/மணி வேகத்துடன் ஒரு படகைச் செலுத்து கிருன். அவன் புறப்பட்ட இடத்திற்கு நேர் எதிர்ப்புள்ளி யிலிருந்து ஆற்ருேடு 33 கெஜ தூரத்தில் ஆற்றின் மறுக்கரை யை அடைந்தால் ஆற்றின் வேகத்தைக் காண்க.

10. 2மைல் மணி/வேகத்துடன் சென்று கொண்டிருக்கும் ஒரு ஆற்றின் குறுக்கே 4மைல்/மணி வேகத்துடன் ஒரு படகு செலுத்தப் படுகிறது. ஆற்றின் அகலம் 400 அடியெனில், ஆற்ருேடு எவ்வளவு தூரம் தள்ளி படகு மறுகரையை அடையும்.

11. நிலையான நீரில் $\frac{5}{2}$ மைல்/மணி வேகத்துடன் செல்லக் கூடிய ஒரு படகு, $\frac{3}{2}$ மைல்/மணி வேகத்துடன் ஓடிக்கொண்டி ருக்கும் $\frac{1}{2}$ மைல் அகல ஆற்றைக் கடக்கிறது. ஆற்றை மிகக் குறுகிய பாதையில் கடக்கக் கூடிய நேரத்தையும், ஆற்றைக் கடக்கக் கூடிய மிகக்குறுகிய கால அளவையும் கணக்கிடுக.

12. நிலையான நீரில் மனிதன் 25மீட்./நிமி. வேகத்துடன் நீந்தமுடியும். 15மீட்./நிமி. வேகத்தில் ஓடிக்கொண்டிருக்கும் 100 மீட்டர் அகலமுள்ள ஒரு நீரோடையை அந்த மனிதன் மிகக்குறுகிய பாதையின் வழியாகக் கடந்து செல்ல ஆகும் நேரம் ; ஆற்றைக் கடக்கக்கூடிய நேரம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

13. 2 கி.மீ./மணி வேகத்தில் ஓடிக்கொண்டிருக்கும் ஒரு ஆற்றின் குறுக்கே, நீரோட்டத்திற்கு செங்குத்தாக 5 கி.மீ./மணி வேகத்துடன் ஒரு படகு ஆற்றைக்கடக்க முயன்று கொண்டிருக்கிறது. படகு செல்லக் கூடிய வேகத்தையும் திசையையும் காண்க. ஆற்றின் அகலம் 250 மீட்டர்களெனில் படகு சென்றுள்ள இயல்பான தூரத்தைக் காண்க.

14. ஒரு மனிதன் ஒரு ஆற்றை நேர் குறுக்காக t_1 நேரத்தில் கடக்கிருன். ஆற்ருேடு ஆற்றின் அகலத்திற்குச் சமமான தூரத்தை t_2 நேரத்தில் நீந்துகிருன். நிலையான நீரில் மனிதன் வேகம் u ; ஆற்றின் வேகம் v எனில்

$$t_1 : t_2 = \sqrt{u+v} : \sqrt{u-v}$$

என்று காட்டு.

15. ஒரு மனிதன் s மீட்டர்கள் அகலமுள்ள ஒரு ஓடையை அதன் குறுக்காக நீர் நிலையாக யிருக்கும்போது t நிமிடங்களிலும் நிரோட்டத்துடனிருக்கும் போது t^1 நிமிடங்களிலும் கடந்து செல்கிருன். நீரோட்டத்தின் வேகம்

$$s \sqrt{\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^{1\,2}}} \text{ மீட்./நிமி.}$$

என்று காட்டுக.

16. ஒரு மனிதன் ஓர் ஆற்றை நேர்குறுக்காக t_1 நேரத்தில் நீந்திக் கடக்கிருன் ; ஆற்ருேடு சம அளவு தூரத்தை t_2 நேரத்தில் நீந்திச் செல்லுகிருன். நிலையான நீரில் அவனுடைய நீச்சல் வேகத்திற்கும் ஆற்றின் வேகத்திற்குமுள்ள விகிதம் $t_1^2 \times t_2^2 : t_1^2 - t_2^2$ என்று காட்டு.

17. ஒரு மனிதன் 4 கி.மீ./மணி வேகத்தில் நடந்து சென்று கொண்டிருக்கிருன். அப்பொழுது மழை $1\frac{3}{4}$ கி.மீ./மணி வேகத்தில் நிலக்குத்தாக கீழ் நோக்கிப் பெய்து கொண்டிருக்கிறது. மழையில் நனையாமலிருக்க அவன் எந்தத் திசையில் தனது குடையைப் பிடிக்க வேண்டும்?

18. ஒரு மனிதன் 4 கி.மீ./மணி வேகத்தில் சாலையில் நடந்து சென்று கொண்டிருக்கும்போது அவனுக்கு முன் புறம் நிலக்குத்துடன் 30° சாய்வில் மழை 3 கி.மீ./மணி வேகத்தில்

பெய்து கொண்டிருந்தது. மழையில் நனையாமலிருக்க அவன் தனது குடையை எந்தத் திசையில் பிடிக்க வேண்டும்?

(மதுரை 1971 ஏப்.)

19. மணிக்கு 6 கி.மீட். வேகத்தில் ஓடிக்கொண்டிருக்கும் ஒரு மனிதனுக்கு மழை நிலைக்குத்தாகப் பெய்து கொண்டிருப்பதாகத் தோன்றுகிறது. மழைத்துளிகளின் வேகம் 12 கி.மீ./மணி எனில் மழையின் உண்மையான தியையைக் காண்க. அந்த மனிதன் தனது வேகத்தை இரட்டிப்பாக்கினால் மழை எந்தத் திசையிலிருந்து பெய்வதாகத் தோன்றும்?

20. மணிக்கு 10 கி.மீ. வேகத்தில் நிலைக்குத்தாகப் பெய்துகொண்டிருக்கும் மழையில் ஒரு மனிதன் 5 கி.மீ./மணி வேகத்தில் ஓடிக்கொண்டிருக்கிறன். நிலைக்குத்துடன் மழை பெய்வதாகத் தொற்றும் திசையின் கோணம் θ எனில் $2\ tas\ \theta = 1$ என்று நிறுவுக.

21. மேற்குத் திசையில் 10 க.மீ./மணி வேகத்தில் ஓடிக் கொண்டிருக்கும் ஒரு மனிதனுக்குக் காற்று வடமேற்குத் திசையிலிருந்து வீசுவதாகத் தோன்றுகிறது. ஆனல் தெற்கில் 5 கி.மீ./மணி வேகத்தில் நடந்து கொண்டிருக்கும் மற்ருெரு மனிதனுக்குக் காற்று கிழக்குத் திசையிலிருந்து வீசுவதாகத் தோன்றுகிறது. காற்றின் உண்மையான திசைவேதத்தையும், திசையையும் காண்க.

22. வடகிழக்கு நோக்கிச் செல்லும் ஒருவருக்குக் காற்று வளக்கிலிருந்து வீசுவதாகத் தெரிகிறது. அவர் வேகத்தை இரட்டிப்பாக்கும்போது காற்று வடக்குடன் கிழக்குத்திசையில் $cot^{-1}{}_2$ என்னும் கோனத்தை அமைக்கும் திசையிலிருந்து வீசுவதாகத் தோன்றுகிறது, காற்றின் உண்மையான திசைவேகத்தையும், திசையையும் காண்க.

(மதுரை 1973 ஏப்.)

23. வடகிழக்கு நோக்கிச் செல்லும் ஒருவருக்குக் காற்று வடக்கிலிருந்து வீசுவதாகத் தெரிகிறது. அவர் வேகத்தை இரட்டிப்பாக்கும்போது காற்று வடக்குடன் கிழக்குத் திசையில் $cot^{-1}{}_3$ என்னும் கோணத்தை அமைக்கும் திசையிலிருந்து வீசுவதாகத் தோன்றுகிறது. காற்றின் உண்மையான திசையைக் காண்பதோடு அவருடைய வேகத்தைக் காற்றின் வேகத்துடன் ஒப்பிடுக.

24. ஒரு கப்பல் மேற்கு நோக்கிப் போய்க் கொண்டிருக்கிறது. அதன் பாய்மரத்திலுள்ள கொடி பறக்கும் விதத்திலிருந்து காற்று வடக்கிலிருந்து வீசுவதாகத் தோன்றுகிறது. ஆனால் காற்று வடக்குடன் 30° கிழக்கிலிருந்து வீசுவதாகத் தெரியுமெனில், காற்றின் வேகம் கப்பலின் வேகத்தைப் போல் இரு மடங்கு என்று காட்டுக.

25. தெற்கு நோக்கி 5 கி.மீ./மணி வேகத்தில் சென்று கொண்டிருக்கும் ஒருவர் காற்று மேற்கிலிருந்து வீசுவதாகக் கவனிக்கிறார். காற்றின் தோற்று வேகம் 4 கி.மீ./மணி எனில், அவர் தனது வேகத்தை 8 கி.மீ./மணி என்று மாற்றும்போது காற்று எந்தத் திசையிலிருந்து வீசுவதாகத் தோன்றும்? அப்போது காற்றின் தோற்று வேகம் என்னவாயிருக்கும்?

26. கிழக்கு நோக்கிச் சென்று கொண்டிருக்கும் ஒருவன் காற்று நேரடியாக வடக்கிலிருந்து வீசுவதாக காண்கிறான். வேகத்தை இரு மடங்காக்கிய போது அது வடக்கிழக்கிலிருந்து வீசுவதாகக் காணப்படுகிறது. அவன் தனது வேகத்தை மும்மடங்காக்கினால் காற்று கிழக்குக்கு வடக்காக $tan\theta = \frac{1}{2}$ என்றவாறு அமைகின்ற θ என்னும் கோணச் சாய்விலிருந்து வீசு மென்று காட்டுக.

(சென்னை 1967ஏப்)

27. P என்பவன் கிழக்கு நோக்கி 3 கி.மீ./மணி என்ற வேகத்தில் போய்க் கொண்டிருக்கிறான். அவன் பார்வைக்கு Q என்பவன் தெற்கு நோக்கி 4 கி.மீ./மணி வேகத்தில் சென்று கொண்டிருப்பதாகத் தோற்றுகிறான். Q வின் உண்மையான திசை வேகத்தைக் காண்க.

28. A, B என்னும் இருகப்பல்கள் முறையே வடக்கு, கிழக்குத் திசைகளை நோக்கி மணிக்கு 12 கடல் மைல்கள், 16 கடல் மைல்கள் வேகங்களுடன் போய் கொண்டிருக்கின்றன. மதியத்தில் A யானது B யிலிருந்து 10 கடல்மைல்கள் தூரத்தில் கிழக்கேயுள்ளது. கப்பல்களிரண்டும் மிக அருகில் இருக்கும் நேரத்தைக் காண்க.

29. மணிக்கு 40 கி.மீ. வடக்கு நோக்கி சென்று கொண்டிருக்கும் ஒரு கப்பல் அதற்குக் கிழக்கே 20 கி. மீட்டர் தூரத்திலிருந்து 30 கி.மீ./மணி வேகத்தில் மேற்கு நோக்கி வந்து கொண்டிருக்கும் மற்றொரு கப்பலைக் கவனிக்கிறது. அவையிரண்டும் மிக அருகாமையில் எப்போது இருக்கும்?

30. இரண்டு சாலைகள் 60° கோணத்தில் சந்திக்கின்றன. இரண்டு சாலைகளிலும் இருவர் சமவேகங்களுடன் குறுங்கோண பக்கமிருந்து சந்திப்பை நோக்கி நடந்து செல்கின்றனர். ஒரு நேரத்தில் சந்திப்பிலிருந்து அவர்களின் தூரங்கள் 100 மீட்டர்கள், 200 மீட்டர்கள் என்று காணப்பட்டன. இருவரும் மிக அருகாமையில் இருக்கும் போது, சந்திப்பிலிருந்து எவ்வளவு தூரங்களிலிருக்கும்?

31. ஒன்றுக் கொன்று நேர்குத்தாகச் செல்லுமிரு சாலைகளில் A, B என்னுமிரு பேருந்துகள் முறையே 40 கி.மீ./மணி, 20 கி.மீ./மணி என்னும் வேகங்களில் சீராகப் போய்க் கொண்டிருக்கின்றன. A சந்திப்பை கடக்கும்போது B சந்திப்பை அடைய இன்னும் 60 கி. மீட்டர்கள் உள்ளன. அவை ஒன்றுக் கொன்று எப்போது மிக அருகாமையில் இருக்கும்? இரண்டுக்குமிடையேயுள்ள மிகக்குறுகிய தூரமென்ன?

32. ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில் ஒரு கப்பல் மற்றொன்றிக்கு மேற்கே 32 கி.மீ. தூரத்திலிருக்கிறது. முதல் கப்பல் வடக்கிழக்குத் திசையில் மணிக்கு 32 கி.மீ. வீதமும், இரண்டாவது வடமேற்கில் மணிக்கு 25.6 கி.மீ. வீதமும் போய்க் கொண்டிருக்கின்றன. அவைகளுக்கிடையேயுள்ள மிகக்குறுகிய தூரத்தைக் காண்க.

33. வடக்கு நோக்கி மணிக்கு 8 கடல்மைல்கள் வேகத்துடன் சென்று கொண்டிருக்கும் A என்னும் கப்பலிலிருந்து பார்க்கும் ஒருவருக்கு B என்னும் மற்றொரு கப்பல் மணிக்கு $6\sqrt{2}$ கடல் மைல்கள் வீதம் தென் மேற்குத் திசையில் சென்றுக் கொண்டிருப்பதாகத் தெரிகிறது. Bயின் உண்மையான திசைவேகத்தைக் காண்க. கப்பல் A ஆனது தனது வேகத்தை இரட்டித்தால் கப்பல் B எத்திசையில் போய்க் கொண்டிருப்பதாக அந்தப் பார்வையாளருக்குத் தோன்றும்?

34. ஒரு தொடர் வண்டி மணிக்கு 45 கி.மீ. வேகத்தில் போய்க்கொண்டிருக்கிறது. வண்டியிலிருந்து ஒரு பந்து சன்னல் வழியே வண்டியை பொறுத்து 30 மீ./வி. வேகத்தில் வண்டி சென்றுக் கொண்டிருக்கும் திசையுடன் 60° கோணத்தில் வீசியெறியப்படுகிறது. வீசியெறியப்படும்போது பந்தின் உண்மையான திசைவேகத்தைக் காண்க.

35. ஒரு நீராவிக் கப்பல் கிழக்கு நோக்கி u திசை வேகத்துடன் போய் கொண்டிருக்கிறது. கிழக்குக்கு வடக்காக θ

கோணத்திசையில் $2u$ திசை வேகத்துடன் சென்றுக் கொண்டிருக்கும் மற்றொரு நீராவிக்கப்பல் முதல் நீராவிக் கம்பலிலிருந்து பார்க்கும் ஒருவருக்கு வடக்கிழக்காகச் சென்று கொண்டிருப்பதாகத் தோன்றுகிறது. $4 \sin 2\theta = 3$ என்று நிறுவுக.

நேர்கோட்டியக்கம் (Motion in a Straight Line)

நாம் இப்பொழுது ஒரு நேர்கோட்டின் மேல் நகரும் ஒரு துகளின் இயக்கம்பற்றி ஆராய்வோம். ஒரு நேர்கோட்டை இயக்கப்பாலதையாகக் கொண்டு நகரும் துகளின் இயக்கம் ''நேர் கோட்டியக்கம்'' எனப்படும். ஒரு துகளின் நேர் கோட்டியக்கம் சீரான வேகம், சீரான முடுக்கம், மாறுவேகம், மாறு முடுக்கம் ஆகிய இவற்றுள் எத்தகையினதாகவுமிருக்கலாம். இவற்றுள் சீரான முடுக்கத்துடன் இயங்கிக் கொண்டிருக்கும் ஒரு துகளின் நேர்கோட்டியக்கம் பற்றி இங்கு ஆராய்வோம். இத்தகைய ஆய்வுக்குப் பயன்படக்கூடிய சமன்பாடுகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன. இச்சமன்பாடுகள் ''இயக்கச் சமன்பாடுகள்'' என்றழைக்கப்படுகின்றன. இவ் வியக்கச் சமன்பாடுகளின் மூலம் நேர்கோட்டியக்கத்திலிருக்கும் ஒரு துகளின் திசைவேகம், முடுக்கம், குறிப்பிட்ட நேரத்தில் அத்துகள் சென்றுள்ள தூரம், ஒரு குறிப்பிட்ட தூரத்தைக் கடக்க அத்துகள் எடுத்துக் கொள்ளும் நேரம் ஆகிய இது போன்ற எல்லா விவரங்களையும் கண்டறியலாம்.

இயக்கச் சமன்பாடுகள் (Equation of Motion)

P என்னும் ஒரு துகள் ஒரு நேர்கோட்டின்மேல் O என்னும் நிலையான புள்ளியிலிருந்து u என்னும் தொடக்கத் திசை வேகத்துடனும், f என்னும் முடுக்கத்துடனும் நகர்ந்து கொண்டிருப்பதாகக் கொள்வோம். புறப்பட்டதிலிருந்து t நேரத்தில் அத்துகள் O-விலிருந்து s தூரத்தில் இருப்பதாகவும், அப்போது அதன் வேகம் v என்றால்

$$v = \frac{ds}{dt}, f = \frac{d^2s}{dt^2}$$

என்று நாமறிவோம்.

அதாவது, $\frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2s}{dt^2} = f.$

தொகையீடு காணின்,

$\frac{ds}{dt} = ft + C$, C என்பது தொகையீட்டு மாறிலி.

தொடக்கத்தில் $t = O$, $\frac{ds}{dt} = u \therefore C = u$.

$$\therefore \frac{ds}{dt} = ft + u.$$

ஆனால், $\frac{ds}{dt}$ என்பது நேரம் tயில் துகளின் திசைவேக மாதலின்,

$\frac{ds}{dt} = v$

$$\therefore v = u + ft. \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

இப்பொழுது $\frac{ds}{dt} = u + ft$ என்ற தொடர்பை t-யைப் பொறுத்துத் தொகையீடு செய்யின்,

$s = ut + \frac{1}{2} ft^2 + k$, k என்பது தொகையீட்டு மாறிலி.

தொடக்கத்தில் $t = o, s = o \quad \therefore k = o.$

$$\therefore s = ut + \frac{1}{2} ft^2 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

இப்பொழுது, $\frac{ds}{dt} = v$, $\frac{dv}{dt} = f$ ஆகையால்,

$$= \frac{dv}{ds} = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dv}{ds} = \frac{dv}{dt} =$$

$$\therefore v\,dv = fds$$

தொகையீடு காணின், $\frac{v^2}{2} = fs + K$, K தொகையீட்டு மாறிலி.

தொடக்கத்தில் $t = o, v = u, s = o \quad \therefore K = \frac{u^2}{2}$.

$$\therefore \frac{v^2}{2} = fs + \frac{u^2}{2}$$

அல்லது $v^2 = u^2 + 2fs \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (3)$

(1), (2), (3) ஆகிய சமன்பாடுகள் ''இயக்கச் சமன்பாடுகள்'' என்றழைக்கப்படுகின்றன.

குறிப்பு 1. துகளின் முடுக்கம் a என்றுகொண்டால், இவ்வி யக்கச் சமன்பாடுகள் முறையே

$$v = u + at,$$

$$s = ut + \frac{1}{2} at^2,$$

$$u^2 = u^2 + 2as$$

என்று மாறுகின்றன.

குறிப்பு 2. துகளானது a என்னும் எதிர் முடுக்கத்துடன் (Retardation) இயங்கிக் கொண்டிருந்தால், இவ்வியக்கச் சமன் பாடுகள்

$$v = u - at,$$

$$s = ut - \tfrac{1}{2}at^2$$

$$v^2 = u^2 - 2as$$

என்று மாறும்.

குறிப்பு 3. துகளானது ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டால், $u = 0$ ஆகும் எனவே, இயக்கச் சமன்பாடுகள் முறையே, $v = at$, $s = \frac{1}{2}at^2$, $v^2 = 2as$ என்னும் வடிவங்களைப் பெறு கின்றன.

கீழே விழும் பொருட்களின் முடக்கம் (Acceleration of falling bodies)

கி.பி. 1590 ஆம் ஆண்டில் கலீலியோ (Calileo) என்னும் அறிஞர், வெற்றிடத்தில் பூமியின் மேற்பரப்பின் மேலேயிருந்து கீழே விழுமாறு விடப்பட்ட பொருட்கள் யாவும் பூமியை நோக்கி மாரு முடுக்கத்துடன் விழுவதாகப் பரிசோதனைகள் மூலம் செய்து காட்டினர். இந்த முடுக்கத்திற்குக் காரணம் பொருட் களை தன் வசமிழுக்கும் பூமியின் ஈர்ப்பு சக்தியேயாகுமென்றும் வலியுறுத்தினர். இவ்வாறு புவியீர்ப்புச் சக்தியின் காரணமாக, கீழே விழும் பொருட்களின் இயக்கத்திலேற்படுகின்ற முடுக்கத் திற்கு ''ஈர்ப்பு முடுக்கம்'' (Acceleration due to Gravity) என்று பெயர். இப்புவியீர்ப்பு முடுக்கம் g என்னும் எழுத்தினல் குறிப் பிடப்படுகின்றது. பூமியின் மேற்பரப்பில் இப்புவியீர்ப்பு முடுக்கம் ஓரே இடத்தில் எல்லா பொருட்களுக்கும் ஒரு மாறிலி யாகயிருந்தபோதிலும், இடத்திற்கு இடம் சிறிதளவு மாறுபடுவ தாகவும் காணப்பட்டுள்ளது. அதன் மதிப்பு பூமியின் மேற்பரப்பி லுள்ள இடத்திலிருந்து பூமியின் மையத்திற்குள்ள தூரத்தைப் பொறுத்ததாகயிருக்குமென்றும் காணப்பட்டுள்ளது. பூமியானது சரியான கோளமாக இல்லாததால், அதன் ஆரை இடத்திற்கு இடம் சிறிதளவு மாறுபடுகிறது. அ-ரா-வி முறையில் ஈர்ப்பு முடுக்கத்தின் மதிப்புக்கள் பூமியின் மேற்பரப்பில் நில நடுக் கோட்டுப் பகுதிகளில் 32.091 அடி /(விநாடி)^2, என்றும், துருவப் பகுதிகளில் 32.252 அடி/விநாடி^{2} என்றும் கணக்கிடப் பட்டுள்ளன. செ-கி-வி முறையில் இம்மதிப்புக்கள் முறையே 978 செ.மீ./விநாடி)^2, 983 செ.மீ /(விநாடி)^2 ஆகும். ஆயினும் சாதரணக் கணக்கீடுகளுக்கு g யின் மதிப்புக்கள் அ-ரா-வி

முறையில் 32 அடி/(விநாடி)^2 என்றும், செ-கி-வி முறையில் 981 செ.மீ./(விநாடி)^2 என்றும் கொள்ளப்படுகின்றன.

ஈர்ப்பு சக்தியின் கீழ் நிலைக்குத்து இயக்கம் (vertical motion under gravity)

ஈர்ப்புவிசையின் செயற்பாட்டிற்கு மட்டிலுமுட்பட்டு ஒரு நிலைக்குத்துக் கோட்டின் மேல் இயக்கத்திலிருக்கும் ஒரு துகள் அது மேல் நோக்கி அல்லது கீழ் நோக்கிச் செல்வதற்கிணங்க முறையே -g அல்லது +g என்ற சீரான முடுக்கம் கொண்டதாயிருக்கும்.

ஒரு உயரமான இடத்திலிருந்து ஒரு பொருள் நிலைக்குத்தாகக் கீழ் நோக்கி u என்னும் தொடக்கத்திசை வேகத்துடன் எறியப்படுவதாகக் கொள்வோம். t நேரத்தில் அப்பொருள் புறப்பட்ட இடத்திலிருந்து s தூரத்தில் v என்னும் திசைவேகத்துடன் கீழ் நோக்கிச் சென்று கொண்டிருந்தால், அதன் இயக்கச் சமன்பாடுகள்

$$v = u + gt, \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$s = ut + \tfrac{1}{2} gt^2, \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$$v^2 = u^2 + 2gs \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

ஆகும். மாறாக, அப்பொருளானது கீழேயிருந்து நிலைக்குத்தாக மேல் நோக்கி அதே திசை வேகத்துடன் வீசப்பட்டால் அதன் இயக்கச் சமன்பாடுகள்

$$v = u - gt, \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

$$s = ut - gt^2, \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (5)$$

$$v^2 = u^2 - 2gs \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6)$$

ஆகும்.

குறிப்பு: சமன்பாடு (4) இலிருந்து, $v = 0$ எனில் $\frac{u}{g}$ என்று காண்கிறோம். அதாவது, தொடக்கத்திசைவேகம் u-வுடன் நிலைக்குத்தாக மேல் நோக்கி எறியப்படும் ஒரு பொருள் $\frac{u}{g}$ நேரத்திற்கு மேல் நோக்கிச் சென்று அதன் பின்னர் கீழ் நோக்கி விழத்தொடங்குகிறதென்று காண்கிறோம். மேலும், பொருள்

புறப்பட்ட இடத்திலிருந்து மிக அதிக உயரத்திலிருங்கும்போது அதன் மேல் நோக்கிய வேகம் மறைந்துவிடுமாகையால், சமன்பாடு (6) இலிருந்து $v = 0$ என்று பிரதியிட்டு, பொருள் அடைகின்ற மிக அதிக உயரம் $\frac{u^2}{2g}$ என்று காணலாம்.

சமன்பாடு (5) இலிருந்து, பொருள் புறப்பட்ட இடத்திலிருந்து s உயரத்தை அடைய பொருள் எடுத்துக் கொள்ளும் நேரத்தைக் காணலாம். ஆனால் இது ஒரு இருபடிச் சமன்பாடாகையால் t க்கு இரு மதிப்புகள் கிடைக்கும். அவற்றுள் குறைந்த மதிப்பு பொருள் மேல் நோக்கிச் செல்லும்போது s உயரத்தை அடைவதற்கான நேரத்தையும், உயர்ந்த மதிப்பு பொருள் கீழ் நோக்கி விழும்போது அதே உயரத்நை அடைவதற்கான நேரத்தையும் கொடுக்கின்றன.

சமன்பாடு (6) இலிருந்து v இன் இரு சமமான ஆனால் எதிர் அடையாளமுடைய மதிப்புக்களைப் பெறலாம். அதாவது பொருளானது தனது மேல் நோக்கிய பாதையில் ஒரு இடத்தை அடையும்போது பெறுகின்ற திசைவேகமும், தனது கீழ் நோக்கிய பாதையில் அதே இடத்தையடையும்போது பெறுகின்ற திசை வேகமும் அளவில் சமமாகவும், திசையில் மாறுபட்டுமிருக்குமென்று காணலாம். எனவே, பொருள் கீழே விழும் போது கொண்டுள்ள இயக்கத்தின் தலை கீழ் இயக்கமாகும்.

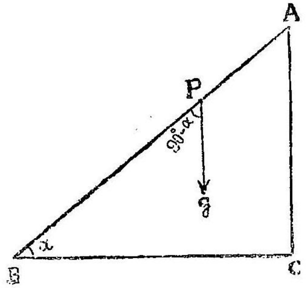
நிலைகுத்தாகக் கீழ் நோக்கி விழும் பொருட்கள்

பூமியின் மேற்பரப்பிலிருந்து மேல் h உயரத்திலிருந்து ஒரு பொருள் கீழே விழுமாறு விடப்படுவதாகக் கொள்வோம். பொருளானது தொடக்கத்தில் ஓய்வு நிலையிலிருந்து புறப்படுவதால் $u = 0$ ஆகும். கீழ்நோக்கி விழுவதால் $a = g$ ஆகும். எனவே, இயக்கச் சமன்பாடுகள் வருமாறு :

$$v = gt, \quad s = \tfrac{1}{2} gt^2, \quad v^2 = 2gs.$$

எனவே, பொருள் தரையில் வந்து விழும்போது அதன் திசை வேகம் $v \sqrt{2gh}$ ஆகும். மேலும், $h = \frac{1}{2} gt^2$ ஆகையால், பொருள் தரையில் வந்து விழும்போது நேரம் $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ ஆகும்.

வழவழப்பான சாய்தளத்தில் கீழ்நோக்கிய இயக்கம்.



படம் 15

AB என்பது கிடைத்தளத்துடன் α கோணச் சாய்விலுள்ள ஒரு சாய்தளம். P என்னும் ஒரு பொருள் ஈர்ப்பு விசையின் கீழ் கீழ்நோக்கி நழுவிச் செல்கிறது. அப்பொருள்மீது செயல்படும் கீழ்நோக்கிய நிலைக் குத்து முடுக்கம் g ஆனது, சாய்தளத்தின் வழியே $g \sin \alpha$ என்றும், சாய்தளத்திற்குச் செங்குத்தாக $g \cos \alpha$ என்றும் முடுக்கப் பிரிவுகளாகப் பிரிக்கப்படலாம்.

சாய்தளத்திற்குச் செங்குத்தாக இயக்க மெதுவுமில்லையாகையால், பொருளானது சாய்தளத்தின் வழியே கீழ்நோக்கி $g \sin \alpha$ முடுக்கத்துடன் நழுவிச் செல்லும். சாய்தளத்தின் நீளம் $AB=$ எனில், A-யிலிருந்து நழுவத் தொடங்கி B-யில் வந்து சேரும் போது பொருளின் திசைவேகம் v ஆனது,

$$v^2 = u^2 + 2as$$

என்னும் இயக்கச் சமன்பாட்டில், $u = o$, $a = g \sin$, $s = l$ என்று பிரதியிட்டுப் பெறப்படுகிறது.

அதாவது, $v^2 = 2g \sin \alpha\ l = 2g.\ \ l \sin \alpha = 2g.\ \ AB \sin \alpha$

$$= 2g.\ AC.$$
$$\therefore v = \sqrt{2g.\ AC}$$

இம்மதிப்பு α-ஐச் சாராமலிருப்பதால், ஒரு சாய்தளத்தில் ஈர்ப்பு விசையின்கீழ் நழுவிச் செல்லும் ஒரு பொருள் தளத்தின் அடியை அடையும்போது பெறுகின்ற திசைவேகம் அச் சாய் தளத்தின் சாய்வுக் கோணத்தைச் சாராமலிருக்குமென்பதோடு, சாய்தளத்தின் உயரத்தைச் சார்ந்ததாகயிருக்குமென்று அறிந்து கொள்ளலாம்.

மேலும், A-யிலிருந்து விடப்படும் பொருள் நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கிப் புவியீர்ப்பு முடுக்கத்துடன் AC என்னும் தூரத்தைக் கடக்கும்போது அடைகின்ற திசைவேகம் v ஆனது $v^2 = u^2 + 2as$ என்ற இயக்கச் சமன்பாட்டில் $u = o$, $a = g$, $s = AC$ என்று பிரதியிட்டு $v = \sqrt{2g.AC}$ என்று பெறப்படும். மேற்கண்ட இரு திசைவேகங்களும் சமமாயிருப்பதால்,

ஒரு சாய்தளத்தின் உச்சியிலிருந்து புவியீர்ப்பு விசையின் கீழ் நழுவிச் செல்லும் ஒரு பொருள் தளத்தின் அடியை அடையும்போது பெறுகின்ற வேகம், அச்சாய்தளத்தின் உச்சியிலிருந்து விடப்படும் பொருள் நிலைக்குத்தாகக் கீழ் நோக்கிப் புவியீர்ப்பு முடுக்கத்துடன் சாய்தளத்தின் உயரத்திற்குச் சமமான தூரத்தைக் கடக்கும்போது அடைகின்ற வேகத்திற்குச் சமமாகயிருக்குமென்று காண்கிறோம்.

ஆனால், சாய்தளத்தின் நீளத்திற்கு நழுவிச் செல்ல ஆகும் நேரம் அதன் உயரத்திற்குக் கீழே விழும் நேரத்திற்குச் சமமாயிராது என்பதைக் கவனிக்கவும்.

$AB = l$ என்னும் தூரத்தைச் சாய்தளத்தின் மேல் வழுக்கிச் செல்ல ஆகும் நேரம் t_1 என்க.

இங்கு u = தொடக்க வேகம் $= O$,

f = முடுக்கம் $= g \sin \propto$,

S = சாய்தளத்தின் நீளம் $= l$,

$t = t_1$.

இம்மதிப்புக்களை $S = ut + \frac{1}{2} ft^2$ என்னும் சமன்பாட்டில் பிரதியிடுக.

$$l = O + \tfrac{1}{2} g \sin \propto t_1^2$$

$$t_1^2 = \frac{2l}{g \sin \propto}$$

$$\therefore t_1 = \sqrt{\frac{2l}{g \sin \propto}}$$

இப்பொழுது சாய்தளத்தின் உச்சி Aயிலிருந்த விழச் செய்த பொருள் AC என்னும் நிலைக்குத்துத் தூரத்திற்கு விழ எடுத்துக் கொள்ளும் நேரம் t_2 என்க.

இங்கு u = தொடக்க வேகம் $= O$,

f = முடுக்கம் $= g$,

S = சாய்தளத்தின் உயரம் $= AC = AB \sin \propto = l \sin \propto$,

$t = t_2$.

இம் மதிப்புக்களை $S = ut + \frac{1}{2} ft^2$ என்னும் சமன்பாட்டில் பிரதியிடுக.

$$l \sin\alpha = O + \tfrac{1}{2} g t_2^2$$

$$\therefore t_2^2 = \frac{2l\sin\alpha}{g}$$

$$\therefore t_2 = \sqrt{\frac{2l\sin\alpha}{g}}$$

ஆகவே, $t_1 \neq t_2$ என்று காண்கிறோம்.

ஆனால், $\dfrac{t_1}{t_2} = \dfrac{\sqrt{\dfrac{2l}{g\sin\alpha}}}{\sqrt{\dfrac{2l\sin\alpha}{g}}}$

$$= \sqrt{\frac{2l}{g\sin\alpha} \times \frac{g}{2l\sin\alpha}}$$

$$= \frac{1}{\sin\alpha}$$

அதாவது, $t_1 : t_2 = 1 : \sin\alpha$

$AC = h$ எனில், $\sin\alpha \; \dfrac{h}{l}$

$$\therefore t_1 : t_2 = 1 : \frac{h}{l} = l : h$$

அதாவது, சாய்தளத்தின்மீது வழுக்கிச் செல்வதற்கும், சாய்தளத்தின் உயரத்திற்குக் கீழே விழுவதற்கும் ஆகும் நேரங்களின் விகிதங்கள் சாய்தளத்தின் நீளத்திற்கும், உயரத்திற்குமுள்ள விகிதத்திற்குச் சமமாகும்.

சாய்தளத்தின் மேன்முக இயக்கம்

சாய்தளத்தின் மேல் கீழுமாக வழுக்கும் பொருட்களின் கீழ்முக முடுக்கம் $g \sin\alpha$ என்று கண்டோம். எனவே, சாய்தளத்தின் மேன்முக முடுக்கம் $-g \sin\alpha$ ஆகும். எனவே, α கோணச் சாய்வுள்ள ஒரு சாய்தளத்தின் அடியிலிருந்து ஒரு பொருள் சாய்தளத்தின்மேல் மேன்முகமாக u திசை வேகத்துடன் எறியப்பட்டால், அது தளத்தின்மேல் செல்லக்கூடிய தூரம் S, இத் தூரத்தைக் கடப்பதற்கு ஆகும் நேரம் t ஆகியவற்றைப் பின்வருமாறு பெறலாம்.

u = தொடக்க வேகம் = u.

f = சாய்தளத்தின்மேல் மேன்முக முடுக்கம் = $-g \sin \alpha$

s = சாய்தளத்தின் மேல் செல்லும் தூரம் = .

t = S தூரத்தைக் கடக்க ஆகும் நேரம்.

v = s தூரத்தைக் கடந்ததும் பொருளின் வேகம் = O.
எனவே, $v^2 = u^2 + 2fs$ என்னும் சமன்பாட்டிலிருந்து,

$O = u^2 - 2g \sin \alpha$

அல்லது, $S = \dfrac{u^2}{2g \sin \alpha}$

மேலும், $v = u + ft$ என்னும் சமன்பாட்டிலிருந்து,

$O = u - g \sin t.$

அல்லது, $t = \dfrac{u}{g \sin \alpha}$

குறிப்பு: u என்னும் திசைவேகத்துடன் சாய்தளத்தின் மேல் மேன்முகமாக வீசப்பட்ட பொருள் சாய்தளத்தின் உச்சியை அடைந்தால், S சாய்தளத்தின் நீளம் = l

$\therefore l = \dfrac{u}{2g \sin \alpha}$

அல்லது, $l \sin \alpha = \dfrac{u^2}{2g}$

ஆனால், சாய்தளத்தின் உயரம் h எனில், $l \sin \alpha = h$.

$\therefore h = \dfrac{u^2}{2g}$

ஆனால் $\dfrac{u^2}{2g}$ என்பது u திசைவேகத்துடன் நிலைக்குத்தாக மேல் நோக்கி எறியப்பட்ட பொருள் செல்லக்கூடிய நிலைக்குத்து உயரமாகும். மேலும் u ஒரு மாறிலியாயின் h-ம் ஒரு மாறிலியாகும்; அதுமட்டுமன்று: h ஆனது சாய்தளத்தின் சாய்வுக் கோணத்தைச் சாராதிருப்பதைக் கவனிக்கவும்.

எனவே, வெவ்வேறு சாய்வுக் கோணங்களையுடைய சாய்தளங்களின்மேல் ஒரே தொடக்க வேகத்துடன் மேன்முகமாக வீசியெறியப்படும் பொருட்கள் செல்லக்கூடிய நிலைக்குத்துயரங்

கள் சமமாகயிருக்கும். இச் சமநிலேக்குத்துயரம், அப்பொருட்கள் அதே வேகத்துடன் நிலேக்குத்தாக மேல்நோக்கி எறியப்பட்டால் செல்லக்கூடிய நிலேக்குத்துயரத்திற்குச் சமமாகும்.

மாதிரி 10. ஒரு தொடர் வண்டி முழுவேகத்துடன் சென்று கொண்டிருக்கும்போது வேகத்தடை (Brake) செயல்படுத்தப் படுகிறது. இதற்குப்பின் முதல் நிமிடத்தில் அது $\frac{1}{2}$ கிலோ மீட்டரும், அடுத்த நிமிடத்தில் 300 மீட்டர்களும் செல்கின்றது. தொடர் வண்டியின் தொடக்க வேகம், அது ஓய்வுக்கு வருவதற்காகும் நேரம், ஓய்வுக்கு வருமுன் அது கடந்துள்ள தூரம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு : வண்டியில் வேகத்தடை செய்யப்பட்டபோது அதன் தொடக்க வேகம் u என்றும், எதிர் முடுக்கம் f என்றும் கொள்க. முதல் ஒரு நிமிடத்தில் 500 மீட்டர்கள் செல்வதால்,

$$S = ut + \frac{1}{2}ft^2$$

என்ற இயக்கச் சமன்பாட்டிலிருந்து,

$$500 = 60\,u + \frac{1}{2}\,.\,f\,.\,60^2 \qquad (t = 1 \text{ நிமி.} = 60 \text{ வி.})$$

அல்லது $25 = 3\,u + 90\,f \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$

இரண்டாவது நிமிடத் தொடக்கத்தில் அதன் திசைவேகம் $v = u + ft = u + 60f$, இத்திசை வேகம் $v = (u + 60\,f)$ ஐத் தொடக்க வேகமாகக் கொண்டு இரண்டாவது நிமிடத்தில் 300 மீட்டர்கள் செல்கிறது.

ஆகவே, $S = ut + \frac{1}{2}\,ft^2$ என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து,

$$300 = (u + 60\,f)\,60 + \frac{1}{2}\,.\,f\,.\,60^2$$

$$5 = u + 60\,f + 30\,f$$

அதாவது, $5 = u + 90\,f \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$

(1), (2) ஆகிய தொடர்புகளிலிருந்து, $u = 10$, $f = -\frac{1}{18}$ என்று காணலாம்.

$\therefore$ வண்டியின் தொடக்க வேகம் $= 10$ மீட்./வி ;

எதிர் முடுக்கம் $= -\frac{1}{18}$ மீட/வி^{2}.

வண்டி t வினடிகட்குப்பின் ஓய்வுக்கு வருமானல், இறுதிவேகம் O ஆகும்.

$\therefore$ $v = u + ft$ என்னும் சமன்பாட்டிலிருந்து,

$$t \times O = 10 - \frac{1}{81}$$

$\therefore \ t = 180$ விநாடிகள் $= 3$ நிமிடங்கள்.

மேலும், வண்டி ஓய்வுக்கு வரும்போது சென்றுள்ள தூரம் S எனில்,

$v^2 = u^2 + 2fs$ என்னும் சமன்பாட்டிலிருந்து

$O = 100 - \frac{2}{18} S$

அல்லது $S = 900$ மீட்டர்கள்.

மாதிரி 11. ஒரு தொடர் வண்டி A என்னும் நிலையத்திலிருந்து B என்னும் நிலயத்திற்கு முதற்பகுதியில் f_1 என்னும் முடுக்கத்துடனும், பிற்பகுதியில் f_2 என்னும் எதிர்முடுக்கத்துடனும் செல்கிறது. வண்டியானது A-யில் ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டு Bயில் ஓய்வு நிலையை அடைகிறது. A-யிலிருந்து B வந்து ஓய்வு நிலையை அடைகிறது. A-யிலிருந்து Bவந்துசேர ஆகும் T எனில்

$$T^2 = 2a\,\frac{f_1 + f_2}{f_1 f_2},$$

என்று நிறுவுக. (a என்பது இரு நிலையங்களுக்கிடையேயுள்ள தூரம்)

தீர்வு : முதற்பகுதியின் தூரம் S_1 என்றும் இரண்டாம் பகுதியின் தூரம் S_2' என்றும் கொள்க.

$$\therefore S_1 + S_2 = a.$$

முதற் பகுதியைக் கடக்கும் நேரம் t_1 என்றும், இரண்டாம் பகுதியைக் கடக்கும் நேரம் t_2 என்றும் கொள்க.

$$\therefore t_1 + t_2 = T.$$

முதற்பகுதி :

தொடக்க வேகம் $u = O$

முடுக்கம் $f = f_1$.

நேரம் $t = t_1$.

தூரம் $S = S_1$.

முதற் பகுதியின் இறுதி வேகம் v எனில்,

$$v = u + ft = O + f_1 t_1 = f_1 t_1.$$

$$\begin{aligned} S_1 &= ut + \tfrac{1}{2} ft^2 \\ &= O + \tfrac{1}{2} f_1 t_1^2 \\ &= \tfrac{1}{2} f_1 t_1^2 \end{aligned}$$

இரண்டாம் பகுதி :

முதற்பகுதியின் இறுதிவேகம் பிற்பகுதியின் தொடக்க வேகமாகும்.

$$\therefore u = f_1 t_1$$

முடுக்கம் $f = -f_2$

$$t = t_2$$

$$S = S_2$$

பிற்பகுதியின் இறுதிவேகம் $V = O$.

$\therefore V = u + ft$ என்னும் சமன்பாட்டிலிருந்து,

$$O = f_1 t_1 + (-f_2)t_2$$

$$\therefore \quad f_2 t_2 = f_1 t_1 = u.$$

$S = ut + \frac{1}{2} ft^2$ என்னும் சமன்பாட்டிலிருந்து,

$$S_2 = ut_2 - \tfrac{1}{2} f_2 t^2_2$$

$$= ut_2 - \tfrac{1}{2} ut_2$$

$$= \tfrac{1}{2} ut_2.$$

மேலும் $S_1 = \frac{1}{2} f_1 t_1^2 = (f_1 t_1)\, t_1 = \frac{1}{2} ut_1.$

ஆனால், $S_1 + S_2 = 2a.$

$$\therefore \quad \tfrac{1}{2} ut_1 + \tfrac{1}{2} ut_2 = a$$

$$\tfrac{1}{2} u\,(t_1 + t_2) = a$$

$$t_1 + t_2 = \frac{u}{2a}$$

அவாவது, $T = \dfrac{2a}{u}.$

இப்பொழுது, $f_1 t_1 = f_2 t_2 = u$ ஆகையால், $t_1 = \dfrac{u}{f_1}$, $t_2 - \dfrac{u}{f_2}.$

$$\therefore T = t_1 + t_2 = \frac{u}{f_1} + \frac{u}{f_2} = u \left(\frac{f_1 + f_2}{f_1 f_1}\right)$$

$$\therefore T^2 = T.T$$

$$= \frac{2a}{u} \, . \, u \left(\frac{f_1 + f_2}{f_1 f_2}\right)$$

$$= 2a. \left(\frac{f_1 + f_2}{f_1 f_2}\right)$$

மாதிரி 12. சீர்முடுக்கத்துடன் சென்று கொண்டிருக்கும் ஒரு துகள் அடுத்தடுத்துள்ள மூன்று சம தூரங்களை முறையே t_1, t_2, t_3 நேரங்களில் கடந்து சென்றால்,

$$\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} = \frac{3}{t_1 + t_2 + t_3}$$

என்று நிறுவுக.

தீர்வு: தொடக்க வேகம் u, சீர்முடுக்கம் f, சமதூரம் S என்று கொள்க. முதற்பகுதியின் இறுதி வேகம் v_1 எனில், $v = u + ft$ என்னும் சமன்பாட்டிலிருந்து,

$$v_1 = u + ft_1, \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$S = ut_1 + \tfrac{1}{2} ft^{12} \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

இரண்டாம் பகுதியின் தொடக்க வேகம் = முதற்பகுதியின் இறுதிவேகம் = v_1. முடுக்கம் = f, தூரம் S, காலம் = t_2.

இரண்டாம் பகுதியின் இறுதி வேகம் v_2 எனில், $v = u + ft$, $S = ut + \frac{1}{2} ft^2$ ஆகிய சமன்பாடுகளிலிருந்து,

$$\begin{aligned} v^2 &= v_1 + ft_2 \\ &= (u + ft_1) + ft_2 \\ &= u + f(t_1 + t_2) \quad \ldots \quad \ldots \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= v_1 t_2 + \tfrac{1}{2} j^2 t_1 \\ &= (u + ft_1) t_2 + \tfrac{1}{2} ft^2{}_2 \\ &= ut_2 + ft_1 t_2 + \tfrac{1}{2} ft^2{}_2 \\ &= ut_2 + \tfrac{1}{2} f (2t_1 + t_2) t_2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (4) \end{aligned}$$

மூன்றும் பகுதியின் தொடக்க வேகம் = இரண்டாம் பகுதியின் இறுதி வேகம் = v_2.

முடுக்கம் = f, தூரம் = S, காலம் = t_3.

ஆகவே, $S = ut + \frac{1}{2} ft_2$ என்னும் சமன்பாட்டிலிருந்து,

$$\begin{aligned} S &= v_2 t_3 + \tfrac{1}{2} ft_3{}^3 \\ &= [u + f(t_1 + t_2)] t_3 + \tfrac{1}{2} ft^2{}_3 \\ &= ut_3 + \tfrac{1}{2} f [2(t_1 + t_2) + t_3] t_3 \quad \ldots \quad \ldots \quad (5) \end{aligned}$$

(2), (4), (5) ஆகிய சமன்பாடுகளைக் கூட்டவும்.

$$3S = u(t_1 + t_2 + t_3) + \tfrac{1}{2}f[t_1^2 + (2t_1 + t_2)t_2 + 2(t_1 + t_2)t_3 + t_3^2]$$

$$= u(t_1 + t_2 + t_3) + \tfrac{1}{2}f[t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + 2t_1 t_2 + 2t_2 t_3 + 2t_3 t_1]$$

$$= u(t_1 + t_2 + t_3) + \tfrac{1}{2}f(t_1 + t_2 + t_3)^2$$

$$\therefore \frac{3S}{t_1 + t_2 + t_3} = u + \tfrac{1}{2}f(t_1 + t_2 + t_3) \quad \ldots \quad \ldots \quad (6)$$

மேலும், $\frac{S}{t_1} - \frac{S}{t_2} = \frac{S}{t_3} = \frac{(ut_1 + \frac{1}{2}ft_1^2)}{t_1}$

$$- \frac{ut_2 + \frac{1}{2}f(2t_1 + t_2)t_2}{t_2}$$

$$+ \frac{ut_3 + \frac{1}{2}f[2(t_1 + t_2) + t_3]t_3}{t_3}$$

$$= u + \tfrac{1}{2}ft_1 - [u + \tfrac{1}{2}f(2t_1 + t_2)] + u + \tfrac{1}{2}f[2(t_1 + t_2) + t_3]$$

$$= u + \tfrac{1}{2}f[t_1 - 2t_1 - t_2 + 2t_1 + 2t_2 + t_3]$$

$$= u + \tfrac{1}{2}f(t_1 + t_2 + t_3) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (7)$$

(6), (7) ஆகிய தொடர்புகளிலிருந்து,

$$\frac{S}{t_1} - \frac{S}{t_2} + \frac{S}{t_3} = \frac{3S}{t_1 + t_2 + t_3}$$

$$\therefore \frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} = \frac{3}{t_1 + t_2 + t_3}$$

மாதிரி 13. ஓய்வு நிலையத்திலிருக்கும் இரு துகள்கள் ஓரிடத்திலிருந்து ஒரே சமயத்தில் ஒன்று u என்னும் மாருத் திசை வேகத்துடனும், இரண்டாவது f என்னும் மாரு முடுக்கத்துடனும் புறப்படுகின்றன. இரண்டாவது துகள் முதற் துகளை அடையும் முன்னர் புறப்பட்ட நேரத்திலிருந்து $\frac{u}{f}$ நேரத்தில் அவைகளுக்கிடையேயுள்ள தூரம் மிக அதிகமாயிருக்குமென்றும், மிக அதிக இடைவெளி $\frac{u^2}{2f}$ என்றும் நிறுவுக.

தீர்வு : t என்னும் நேரத்தில் முதற்துகள் சென்றதூரம் $= ut$,

இரண்டாம் துகள் சென்ற தூரம் $= O(t) + \frac{1}{2} ft^2 = \frac{1}{2} ft^2$.
இரண்டிற்குமிடையேயுள்ள தூரம் S எனில்,

$$S = ut - \frac{1}{2} ft^2 \qquad \dots \qquad \dots \qquad (1)$$

S மீப்பெரு அல்லது மீச்சிறு மதிப்பை அடைய வேண்டுமாயின் $\frac{ds}{dt} = O$.

$$\frac{ds}{dt} = u - ft = O \quad \therefore t = \frac{u}{f}$$

$$\frac{d^2S}{dt^2} = -f \text{ (எதிரடையாளம்)}$$

$\therefore t = \frac{u}{f}$ ஆகியிருக்கும்போது அவற்றிற்கிடையேயுள்ள தூரம் மீப்பெரிதாகயிருக்கும்.

சமன்பாடு (1) இல் $t = \frac{u}{f}$ என்று பிரதியிட,

$$\text{மீப்பெரு இடைத்தூரம்} = u\left(\frac{u}{f}\right) - \frac{1}{2} f\left(\frac{u^2}{f^2}\right)$$

$$= \frac{u^2}{f} - \frac{1}{2}\ \frac{u^2}{f}$$

$$= \frac{u^2}{2f}$$

மாதிரி 14. நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கி 981 செ.மீ./விநாடி வேகத்துடன் பறந்து கொண்டிருக்கும் ஒரு பலூனிலிருந்து ஒரு கல் கீழே போடப்படுகிறது. கல் தரையில் வந்து சேர 16 விநாடிகளானால், கல் கீழே போடப்பட்டபோது பலூன் தரையிலிருந்து எவ்வளவு உயரத்தில் பறந்து கொண்டிருந்தது ?

தீர்வு : கல் கீழே போடப்படும்போது பலூனின் உயரம் h என்க. பலூன் மேல்நோக்கிப் பறந்து கொண்டிருப்பதால் கல்லின் திசைவேகம் பலூனின் மேல் நோக்கிய திசைவேகத்திற்குச் சமமாகயிருக்கும்.

எனவே, கல்லின் தொடக்க வேகம் = 981 செ.மீ/வி. மேல் நோக்கி.
= — 981 செ.மீ./வி. கீழ் நோக்கி.

கல் பயணம் செய்த மொத்த தூரம் $S = h$ செ.மீ.

கல் பயணம் செய்த நேரம் $t = 16$ வி.

கல்லின் கீழ்நோக்கிய முடுக்கம் $f =$ ஈர்ப்பு முடுக்கம் $= g = 981$ செ.மீ./வி².

எனவே, $S = ut + \frac{1}{2} t^2$ என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து,

$$h = -981 \times 16 + \tfrac{1}{2} \times 981 \times 16^2$$
$$= 16 \times 981 (-1 + 8)$$
$$= 16 \times 981 \times 7$$
$$= 109872 \text{ செ.மீ.}$$
$$= 1098.72 \text{ மீட்டர்.}$$

மாதிரி 15. ஒரு கோபுரத்தின் உச்சி A-யிலிருந்து நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கி வீசியெறியப்படும் ஒரு பொருள் t_1 வினாடிகளில் தரையை வந்தடைகிறது. அது A-யிலிருந்து நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கி அதே திசை வேகத்துடன் வீசியெறியப்பட்டால் t_2 வினாடிகளில் தரையை வந்தடையும். அது A-யிலிருந்து கீழே போடப்பட்டால் $\sqrt{t_1 t_2}$ நேரத்தில் தரையை வந்தடையும் என்று நிறுவுக

தீர்வு : கோபுரத்தின் உயரம் h என்றும், வீச்சு வேகம் u என்றும் கொள்க.

கல்லின் மேல்நோக்கிய திசைவேகம் $= u$.

$\therefore$ கல்லின் கீழ்நோக்கிய திசைவேகம் $= -u$ என்று கூறலாம்.

ஆகவே, $-u$ திசைவேகத்துடன் கீழ்நோக்கி வீசியெறியப்படும் கல், h ஆழத்திலுள்ள தரையை t_1 நேரத்தில் வந்தடைகிறது. எனவே, $S = ut + \frac{1}{2} ft^2$ என்னும் சமன்பாட்டில், $S = h$, $u = -u$, $f = g$, $t = t_1$ என்று பிரதியிடுக.

$$h = -ut_1 + \tfrac{1}{2} g\, t_1^2 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (1)$$

இப்பொழுது, கல் u என்னும் திசைவேகத்துடன் கீழ்நோக்கி வீசியெறியப்பட்டால், தரையை t_2 நேரத்தில் வந்தடைகிறது. எனவே, $S = h$, $u = u$, $f = g$, $t = t_2$ என்று பிரதியிடுக.

$$h + ut_2 = \tfrac{1}{2} g t_2^2 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2)$$

இப்பொழுது கல் O திசைவேகத்துடன் h உயரத்திலிருந்து கீழே போடப்பட்டால், தரையை t நேரத்தில் வந்தடைவதாகக் கொள்க.

எனவே, $S = h$, $u = O$, $f = g$, $t = t$ என்று பிரதியிடுக.

$$h = O(t) + \tfrac{1}{2}gt^2 = \tfrac{1}{2}gt^2 \quad \ldots \quad (3)$$

$(1) \times t_2$:— $ht_2 = -ut_1 t_2 + \tfrac{1}{2}gt_1^2 t^2$

$(2) \times t_1$:— $ht_1 = \quad ut_1 t_2 + \tfrac{1}{2}gt_1 t_2^2$

கூட்டுக. $h(t_1 + t_2) = \tfrac{1}{2}gt_1 t_2 (t_1 + t_2)$

$\therefore\ h = \tfrac{1}{2}gt_1 t_2$.

ஆனால் $h = \tfrac{1}{2}gt^2$, (3) இலிருந்து

$\therefore\ \tfrac{1}{2}gt^2 = \tfrac{1}{2}gt_1 t_2$

$\therefore\ t^2 = t_1 t_2$

அல்லது, $t = \sqrt{t_1 t_2}$.

மாதிரி 16. a, μ என்பன இரு மாறிலிகள். A, P என்பன ஒரு தளத்தில் முறையே (O, a), $(a\cos\mu t, a\sin\mu t)$ என்னும் அச்சுத் தூரங்களைக் கொண்ட இரு புள்ளிகள் (t என்பது நேரத்தைக் குறிக்கும்). APயானது x-அச்சை Q-வில் சந்திக்கிறது. Q-வின் வேகம் V-எனில், அதன் முடுக்கத்தின் அளவு $\frac{V^2}{a}\cos\mu t$ என்று நிறுவுக.

(சென்னை பி.எஸ்ஸி 1969 ஏப்.)

தீர்வு: $A = (O, a)$, $P = (a\cos\mu t, a\sin\mu t)$

APயின் சமன்பாடு : $$\frac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_2}$$

$$\frac{x - O}{O - a\cos\mu t} = \frac{y - a}{a - a\sin\mu t}$$

$$\frac{x}{a\cos\mu t} = \frac{y - a}{a(\sin\mu t - 1)}$$

$$\frac{x}{\cos\mu t} = \frac{y - a}{\sin\mu t - 1}$$

x-அச்சின் சமன்பாடு $y = O$. ஆகையால் இச்சமன்பாட்டில் $y = O$ என்று பிரதியிட Q-வின் x-அச்சுத் தூரம் கிடைக்கும்.

$$\therefore\ \frac{x}{\cos\mu t} = \frac{-a}{\sin\mu t - 1}$$

$$\text{அல்லது}, \quad x = \frac{a \cos \mu t}{1 - \sin \mu t}$$

$$\therefore \quad Q = \left(\frac{a \cos \mu t}{1 - \sin \mu t}, O \right)$$

அதாவது, Q-வின் அச்சுத் தூரங்கள் $x = \dfrac{a \cos \mu t}{1 - \sin \mu t}$, $y = O$ ஆகும்.

Q-வின் வேகத்தின் x-அச்சு வழிக் கூறு $= \dfrac{dx}{dt}$,

y-அச்சு வழிக் கூறு $= \dfrac{dy}{dt}$ ஆகும்.

ஆனால், $\dfrac{dx}{dt} =$

$$\frac{(1-\sin \mu t)(-a\mu \sin \mu t) - a \cos \mu t\,(-\mu \cos \mu t)}{(1 - \sin \mu t)^2}$$

$$= \frac{-a\mu \sin \mu t + a\mu \sin^2 \mu t + a\mu \cos^2 \mu t}{(1 - \sin \mu t)^2}$$

$$= \frac{-a\mu \sin \mu t + a\mu}{(1-\sin \mu t)^2}$$

$$= \frac{a\mu\,(1-\sin \mu t)}{(1-\sin \mu t)^2}$$

$$= \frac{a\mu}{1 - \sin \mu t}.$$

$$\frac{dy}{dt} = O.$$

$\therefore$ Q-வின் வேகம் $= \sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2} = \dfrac{a\mu}{1-\sin \mu t} =$ V என்க.

Q-வின் முடுக்கம் $= \dfrac{dV}{dt} =$

$$\frac{(1-\sin \mu t)(O) - a\mu\,(-\mu \cos \mu t)}{(1 - \sin \mu t)^2}$$

$$= \frac{a\mu^2 \cos \mu t}{(1-\sin \mu t)^2}$$

$$= \frac{1}{a}\left(\frac{a\mu}{1-\sin \mu t)^2}\right)^2 \cos \mu t$$

$$= \frac{V^3}{a} \cos \mu t$$

மாதிரி 17. V-என்னும் திசைவேகத்துடன் ஒரு நேர் கோட்டில் நகர்ந்து கொண்டிருக்கும் ஒரு துகள் kV^3 (k ஒரு மாறிலி) என்னும் எதிர் முடுக்கத்தையுண்டு பண்ணக்கூடிய ஒரு தடைக்குள்ளாகிறது. காலம் t-யும், திசைவேகம் V-யும், தூரம் S இன்சார்பாக

$$V = \frac{u}{1+ksu}, \; t = \tfrac{1}{2} ks^2 + \frac{S}{u}, \; (u \text{ என்பது}$$

தொடக்க வேகம்)

என்னும் சமன்பாடுகளினல் தரப்படுமென்று நிறுவுக.

(சென்னை 1963)

தீர்வு : எதிர் முடுக்கம் kV^3 ஆகையால், முடுக்கம் $= -kV^3$ ஆகும்.

ஆனல் முடுக்கம் $= \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{ds} = \frac{ds}{dt} \quad \frac{dV}{ds.} V.$

எனவே, இயக்கச் சமன்பாடு வருமாறு.

$$\frac{dV}{ds} . V = -kV^3.$$

$$\text{அதாவது, } -\frac{dV}{V^2} = kds.$$

தொகையீடு காணின், $\frac{1}{V} = ks+c$, C என்பது தொகையீட்டு மாறிலி.

தொடக்கத்தில், $S = O, v = u. \quad \therefore \quad C = \frac{1}{u}$

$$\therefore \quad \frac{1}{V} = ks + \frac{1}{u} = \frac{ksu+1}{u}$$

$$\therefore \quad V = \frac{u}{1+ksu.}$$

ஆனால், $V = \frac{ds}{dt}$ ஆகையால்,

$$\frac{ds}{dt} = \frac{u}{1 + ksu}.$$

அல்லது, $(1 + ksu)\, ds = ut.$

தொகையீடு காணின், $S + \frac{ks^2u}{2} = ut + C_1$, ($C_1$ என்பது தொகையீட்டு மாறிலி)

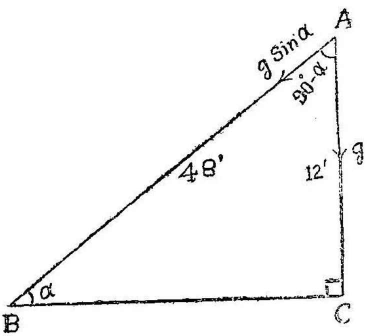
தொடக்கத்தில், $t = 0,\ S = 0 \quad \therefore C_1 = 0.$

$$\therefore \quad ut = S + \frac{kS^2u}{2}$$

$$\therefore \quad t = \frac{S}{u} + \tfrac{1}{2} ks^2$$

மாதிரி 18. 48 அடி நீளமும் 12 அடி உயரமுமுள்ள ஒரு வழுவழுப்பான சாய்தளத்தின்மேல் அதன் உச்சியில் வைக்கப் பட்ட ஒரு பொருள் கீழ்நோக்கி நழுவுகிறது. அது சாய்தளத்தின் அடியை அடையும்போது என்ன திசைவேகத்தைப் பெற்றிருக்குமென்றும், அடியில் போய்ச் சேருவதற்கு எத்தனை வினாடிகள் பிடித்திருக்குமென்றும் காண்க. அது சாய்தளத்தின் உச்சியிலிருந்து நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கி விழுந்திருந்தால், 12 அடி ஆழத்திலுள்ள சமதளத்தை எவ்வளவு நேரத்தில் வந்தடையுமென்று காண்க.

தீர்வு : AB என்பது ஒரு வழுவழுப்பான சாய்தளம் ; AC அதன் உயரம். $AB = 48$ அடி ; $AC = 12$ அடி.



படம் 16

சாய்தளத்தின் சாய்வு ∝ எனில், $\sin \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{12}{48} = \frac{1}{4}.$

சாய்தளத்தின் வழியே பொருளின் கீழ் நோக்கிய முடுக்கம் $= g \sin \alpha$

$= 32 \times \frac{1}{4}$

$= 8$ அடி/வி².

பொருள் B யை அடையும் போது அதன் திசைவேகம் V என்க.

u = பொருளின் தொடக்கவேகம் = O

f = பொருளின் முடுக்கம் = 8 அடி/(விநாடி)^2.

S = சாய்தளத்தின் நீளம் = 48 அடி.

எனவே, $v^2 = u^2 + 2fs$ என்னும் சமன்பாட்டிலிருந்து,

$$v^2 = O + 2\,(8)\,(48)$$

$$= 768$$

$$V = \sqrt{768} = 16\sqrt{3} \text{ அடி/விநாடி}$$

பொருள் B யை அடைய ஆகும் நேரம் t என்க. $S = ut + \frac{1}{2}ft^2$ என்னும் சமன்பாட்டிலிருந்து,

$$48 = 0 + \tfrac{1}{2}\,(8)\,t^2 = 4t^2$$

$$t_3 = 12$$

$$t = 2\sqrt{3} \text{ விநாடி}$$

பொருள் A யிலிருந்து நிலைக்குத்தாகக் கீழே விழச் செய்தால்,

$u = O$, $f = g = 32$ அடி/(விநாடி)^2, $S = 12$ அடி, $t = t$ என்க.

$$S = ut + \tfrac{1}{2}ft^2$$

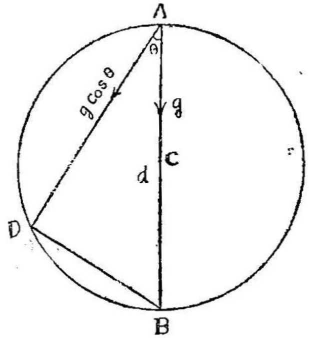
$$12 = O + \tfrac{1}{2}\,(32)\,t^2 = 16\,t^2.$$

$$t^2 = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

$$t = \sqrt{\frac{3}{2}} \text{ விநாடி}.$$

தேற்றம்: ஒரு நிலைக்குத்து வட்டத்தின் மிக உயர்ந்த புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் ஏதேனுமொரு வழவழப்பான நாண் வழியே ஒரு பொருள் நழுவி விழ எடுத்துக் கொள்ளும் நேரம் ஒரு மாறிலியாகும்.

நிறுவல் : A என்பது d விட்டமுள்ள ஒரு வட்டத்தின் மிக உயர்ந்த புள்ளி, AB என்பது A வழியே செல்லும் விட்டம். எனவே $AB = d$. மேலும் AB நிலைக்குத்தாக யிருக்கும்.



படம் 17

AD என்பது A வழியே வரையப்பட்ட ஒரு வழவழப்பான நாண்.

$D\hat{A}B = \theta$ என்க.

A யிலிருந்து ஒரு பொருள் AD வழியே நழுவி விழுகிறது. A யிலுள்ள பொருள்மீது புவியீர்ப்பு முடுக்கம் நிலைக்குத்து வழியாகக் கீழ்நோக்கிச் செயல்படும், எனவே, நாண் AD வழியே பொருளின் ஈர்ப்பு முடுக்கக்கூறு $g \cos \theta$ ஆகும். ஆகவே, பொருளானது A யிலிருந்து O வேகத்துடன் புறப்பட்டு AD வழியே $g \cos \theta$ என்னும் முடுக்கத்துடன் நழுவி விழுகிறது. பொருள் D வரை நழுவுவதற்கு ஆகும் நேரம் t என்க,

$\therefore u =$ பொருளின் தொடக்க வேகம் $= O$

$f = AD$ வழியே முடுக்கம் $= g \cos \theta$.

$S =$ நாண் ADயின் நீளம் $= AD \cos \theta = d \cos \theta$.

$t = AD$ தூரத்தை நழுவிக் கடக்கும் நேரம்.

$S = ut + \frac{1}{2} ft^2$ என்னும் சமன்பாட்டிலிருந்து,

$$d \cos \theta = O + \tfrac{1}{2} g \cos \theta \, t^2$$

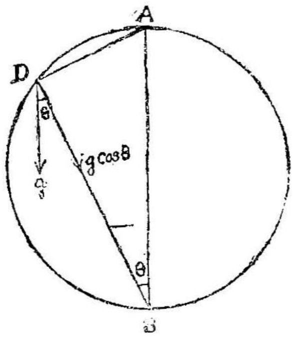
$$\therefore t^2 = \frac{2d}{g}$$

$$\therefore t = \sqrt{\frac{2d}{g}}$$

t யின் மதிப்பு θ ஐச் சாராமலிருப்பதால், A வழியாக வரையப்படும் எந்த நாண் வழியாகவும் ஒரு பொருள் A யிலிருந்து நழுவி விழுவதற்கு எடுத்துக் கொள்ளும் நேரம் சமமாகயிருக்கும். இச் சம நேரமாகிய $\sqrt{\frac{2d}{g}}$ என்பது A யிலிருந்து AB என்ற விட்டத்தின் தூரத்திற்கு நிலைக்குத்தாகக்

கீழே விழுவதற்கு எடுத்துக் கொள்ளப்படும் நேரத்திற்குச் சமமாகும். மேலும், d, g என்பன மாறிலியாகையால் இந்த நேரமும் ஒரு மாறிலியாகும்.

தேற்றம் : ஒரு நிலைக்குத்து வட்டத்தின் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியுடன் முடிவடையுமாறு வட்டத்தின் மேலுள்ள எந்தப் புள்ளி வழியாகவும் வரையப்படுகின்ற ஒரு வழவழப்பான நாண் வழியே ஒரு பொருள் நழுவிச் செல்ல எடுத்துக் கொள்ளும் நேரம் ஒரு மாறிலியாகும்.



படம் 18

நிறுவல் : B என்பது ஒரு நிலைக்குத்து வட்டத்தின் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளி. BA என்பது B வழியே வரையப்பட்ட நிலைக் குத்து விட்டம். $BA = d$. என்க. D என்பது வட்டத்தின் மேலுள்ள ஏதேனுமொரு புள்ளி. DB என் பது D வழியே வட்டத்தின் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியில் முடிவடையு மாறு வரையப்பட்ட ஒரு வழ வழப்பான நாண்.

D யிலிருந்து ஒரு பொருள் DB வழியே நழுவிச் செல்கிறது. $\angle ABD = \theta$ எனில், $DB = AB \cos \theta = d \cos . \theta$

நிலைக்குத்தாக இயங்கும் ஈர்ப்பு மையம் g யின் DB வழிக் கூறு $g \cos \theta$ —கும்.

எனவே, D யில் ஓய்வு நிலையிலிருக்கும் பொருள் DB வழியே $g \cos \theta$ என்னும் முடுக்கத்துடன் நழுவிச் செல்கிறது. அப் பொருள் B வரை நழுவிச் செல்ல ஆகும் நேரம் t என்க.

$\therefore u =$ தொடக்க வேகம் $= O$

$f = DB$ வருயே முடுக்கம் $= g \cos \theta$.

$S =$ நழுவிச் செல்லும் தூரம் $= DB = d \cos \theta$.

$t =$ நழுவிச் செல்லும் நேரம்.

$S = ut + \frac{1}{2} ft^2$ என்னும் சமன்பாட்டிலிருந்து,

$$d \cos \theta = O + \tfrac{1}{2} g \cos \theta . t^2.$$

$$\therefore t^2 = \frac{2d}{g}$$

$$\therefore t = \sqrt{\frac{2d}{g}}$$

d, g ஆகியவை மாறிலிகளாகையால் t ஒரு மாறிலியாகும்.

மிக விரைவு இறக்கக் கோடு (Line of Quickest Descent)

ஒரு புள்ளியிலிருந்து அப்புள்ளி வழி நிலைக் குத்துத் தளத்தி லுள்ள ஒரு வளைவரைக்கு வரையப்படும் நேர்கோடுகளுள் எந்தக் கோட்டின் வழியாக ஒரு துகள் அப்புள்யிலிருந்து மிகக் குறுகிய காலத்தில் நழுவிச் செல்லக்கூடுமோ அந்தக் கோட் டிற்கு மிகவிரைவு இறக்கக் கோடு என்று பெயர்.

மிக விரைவு இறக்கக்கோடு என்பது ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரு வளைவரைக்கு வடிவியல் முறையில் வரையப்படும் மிகக் குறைந்த தூரக் கோடு அன்று என்பதை நினைவிற் கொள்க.

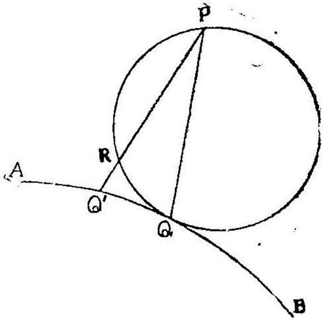
மிக விரைவு இறக்கக் கோடு காணல்

கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து அப்புள்ளி வழி நிலைக்குத்துத் தளத்திலுள்ள ஒரு வளைவரைக்கு வரையப்படும் மிக விரைவு இறக்கக்கோடு என்பது அப்புள்ளியை மிக உயர்ந்த புள்ளியாகக் கொண்டு வரையப்படும் வட்டம் அவ்வளை வரையைத் தொடும் புள்ளியையும் கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளி யையும் இணைக்கும் நேர்கோடாகும்.

நிறுவல்: P என்பது கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒரு புள்ளி. AB என்பது P வழியே செல்லும் நிலைக்குத்துத் தளத்திலுள்ள ஒரு வளைவரை. P—ஐ மிக உயர்ந்த புள்ளியாகக் கொண்ட வட்டம் வளைவரை AB-யை Q வில் தொடு கின்றது. PQ-ஐச் சேர்க்கவும்.

P வழியே PR என்னும் ஒரு நாண் வரைந்து, வளைவரையை Q' இல் சந்திக்குமாறு நீட்டவும்.

$$PQ' > PR.$$

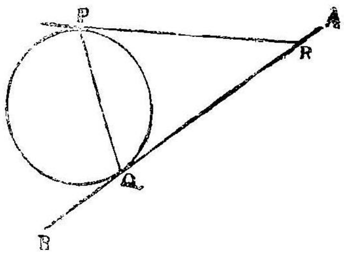


படம் 19

∴ PQ' வரை நழுவிச் செல்லும் நேரம் $>$ PR வரை நழுவிச் செல்லும் நேரம். ஆனால் PR தூரம் நழுவிச் செல்லும் நேரமானது PQ தூரத்திற்கு நழுவிச் செல்லும் நேரத்திற்குச் சமமாகும்.

∴ PQ' தூரம் நழுவிச் செல்லும் நேரம் $>$ PQ தூரம் நழுவிச் செல்லும் நேரம். P வழியே வரையப்படும் நாண்களுள் PQ தவிர ஏனைய நாண்கள் யாவும் வளைவரையை வட்டத்திற்கு வெளியே சந்திக்குமாகையால், PQ தான் மிக விரைவு இறக்கக் கோடாகுமென அறிந்து கொள்ளலாம்.

மாதிரி 19. கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து அப் புள்ளிவழி நிலைக்குத்துத் தளத்திலுள்ள ஒரு நேர்கோட்டிற்கு மிக விரைவு இறக்கக்கோடு காண்க.



படம் 20

தீர்வு: P என்பது கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒரு புள்ளி. AB என்பது P வழியே செல்லும் நிலைக்குத்துத் தளத்திலுள்ள நேர்கோடு.

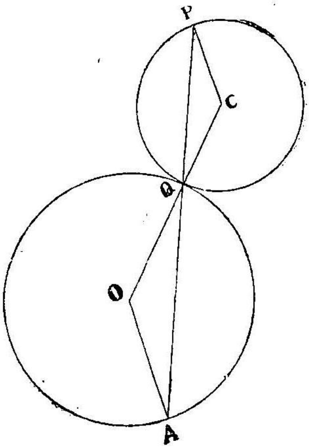
P யிலிருந்து ABக்கு வரையப்படும் மிக விரைவு இறக்கக் கோடு என்பது P யை மிக உயர்ந்த புள்ளியாகக் கொண்டு வரையப்படும் வட்டம் நேர்கோடு ABயைந் தொடும் புள்ளியையும் P-யையும் இணைக்கும் நேர்கோடாகும். P என்பது வட்டத்தின் மிக உயரந்த புள்ளியாகையால் P வழியே வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோடு கிடையாகயிருக்கும். எனவே, P வழியே ஒரு கிடைக்கோடு, ABயை R இல் வெட்டுமாறு வரைக. இப்பொழுது, P யை உச்சிப் புள்ளியாகக் கொண்டு வரையப்படும் வட்டம் ABயை Qவில் தொடுமானால் RQ ஆனது அவ்வட்டத்திற்கு Q-வில் வரையப்படும் தொடுகோடாகும். அதாவது, RP, RQ என்பன R என்னும் புள்ளியிலிருந்து அவ்வட்டத்திற்கு வரையப்படும் இரு தொடுகோடுகளாகும்.

$$\therefore RQ = RP.$$

எனவே, P-யிலிருந்து வரையப்படும் கிடைக்கோடு, கொடுக்கப்பட்டுள்ள நேர்கோடு ABயை வெட்டும் புள்ளியாகிய Rஇலிருந்து

$RQ = RP$ என்ற அளவில் AB-யில் Q என்னும் புள்ளியை எடுத்து PQ-ஐச் சேர்த்தால் PQதான் Pயிலிருந்து ABக்கு வரையப்படும் மிகக் குறுகிய இறக்கக் கோடொன்றறியலாம்.

மாதிரி **20.** கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து அப் புள்ளிவழி நிலைக்குத்துத் தளத்திலுள்ள ஒரு வட்டத்திற்கு மிக விரைவு இறக்கக் கோடு காண்க.



படம் 21

தீர்வு: P என்பது கொடுக்கப் பட்டுள்ள ஒரு புள்ளி. O என்பது P வழியே செல்லும் நிலைக்குத்துத் தளத்தில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒரு வட்டத்தின் மையம்; A அதன் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளி. PAயைச் சேர்க்கவும். இது O-ஐ மையமாகவுடைய வட்டத்தை Q-வில் வெட்டட்டும். PQ-தான் வேண்டிய மிக விரைவு இறக்கக் கோடாகும்.

OQ என்னும் ஆரை Pவழியே வரையப்படும் நிலைக்குத்துக் கோட்டை C-யில் வெட்டட்டும்.

$$PC \parallel OA \text{ ஆகையால், } C\hat{P}Q = O\hat{A}Q$$

$$= O\hat{Q}A \ (\because OA = OQ = \text{ஆரை})$$

$$= CQP$$

$$\therefore \ CP = CQ.$$

$\therefore$ C-யை மையமாகவும், CP-ஐ ஆரையாகவும் கொண்டு வரையப்படும் வட்டம் O-ஐ மையமாகக் கொண்ட (கொடுக்கப் பட்டுள்ள) வட்டத்தை Q-வில் தொடும்: மேலும், P என்பது அவ்வட்டத்தின் மிக உயர்ந்த புள்ளியாகுமாகையால், PQ என்பது வேண்டிய மிக விரைவு இறக்கக் கோடாகும்.

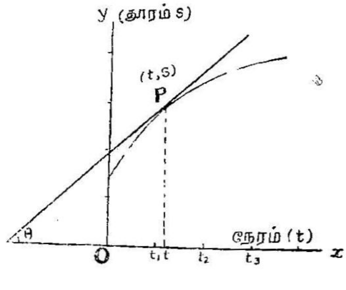
குறிப்பு : P-ஆனது வட்டத்தினுள்ளேயிருந்தால், P-யை வட்டத்தின் மிக உயர்ந்த புள்ளியுடன் இணைத்து மேற்கண்ட முறையில் மிகவிரைவு இறக்கக் கோட்டைக் காணவும்.

வரைபட முறையில் இயக்கநிலை காணல் :

மாறு முடுக்கத்துடன் நகரும் ஒரு துகளின் இயக்கச் சமன்பாடுகள் அமைப்பது எளிதன்று. இத்தகைய ஒரு துகள் பல்வேறு காலங்களில் சென்றுள்ள தூரங்களோ அல்லது பல்வேறு காலங்களில் அத்துகளின் வேகங்களோ கொடுக்கப் பட்டிருந்தால் அத்தகளின் தூரங்கள், காலங்களடங்கிய தொடர் அல்லது வேகங்கள், காலங்களடங்கிய தொடரிலிருந்து தூர-நேர வரைபடம் அல்லது வேக-நேர வரைபடம் வரைந்து அதன் இயக்கம் பற்றிய பிற கணியங்களை எளிதில் பெறலாம்.

1. தூர-நேர வரைபடம் (Space—time graph)

x, y அச்சுக்களைக் குறிக்குமாறு Ox, Oy என்னும் செங்குத்துக் கோடுகளை வரைந்து, x-அச்சில் நேரங்களையும், y-அச்சில் தூரங்களையும் பொருத்தமான அளவுத் திட்டங்களுடன் குறித்துக் கொள்க. $s_1\ s_2\ s_3 \ldots$, என்பன முறையே $t_1\ t_2\ t_3 \ldots$ என்னும் நேரங்களில் ஒரு துகள் சென்றுள்ள தூரங்களெனில் (t_1, s_1), (t_2, s_2) (t_3, s_3),......ஆகிய புள்ளிகளை வரைபடத்தில் குறித்து, அப்புள்ளிகளை ஒரு வழவழப்பான வளைவரையினால் சேர்க்கவும். இவ்வாறு கிடைக்கப்பெறும் வளைவரையானது அத்துகளின் இயக்கத்தைக் குறிப்பிடுகின்ற தூர-நேர வளைவரையாகும். இவ்வளைவரையிலுள்ள ஒரு புள்ளியின் நிலைத்தூரம் அப் புள்ளியின் x-அச்சுத் தூரம் குறிப்பிடுகின்ற நேரத்தில் அத்துகள் சென்றுள்ள தூரத்தைக் குறிப்பிடும். இத் தூர-நேர வளைவரையிலுள்ள ஏதேனுமொரு புள்ளி (t, s)யில் அவ்வளை வரைக்கு வரையப்படும் தொடுகோடு x-



படம் 22

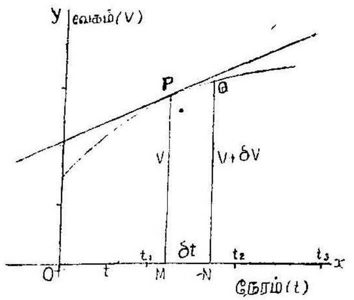
அச்சுடன் θ கோணச் சாய்விலிருந்தால், $\tan \theta = \dfrac{ds}{dt}$ ஆகும்.

ஆனல், $\dfrac{ds}{dt}$ என்பது t நேரத்தில் அத்துகளின் திசை

வேகத்தைக் குறிப்பிடுமாகையால், ஒரு குறிப்பிட்ட நேரம் t-யில் அத்துகளின் திசைவேகத்தை, அவ்வளை வரையில் $x = t$ஐக் குறிப்பிடுகின்ற புள்ளி வழியே அவ்வளை வரைக்கு வரையப்படும் தொடுகோட்டின் சரிவிலிருந்து ($\tan \theta$) பெறலாம்.

2. திசைவேக-நேர வரைபடம் (Velocity time Graph)

x, y அச்சுக்களைக் குறிக்குமாறு Ox, Oy என்னும் செங்குத்துக் கோடுகளை வரைந்து x-அச்சில் நேரங்களையும், y-அச்சில் திசைவேகங்களையும் பொருத்தமான அளவுத் திட்டங்களுடன் குறித்துக் கொள்க. V_1, V_2, V_3,......என்பன முறையே t_1, t_2, t_3,........ஆகிய நேரங்களில் ஒரு துகளின் திசைவேகங்களைக் குறிக்குமெனில், (t_1, V_1), (t_2, V_2), (t_3, V_3),... ஆகிய புள்ளிகளை வரை படத்தில் குறித்து, அப்புள்ளிகளை ஒரு வழவழப்பான வளைவரையினுல் சேர்க்கவும். இவ்வாறு கிடைக்கப் பெறும் வளைவரையானது அத்துகளின் இயக்கத்தைக் குறிப்பிடுகின்ற திசைவேக-நேர வளைவரையாகும். இவ்வளை வரையிலுள்ள ஒரு புள்ளியின் நிலைத்தூரம் அப்புள்ளியின் x-அச்சுத் தூரம் குறிப்பிடுகின்ற நேரத்தில் அத்துகளின் திசைவேகத்தைக் குறிப்பிடும். இத் திசைவேக-நேர வளைவரையிலுள்ள ஏதேனுமொரு புள்ளி (t, V)யில் அவ்வளை வரைக்கு வரையப்படும் தொடுகோடு x-அச்சுடன் θ கோணச் சாய்விலிருந்தால், $\tan \theta = \dfrac{dV}{dt}$ ஆகும். ஆனுல், $\dfrac{dV}{dt}$ என்பது t நேரத்தில் அத்துகளின் முடுக்கத்தைக் குறிப்பிடுமாகையால், ஒரு குறிப்பிட்ட நேரம் t-யில் அத்துகளின் முடுக்கத்தை, அவ்வளை வரையில் $x = t$-ஐக் குறிப்பிடுகின்ற புள்ளி வழியே அவ்வளை வரைக்கு வரையப்படும் தொடுகோட்டின் சரிவிலிருந்து பெறலாம்.



படம் 23

இப்பொழுது, t-என்னும் நேரத்தில் துகளின் திசைவேகம் V-என்றும், அதையடுத்துள்ள மிகக் குறுகிய கணம் $(t + \delta t)$யில் துகளின் வேகம் $(V + \delta V)$ என்றும் கொள்க. (t, V), $(t + \delta t, V + \delta V)$ ஆகிய அச்சுத் தூரங்களை முறையே P, Q என்னும்

புள்ளிகள் குறிப்பிடுவதாகக் கொள்க. திசைவேக-நேர வளை வரையிலுள்ள இப்புள்ளிகளின் PM, QN என்னும் நிலைத் தூரங்களை வரைக.

எனவே, $OM = t$, $PM = V$; $ON = t + \delta t$, $QN = V = \delta V$ ஆகும்.

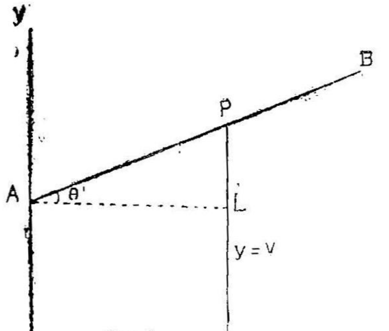
$\therefore \quad MN = \delta t$ ஆகும்.

δt என்னும் கால இடைவெளியில் துகள் சென்றுள்ள தூரம் δs எனில், $\delta s = V \, \delta t$ என்று கொள்ளலாம். ஆனால், $V \, \delta t$ என்பது $PMNQ$ என்னும் சிறிய துண்டுப் பகுதியின் பரப்பைக் குறிப்பிடுவதாகக் கொள்ளலாமாகையால் இச் சிறிய பரப்பு δt என்னும் குறுகிய காலத்தில் துகள் சென்றுள்ள தூரத்தைக் குறிப்பிடுமென்று கொள்ளலாம். ஆகவே, தொகை நுண் கணித முறைப்படி, t_1, t_2 ஆகிய நேரங்களுக்கிடையேயுள்ள கால இடைவெளியில் துகள் சென்றுள்ள தூரம்

$$= \int_{t_1}^{t_2} ds$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} V \, dt$$

$= x = t_1$, $x = t_2$ ஆகிய நிலைத் தூரங்களுக்கும், திசை-வேக வளைவரை, x-அச்சு ஆகியவற்றிற்குமிடைப்பட்ட பரப்பளவு.



படம் 24

குறிப்பு: துகளின் முடுக்கம் f ஒரு மாறிலியாவின், திசை வேக—நேர வளை வரையின் சரிவு (slope) மாறிலியா யிருக்குமாகையால், திசைவேக—நேர வளை வரை ஒரு நேர் கோடாக அமையும். எனவே, ஏதேனுமொரு நேரம் t யில் துகள் சென்றுள்ள தூரமானது, $x = O$, $x = t$ ஆகிய நிலைத்தூரங்களுக்கும், திசை வேக—நேர நேர்கோடு, x அச்சு

ஆகியவற்றிற்கு மிடைப்பட்ட சரிவகத்தின் பரப்பினுல் குறிப் பிடப்படும்.

ஆகவே, நேம் t யில் துகள்

சென்றுள்ள தூரம் = சரிவகம் $OAPM$—இன் பரப்பு

= செவ்வகம் $OMLA + \triangle ALP$

இப்பொழுது, $OA = O$ நேரத்தில் துகளின் திசைவேகம் $= u$.

$AL = OM = t$

$PL = AL \tan\theta = t \times$ சரிவு $+ t \times$ முடுக்கம்

$= tf$.

$\therefore$ செவ்வகம் $OMLA = OM \times OL = t \times u = ut$.

$\triangle ALP = \frac{1}{2} AL \times PL$

$= \frac{1}{2} t \times tf$.

$= \frac{1}{2} ft^2$.

$\therefore S =$ சரிவகம் $OAPM$ இன்பரப்பு

$=$ செவ்வகம் $OALM \times \triangle ALP$

$= ut + \frac{1}{2} ft^2$.

மேலும், $S =$ சரிவகம் $OAPM$

$= \frac{1}{2} (OA + MP.) . OM$

$= \frac{1}{2} (u + V) t$

ஆனல், $ft = PL = PM - LM = PM - AO = V - u$

$$\therefore t = \frac{V-u}{f}$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} (u + V) . \frac{V-u}{f}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(V^2 - u^2)}{f}$$

$$\therefore 2fS = V^2 - u^2$$

அல்லது, $V^2 = n^2 + 2fS$.

3. திசைவேக-தூரவரை படம். (Velocity—Space Graph)

மேற்கூறப்பட்ட முறையில் x, y அச்சுக்களை வரைந்து x — அச்சில் தூரங்களையும், y — அச்சில் திசைவேகங்களையும்

குறித்துக் கொள்க. V_1, V_2, V_3 ... என்பன முறையே S_1, S_2, S_3, ... ஆகிய தூரங்களின் துகளின் வேகங்களெனில், (S_1, V_1), (S_2, V_2), (S_3, V_3), ... ஆகிய புள்ளிகளைக் குறித்து, அவற்றை ஒரு வழ வழப்பான வளைவரையினுல் சேர்க்கவும். இவ்வாறு கிடைக்கப் பெறும் வளைவரையானது அத்துகளின் திசை வேக —தூர வளைவரையாகும். இவ்வளை வரையில் ஏதேனுமொரு புள்ளியில் வரையப்படும் தொடுகோட்டின் சாய்வு $\frac{dV}{dt}$ ஆகையால், அச்சாய்வு அத்துகளின் முடுக்கத்தைக் குறிக்கும். இவ் வளை வரையிலிருந்து அத்துகளின் இயக்கம் பற்றிய ஏனைய கணியங்களைப் பெற முடியாது.

இவ்வளைவரையிலுள்ள ஏதேனுமொரு புள்ளியின் வரை செங்கோட்டடி (subnormal) என்பது $V \frac{dV}{dS}$ ஆல் குறிக்கப்படும்.

$$\text{ஆனுல், } N \frac{dV}{dS} = \frac{dS}{dt} \cdot \frac{dV}{dS} \quad \frac{dV}{dt} = \text{முடுக்கம்.}$$

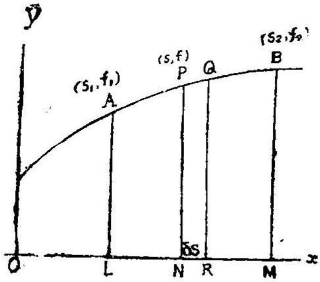
ஆகவே, துகளானது S தூரத்திலிருக்கும் போது $x = S$ ஐக் குறிப்பிடுகின்ற புள்ளியில் வளைவரையின் வரை செங்கோட்டடியானது துகளின் முடுக்கத்தைக் குறிக்கும். எனவே, முடுக்கம் மாறிலியாயின் வளைவரையின் வரை செங்கோட்டடியும் மாறிலியாகும். ஆனுல் ஒரு பரவளைவில் (parabola) வரை செங்கோட்டடி மாறிலியாகுமென்பது நாமறிந்ததே. எனவே, சீர் முடுக்கத்துடன் இயங்கிக் கொண்டிருக்கும் ஒரு துகளின் திசை வேக — தூரவளை வரை ஒரு பரவளைவு (parabola) ஆகும்.

4. முடுக்க—நேர வரைபடம் (Acceleration—time graph)

நேரங்களை x — அச்சிலும், அந்நேரங்களில் துகள் கொண்டுள்ள முடுக்கங்களை y — அச்சிலும் குறித்து முடுக்க — நேர வளைவரையைப் பெறலாம். இவ்வரை படத்திலிருந்து ஏதேனுமிரு குறிப்பிட்ட கால இடை வெளியில் துகளின் முடுக்கத்திலேற்பட்டுள்ள மாற்றத்தைக் கணக்கிடலாம்.

5. முடுக்க — தூர வரைபடம் (Acceleration — Space graph)

வெவ்வேறு நேரங்களில் துகள் சென்றுள்ள தூரங்களை x — அச்சிலும், அந்நிலைகளில் துகளின் முடுக்கங்களை y —அச்சிலும்



படம் 25

கொண்டு வரையப்படும் வளை வரை அத்துகளின் முடுக்க — தூர வளைவரையாகும்.

A, B என்பன முறையே முறையே (S_1, f_1), (S_2, f_2) என்னும் அச்சுத் தூரங்களைக் குறிக்கின்ற புள்ளிகள். AL, BM என்னும் நிலைத்தூரங்களை வரைக.

$\therefore OK = S_1, AL = f_1;$

$OM = S_2 \ BM = J_2.$

துகள் S தூரத்திலிருக்கும் போது முடுக்கம் f என்றும் $(S + \delta s)$ தூரத்திலிருக்கும் போது முடுக்கும் என்றும். வளைவரையில் (δ, f), $(\delta + \delta S, f \, \delta f)$ ஆகியவற்றைக்குறிக்கும் P, Q என்னும் புள்ளிகளைக் குறித்துக் கொள்க.

PN, QR என்னும் நிலைத்தூரங்களை வரைக.

$\therefore NR = \delta s$ ஆகும்.

$PQRN$ என்னும் சிறு துண்டுப் பகுதியின் பரப்பு $= f \cdot \delta s$ என்று தோராயமாகக் கொள்ளலாம்.

$\therefore$ பகுதி $ALMB$ யின் பரப்பு $= \int_{OL}^{OM} f \, ds$ ஆகும்.

ஆனல், $f = \dfrac{dV}{dt} = \dfrac{dV}{dS} \cdot \dfrac{dS}{dS} = \dfrac{dV}{dS} \cdot V = V \cdot \dfrac{dV}{dS}.$

$$\therefore f \cdot dS = V \cdot \frac{dV}{dS} \cdot dS = V \cdot dV.$$

$\therefore V_1, V_2$ என்பன முறையே A, B என்ற நிலைகளில் துகளின் திசை வேகங்களெனில், பகுதி $ALMB$ யின் பரப்பு

$$= \int_{V}^{V_2} V_1 \, dV$$

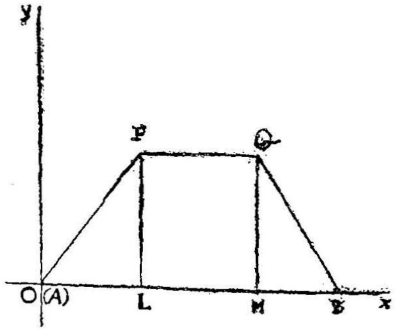
$$= \left[\frac{1}{2} V^2 \right]_{V_1}^{V_2}$$

$$= \tfrac{1}{2} (V_2^2 - V_1^2)$$

ஆகவே, $x = S_1$ $x = S_2$ ஆகிய நிலைத்தூரங்களுக்கிடையே முடுக்க — தூர வளைவரைக்கும், x — அச்சுக்குமிடையேயுள்ள பரப்பு அந்நிலைகளில் துகளின் திசைவேகங்களின் வர்க்சுங் களின் வித்தியாசத்தில் பாதியைக் குறிப்பிடும்.

மாதிரி 21. ஒரு தொடர்வண்டி A என்னும் நிலையத்திலிருந்து புறப்பட்டு a தூரத்திலுள்ள B என்னுப் மற்றொரு நிலையத்தை அடைகிறது. வண்டியானது முதலில் t_1 நேரத்திற்குச் சீர் முடுக்கத்துடனும், பின் t_2 காலத்திற்குச் சீரான வேகத்துடனும், பின்னர் t_3 காலத்திற்குச் சீரான எதிர் முடுக்கத்துடனும் சென்று B யை அடைகிறது. வண்டியின் இயக்கவரை படம் வரைந்து முடுக்கம், எதிர்முடுக்கம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு:



படம் 26

x — அச்சில் காலம் — யையும், y அச்சில் திசைவேகம் V — யையும் குறித்துக் கொள்க. t_1 நேரத்திற்கு வண்டி சீர் முடுக்கத்துடன் செல்வதால், அதன் திசைவேக நேர வளைவரை மேல் நோக்கிய சரிவுடைய ஒரு நேர் கோடாகும். பின்னர் t_2 நேரத்திற்கு வண்டி சீர் வேகத்துடன செல்வதால், அதற்குரிய வளைவரை ஒரு கிடைக்கோடாகும். பின்னர், t_3 நேரத்திற்கு வண்டி சீரான எதிர் முடுக்கத்துடன் செல்வதால் அதற்குரிய வளைவரை கீழ்நோக்கிய சரிவுடைய நேர்கோடாகும்.

O என்பது நிலையையும் A யையும் B என்பது நிலையம் B யையும் குறிப்பிடுகின்றன. OP என்பது t_1 நேரத்தில் சென்ற இயக்கப் பாதையையும், PQ என்பது t_2 நேரத்தில் சென்ற இயக்கப் பாதையையும், QB என்பது t_3 நேரத்தில் சென்ற இயக்கப் பாதையையுப் குறிப்பிடுகின்றன.

PL, QM என்னும் நிலைத் தூரங்களை வரைக.

$a = AB$க்கிடையேயுள்ள தூரம்

$= OPQB$ யின் பரப்பு.

$$= \triangle\, OLP + \text{செவ்வகம்}\ PLMQ + \triangle QMB$$
$$= \tfrac{1}{2}\, OL.PL + PL.LM + \tfrac{1}{2}\, MB.QM$$
$$= \tfrac{1}{2}\, OL.PL + PL.LM + \tfrac{1}{2}\, MB.PL$$
$$= \tfrac{1}{2}\, PL.\, (OL + 2LM + MB)$$
$$= \tfrac{1}{2}\, PL\, (t_1 + 2t_2 + t_3)$$
$$\therefore\quad PL = \frac{2a}{t_1 + 2t_2 + t_3}$$

முதற்பகுதியில் t_1 காலத்திலுள்ள சீர்முடுக்கம் $= OP$யின் சரிவு

$$= \tan \hat{POL}$$
$$= \frac{PL}{OL}$$
$$= \frac{2a}{t_1\,(t_1 + 2t_2 + t_3)}$$

மூன்றும் பகுதியில் t_3 காலத்திலுள்ள சீர் எதிர்முடுக்கம்

$$= QB\text{யின் சரிவு}$$
$$= \tan M\hat{B}Q$$
$$= \frac{QM}{MB}$$
$$= \frac{PL}{MB}$$
$$= \frac{2a}{t_3\,(t_1 + 2t_2 + t_3}$$

பயிற்சி 2.

1. ஒரு நேர்கோட்டில் சீர முடுக்கத்துடன் சென்று கொண்டிருக்கும் ஒரு துகள் 5 விஞடிகளில் 108 அடிகளும், 7 விஞடிகளில் 140 அடிகளும் சென்றுல் அதன் தொடக்க வேகம், முடுக்கம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

2. மணிக்கு 45 மைல் வீதம் சீர்வேகத்துடன் சென்று கொண்டிருக்கும் ஒரு தொடர் வண்டியில் வேகத்தடை செயல் படுத்தப்பட்டபோது 4 அடி (விஞடி)^2 எதிர் முடுக்கம் உண்டா

கிறது. வண்டி நிலையத்தில் நிற்க வேண்டுமாயின் நிலையத்தி லிருந்து எவ்வளவு தூரத்திற்கு முன்னுல் வேகத்தடை செயல் படுத்தப்பட வேண்டும் ?

3. சீர் எதிர்முடுக்கத்துடன் ஒரு நேர்ச் சாலையில் சென்று கொண்டிருக்கும் ஒரு உந்துவண்டி 210 அடி நீளமுள்ள மூன்று சமதூரங்களைக் கடந்து செல்கிறது. இரண்டாவது, மூன்ருவது பகுதிகளை முறையே 3, 4 விஞடிகளில் கடந்து சென்ருல் முதற் பகுதியை எவ்வளவு நேரத்தில் கடந்து சென்றிருக்குமென்று காண்க.

4. ஒரு துகள் ஒரு நேர்கோட்டில் f என்னும் சீர்முடுக்கத் துடன் சென்ருல், u என்பது தொடக்கத் திசைவேகமெனில் புறப்பட்ட நேரத்திலிருந்து $(t+1)$ஆவது விஞடியில் அது கடக்கும் தூரம் $u + \frac{f}{2}(2t+1)$ என்று நிறுவுக.

5. சீர்முடுக்கத்துடன் சென்று கொண்டிருக்கும் ஒருதுகள் p-ஆவது, q-ஆவது, r-ஆவது விஞடிகளில் சென்றுள்ள தூரங் கள் முறையே a, b, c, எனில்,

$$a(q-r) + b(r-p) + c(p-q) = 0$$

என்று நிறுவுக.

6. ஒரு தொடர்வண்டி இரு நிலையங்களுக்கிடையேயுள்ள தூரத்தில் $\frac{1}{m}$ பகுதியை சீரான முடுக்கத்துடனும் $\frac{1}{n}$ பகுதியை சீரான எதிர்முடுக்கத்துடனும் கடக்கிறது. அது ஒரு நிலையத்தில் ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டு, அடுத்த நிலையத்தில் ஓய்விற்கு வருகிறது. வண்டியின் மீப்பெரு திசை வேகத்திற்கும், சராசரி வேகத்திற்குமுள்ள விகிதம் $1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} : 1$ என்று நிறுவுக.

7. ஒரு தொடர் வண்டியின் வேகம் முதலில் O-இலிருந்து v வரை α என்னும் மாறிலி வீதத்தில் அதிகரிக்கிறது ; பின் கொஞ்ச நோத்திற்கு அதன் வேகம் மாறிலியாகவுள்ளது ; இறுதியில் β என்னும் மாறிலி வீதத்தில் O-க்குக் குறைகிறது. வண்டி மொத்தம் சென்ற தூரம் l எனில், மொத்தம் பயணம் செய்த நேரம்

$$\frac{l}{v} + \tfrac{1}{2} v \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)$$

என்று நிறுவுக.

8. ஓய்விலிருந்து புறப்படும் ஒருதுகள் முதலில் f என்னும் சீர்முடுக்கத்துடனும், பின் h என்னும் சீரான எதிர் முடுக்கத்துடனும் செல்கிறது. புறப்பட்டதிலிருந்து t நேரத்திற்குப் பயணம் செய்தபின், புறப்பட்ட இடத்திலிருந்து s தூரத்தில் துகள் ஓய்விற்கு வருகிறது.

$2(f+h)s = fht^2$ என்று நிறுவுக.

9. ஒரு துகள் u என்னும் தொடக்க வேகத்துடன் புறப்பட்டு அடுத்தடுத்த இரு பாதித்தூரங்களை முறையே f, f' என்னும் முடுக்கங்களுடன் கடக்கிறது. அதன் இறுதித் திசைவேகமானது, மொத்தத் தூரத்தையும் $\frac{1}{2}(f+f')$ என்னும் சீர்முடுக்கத்துடன் சென்றிருந்தால் அடையும் இறுதிவேகத்திற்குச் சமமென்று காட்டு.

10. 2 மைல் இடைவெளியிலுள்ள இரு நிலையங்களுள் ஒன்றிலிருந்து புறப்பட்டு மற்றொன்றை அடைய ஒரு தொடர் வண்டிக்கு 4 நிமிடங்களாகின்றன. அதன் இயக்கம் முதலில் x என்னும் சீர்முடுக்கத்துடனும், பின்னர் y என்னும் சீரான எதிர் முடுக்கத்துடனுமிருந்தால், $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 4$ என்று காட்டுக.

11. ஓய்விலிருந்து புறப்படும் ஒரு துகள் சிறிது நேரத்திற்கு அதன் திசைவேகம் v ஆகும் வரை f என்னும் மாறா முடுக்கத்துடனும், பின்னர் அதன் திசைவேகம் $3v$ ஆகும் வரை இரட்டித்த முடுக்கத்துடனும், இறுதியில் $3v$ என்னும் மாறா வேகத்துடன் $\frac{3v}{2}$ என்னும் மாறாவேகத்துடன் தொடக்கத்திலிருந்தே சென்றிருந்தால் எவ்வளவு தூரம் சென்றிருக்குமோ அவ்வளவு தூரத்தை அடையும் வரையும் செல்கிறது. அத்துகள் எடுத்துக் கொள்ளும் நேரம் $\frac{7v}{3f} = 4$ என்று நிறுவுக.

12. சீர்முடுக்கத்துடன் சென்று கொண்டிருக்கும் ஒரு உந்து வண்டி சம இடைவெளிகளிலுள்ள மூன்று விளக்குத் தூண்களை முறையே u_1, u_2, u_3 என்னும் வேகங்களுடன் கடந்து சென்றால், $u_1^2 + u_3^2 = 2u_2^2$ என்று நிறுவுக.

13. ஒருபொருள் l நீளமுள்ள இரு சமதூரங்களை முறையே t_1, t_2 நேரங்களில் கடக்கிறது. அப்பொருளான சீர்முடுக்கத்துடன் சென்று கொண்டிருந்தால், முடுக்கத்தின் மதிப்பு

$$\frac{2l(t_1 - t_2)}{t_1 t_2 (t_1 + t_2)}$$ என்று நிறுவுக.

14. a என்னும் முடுக்கத்துடனும் சென்று கொண்டிருக்கும் ஒரு துகள் ஒரு குறிப்பிட்ட கால இடைவெளியில் h தூரம் செல்கிறது. அதன் சராசரி வேகம் u. அக் கால இடைவெளிக்குள் அதனுடைய திசைவேகம் v அளவிற்கு அதிகரித்துள்ளது. $uv = ah$ என்று நிறுவுக.

15. ஒரு துகள் சீரான முடுக்கத்துடன் சென்று கொண்டிருக்கிறது. t_1, t_2, t_3 ஆகிய மூன்று அடுத்தடுத்த கால இடைவெளிகளில் அதன் சராசரித் திசைவேகங்கள் முறையே v_1, v_2, v_3 எனில்,

$$\frac{v_1 - v_2}{v_2 - v_3} = \frac{t_1 + t_2}{t_2 + t_3}$$

என நிறுவுக.

16. ஒரு துகள் S என்னும் தூரத்தத t வினாடியில் கடக்கிறது. அது ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டு ஓய்வு நிலையை வந்தடைகிறது. பயணத்தின் முதற்பகுதியை f என்னும் மாருமுடுக்கத்துடனும், பிற்பகுதியை r என்னும் மாரு முடுக்கத்துடனும் அது சென்ருல்,

$$t = \sqrt{2s\left(\frac{1}{f} + \frac{1}{r}\right)}$$

என்று நிறுவுக.

17. ஒரு குண்டு ஒரு மரக்கட்டையை v திசை வேகத்துடன் தாக்கி m அடி தூரம் துளைத்துச் செல்கிறது. n அடி $(n < m)$ பருமனுள்ள ஒரு பலகையைத் துளைத்துச் செல்லும்போது (வேகத்தடை முன்போல் சீரானதாகக் கொள்க)

$$v\left\{1 - \sqrt{\frac{m-n}{m}}\right\}$$

அளவில் திசைவேகத்தை இழக்கிறதென்று காட்டு.

18. f என்னும் சீர்முடுக்கத்துடன் சென்று கொண்டிருக்கும் ஒரு துகள் t_1 t_2 என்னும் அடுத்தடுத்த கால இடைவெளிகளில் முறையே S_1 S_2 என்னும் தூரங்களைக் கடக்கிறது.

$$f = \frac{2\,(t_1 s_2 - t_2 s_1)}{t_1 t_2 (s_1 + s_2)}$$

என்று நிறுவுக.

19. ஒரு நேர்கோட்டில் மாறு முடுக்கத்துடன் சென்று கொண்டிருக்கும் ஒரு துகள் $t = o$, $t = n$, $t = 2n$ ஆகிய நேரங்களில் அந்த நேர்கோட்டிலுள்ள ஒரு நிலையான புள்ளியிலிருந்து முறையே a, b, c தூரங்களிலிருப்பதாகக் காணப்பட்டது. அதன் தொடக்கத் திசைவேகம் $\frac{4b-3a-c}{2n}$ என்றும், முடுக்கம் $\frac{c+a-2b}{n^2}$ என்றும் நிறுவுக. மேலும், $t = 3n$ நேரத்தில் அந்த நிலையான புள்ளியிலிருந்து அதன் தூரம் $a + 3(c-b)$ என்று காட்டுக.

20. ஒரு தொடர் வண்டி ஒரு பிரயாணத்தை T நேரத்தில் முடிக்கிறது. அது $\frac{T}{n}$ நேரத்தில் சீர்முடுக்கத்துடனும், பின் $\left(\frac{n-2}{n}\right)T$ நேரத்தில் சீரான வேகத்துடனும் இறுதியில் $\frac{T}{u}$ நேரத்தில் மாறு எதிர் முடுக்கத்துடனும் வேகத்துடனும் சென்றால் சராசரி வேகம் $\left(\frac{n-1}{n}\right)V$ என்று நிறுவுக.

21. உயரேயிருந்து கீழே விழுந்து கொண்டிருந்த ஒரு பொருள் இறுதி விநாடியில் 224 அடி தூரத்தைக் கடக்கிறது. அது எவ்வளவு உயரத்திலிருந்து விழுந்தது என்றும், கீழே விழுவதற்கு அது எடுத்துக் கொண்ட மொத்த நேரம் எவ்வளவு என்றும் காண்க.

22. 260 அடி உயரமுள்ள ஒரு கோபுரத்தின் அடியிலிருந்து ஒரு கல் 128 அடி/விநாடி வேகத்துடன் மேல் நோக்கி வீசி எறியப்படுகிறது. ஒரு விநாடிக்குப் பிறகு, கோபுரத்தின் உச்சியிலிருந்து மற்றொரு கல் கீழே போடப்படுகிறது. எவ்வளவு உயரத்தில் இரு கற்களும் சந்திக்குமென்று காண்க.

23. 240 அடி உயரமுள்ள ஒரு கோபுரத்தின் உச்சியிலிருந்து ஒரு கல் கீழே போடப்படுகிறது. அதே நேரத்தில் மற்றொரு கல் கோபுரத்தின் அடியிலிருந்து மேல் நோக்கி வீசியெறியப்படுகிறது. இரு கற்களும் 96 அடி உயரத்தில் சந்திக்க வேண்டுமானால், இரண்டாவது கல் எவ்வளவு திசைவேகத்துடன் எறியப்படவேண்டும்?

24. 40 அடி/விநாடி வேகத்துடன் மேல்நோக்கி வீசி எறியப்பட்ட ஒரு கல் எறி புள்ளியிலிருந்து 144 அடிக்குக் கீழே போய் விழுகிறது. கல் எடுத்துக் கொண்ட நேரம் யாது?

25. ஒரு பந்து நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கி g திசை வேகத்துடன் எறியப்படுகிறது. ஒரு விநாடிக்குப்பின் மற்றொரு பந்து அதே எறிபுள்ளியிலிருந்து $2g$ திசைவேகத்துடன் நிலைக் குத்தாக மேல்நோக்கி எறியப்படுகிறது. இரண்டு பந்துகளும் எங்கே, எப்போது சந்திக்குமென்று காண்க.

26. ஒரு பலூன் 50 அடி/விநாடி வேகத்துடன் நிலைக்குத் தாக மேல்நோக்கிப் பறந்து கொண்டிருக்கிறது. அதிலிருந்து நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கி எறியப்பட்ட ஒரு கல் தரையை 10 விநாடிகளில் வந்தடைகிறது. (i) கல் எறியப்படும்போது (ii) கல் தரையை அடையும்போது பலூனின் உயரத்தைக் காண்க. (iii) மேலும், கல் மேலே சென்றுள்ள மிக அதிகமான உயரத் தையும் காண்க.

27. மூன்று பந்துகள் $h_1, h_2\, h_3$ ஆகிய உயரங்களிலிருந்து முறையே $u_1,\ u_2\ u_3$ ஆகிய தொடக்க வேகங்களுடன் நிலைக்குத் தாக மேல்நோக்கி எறியப்படுகின்றன. அவை மூன்றும் தரையில் ஒரே நேரத்தில் விழுந்தால்

$$\frac{h_1 - h_2}{u_1 - u_2} = \frac{h_2 - h_3}{u_2 - u_3} = \frac{h_3 - h_1}{u_3 - u_1}$$

என்று நிறுவுக.

28. a முடுக்கத்துடன் நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கிப் பறந்து கொண்டிருக்கும் ஒரு பலூனிலிருந்து ஒரு கல் கீழே போடப்படுகிறது. இதற்குப்பின் t_1 நேரத்தில் மற்றொரு கல் போடப்படுகிறது. இரண்டாவது போடப்பட்ட பிறகு t நேரத்தில் இரு கற்களுக்குமிடையேயுள்ள தூரம்

$$\tfrac{1}{2}\, t_1\, (a + g)\, (t_1 + 2t)$$

என்று நிறுவுக.

29. மூன்று கற்கள் $a_1, a_2\, a_3$ என்னும் உயரங்களிலிருந்து முறையே $u_1,\ u_2, u_3$ தொடக்க வேகங்களுடன் நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கி ஒன்றுபோல எறியப்படுகின்றன. மூன்று கற்களும் தரையில் ஒரே நேரத்தில் விழுந்தால்

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = O$$

என்று நிறுவுக.

30. நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கி எறியப்பட்ட ஒரு கல் ஒரு புள்ளியை அது எரியப்பட்ட கணத்திலிருந்து t_1 விநாடிகளில் கடந்து செல்கிறது. அதன் பின்னர் t_2 விநாடிகளில் அது தரையை வந்தடைகிறது. அப்புள்ளியின் உயரம் $16\ t_1\ t_2$ அடி என்றும், அந்தப் புள்ளிக்கும் எறிபுள்ளிக்கும் நடுவிலுள்ள புள்ளியை அது $16\ \sqrt{t_1^2 + t_2^2}$ அடி/விநாடி வேகத்தில் கடந்து செல்லுமென்றும் நிறுவுக.

31. ஒரு கல் மேல்நோக்கி எறியப்படுகிறது. எறி புள்ளிக்குமேலே h உயரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியை அந்தக்கல் $t_1\ t_2$ ஆகிய நேரங்களில் அதன் மேல்நோக்கிய, கீழ்நோக்கிய இயக்கங்களில் கடந்து சென்றால் $h = \frac{1}{2} g\ t_1\ t_2$ என்று காட்டுக.

32. நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கி எறியப்பட்ட ஒரு பந்து அதன் பாதையிலுள்ள ஒரு புள்ளியை t_1 விநாடிகளில் கடந்து செல்கிறது. அதன்பின்னர் மேலும் t_2 விநாடிகளில் அது தரையை வந்தடைகிறது. கல் செல்லும் மிக அதிகமான உயரம் $\frac{g}{8}\ (t_1 + t_2)^2$ என்றும், எறிவேகம் $\frac{g}{2}\ (t_1 + t_2)$ அடி/விநாடி என்றும் நிறுவுக.

33. f என்னும் சீர்முடுக்கத்துடன் மேல் நோக்கிப் பறந்து கொண்டிருக்கும் ஒரு பலூனிலிருந்து, பலூனைப் பொறுத்து u சார் வேகத்துடன் ஒரு கல் மேல்நோக்கி எறியப்படுகிறது: கல் எறியப்பட்டதிலிருந்து t விநாடிகளில் பலூன் கல்லைக் கடந்து சென்றால்

$$u = \frac{t}{2}\ (f + g)$$

என்று காட்டு.

34. f என்னும் சீர்முடுக்கத்துடன் நிலைக்குத்தாக மேல் நோக்கிப் பறந்து கொண்டிருக்கும் ஓர் ஆகாய விமானத்தி லிருந்து ஒரு பந்து கீழே போடப்படுகிறது. இதன் பின்னர் 6 விநாடிகட்குப்பின் மற்றொரு பந்து அதே விமானத்திலிருந்து போடப்படுகிறது. முதல் பந்து போடப்பட்டதிலிருந்து 9 விநாடிகட்குப்பின் இரு பந்துகட்குமிடையேயுள்ள தூரம் $36\ (f + g)$ என்று காட்டு.

35. ஒரு வழவழப்பான சாய்தளத்தின் அடியிலிருந்து சாய் தளத்தின்மேல் 24 அடி/விநாடி வேகத்துடன் வீசப்பட்ட ஒரு

கல் ஒரு வினாடியில் சாய்தளத்தின் உச்சியைச் சரியாக வந்தடைகிறது. கிடைத்தளத்துடன் சாய்தளத்தின் சாய்வையும், அதன் உயரத்தையும் காண்க.

36. ஒரு சாய்தளத்தின் உயரம் அதன் நீளத்தில் $\frac{3}{5}$ பாக முள்ளது. அதன் அடியிலிருந்து சாய்தளத்தின்மீது மேல் நோக்கி எறியப்படுகிறது. கல் தளத்தின்மீது சென்று பின் கீழ் முகமாக நழுவி புறப்பட்ட இடத்தை அடைகிறது. கல் தளத்தில் மேல்நோக்கிச் சென்ற தூரத்தையும், புறப்பட்ட இடத்தை அடையும் நேரத்தையும் காண்க.

37. இரண்டு நிலைக்குத்து வட்டங்கள் அவற்றின் மிக உயர்ந்த புள்ளிகளில் தொடுகின்றன. அத்தொடு புள்ளி வழியே ஒரு நேர்கோடு இருவட்டங்களையும் வெட்டுமாறு வரையப்படுகிறது. இரு வட்டங்களின் பரிதிகளுக்கிடையேயுள்ள நேர் கோட்டுப் பகுதியில் ஒரு பொருள் நழுவுவதற்காகும் நேரம் ஒரு மாறிலியென்று நிறிவுக.

(38) ஒரு வட்டம் நிலைக்குத்தாக வைக்கப்பட்டுள்ளது. அதன் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளி வழியே செல்லும் ஒரு நாண் மீது ஒரு துகள் நழுவிச் செல்கிறது. அவ்வாறு நழுவிச் செல்லும் துகளின் வேகத்தின் கிடைக்கூறு மீப்பெரிதாக யிருக்க வேண்டுமாயின் அந்த நாணை நிர்ணயிக்கவும்.

(39) ஒரே தளத்திலுள்ள இரு வட்டங்கள் அவற்றின் மையக்கோடு நிலைக்குத்தாக யிருக்குமாறு வெளிப்புறமாகத் தொடுகின்றன. தொடுபுள்ளி வழியே செல்லும் எந்த வழவழப்பான நேர்கோட்டின் வழியாகவும் மேல் வட்டத்திலிருந்து கீழ் வட்டத்திற்கு நழுவிச் செல்லும் நேரம் ஒரு அளவாகயிருக்குமென்று காட்டு.

(40) ஒரு நேர்கோண முக்கோணம் நேர் கோணத்தைக் கொண்டுள்ள பக்கங்களுள் ஒன்று நிலைக்குத்தாக யிருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. கர்ணத்தின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து நேர்கோண மூலைக்கு நழுவிச் செல்லும் நேரம் மிகக் குறைந்ததாக யிருக்குமாறு கர்ணத்தின் மேல் ஓர் புள்ளியை நிர்ணயிக்கவும்.

(41) அச்சு நிலைக்குத்தாகவும், உச்சி தலைகீழாகவுமிருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ள ஒரு பரவளைவின் குவியத்திலிருந்து (focus) ஒரு துகள் குவியல் நாண்வழியே நழுவுகிறது. மிக

விரைவு இறக்கக் கோட்டின் நீளம் செவ்வகத்திற்குச் சம மென்று நிறுவுக.

(42) ஒரு துகள் நேர்கோட்டில் சம நிலையிலிருந்து f எனும் சீரான முடுக்கத்துடன் சிறிது நேரம் இயங்கிப் பின்னர் சீரான வேகத்துடன் இயங்கிப் f எனும் சீரான தளர்வு முடுக்கத்துடன் இயங்கி, புறப்பட்ட இடத்திலிருந்து S எனும் தூரத்தில் நிற்கிறது. அதன் வேகம் — நேரம் காட்டும் வரைபடத்தைத் துணைப்படம் காட்டி அதன் வழியாகவோ அல்லது வேறு வழியிலோ சீரான வேகத்துடன் துகள் இயங்கிய நேரம் $\sqrt{t^2 - \frac{4S}{f}}$ எனக் காண்க. இங்கு t என்பது துகள் இயங்கிய மொத்த காலமாகும். (மதுரை பி. எஸ். ஸி. 1972 செப்.)

(43) ஒரு துகள் சம நிலை (ஓய்வுநிலை) யிலிருந்து α எனும் முடுக்கத்துடன் சிறுது நேரம் இயங்கிப் பின்னர் β எனும் தளர் முடுக்கத்துடன் இயங்கி a எனும் தூரம் மொத்தமாகச் சென்று சமநிலைக்கு t நேரத்தில் வருகிறது என்றால் $\alpha \beta t^2 = 2a(\alpha + \beta)$ எனக் காண்க.

(மதுரை பி. எஸ்ஸி. 1972 ஏப்.)

(44) ஒரு துகள் நிலைக்குத்தாக மேல் நோக்கி u செ. மீ./ விஞடி. வேகத்துடன் வீசியெறியப்படுகிறது. t விஞடிகளுக்குப் பின் அதே புள்ளியிலிருந்து அதே திசைவேகத்துடன் மற்ெருரு துகள் மேல்நோக்கி எறியப்படுகிறது. இரு துகள்களும் $\left(\frac{t}{2} + \frac{u}{8}\right)$ விஞடிகளுக்குப் பிறகு $\left(\frac{4u^2 - g^2 t^2}{8g}\right)$ செ. மீ. உயரத்தில் சந்திக்குமென்று நிறுவுக.

(சென்னை பி. எஸ்ஸி. 1969 செப்.)

2. இயக்க விதிகள்
(Laws of Motion)

பொருட்களில் இயக்கம் ஏற்படுவதற்கான காரணங்கள் பற்றிய குறிப்புக்களேதுமின்றி, அவற்றின் இயக்கங்களின் தன்மைகள் பற்றி முன் அத்தியாயத்தில் ஆராய்ந்தோம். எடுத்துக்காட்டாக, இயக்கத்திலிருக்கும் ஒரு துகள் ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில் செல்லும் தூரம், அந்த நேரத்தில் அதன் திசைவேகம், முடுக்கம் ஆகியவற்றைக் காண்பதற்கான சூத்திரங்கள் ஆகியவற்றைக் கண்டோம். ஆனால் அப்பொருட்கள் திசைவேகம், முடுக்கம் முதலானவற்றை எவ்வாறு பெற்றன என்பது விவரிக்கப்படவில்லை. நியூட்டன் என்னும் அறிஞரால் வரையறுக்கப்பட்ட "இயக்க விதிகள்" பற்றி இவ்வத்தியாயத்தில் ஆராய்வோம்.

நியூட்டனுக்கு முன்பே பல அறிஞர்கள் பொருட்களின் இயக்கம் பற்றிய ஆய்வில் ஈடுபட்டு பலவிதிமுறைகளை வகுத்தளித்துள்ளனர். கலீலியோ Galileo, (1564-1642) என்னும் அறிஞர் கீழேவிழும் பொருட்களின் விதிகள், சடத்துவவிதி (Law of Inertia) போன்றவற்றை ஆராய்ந்ததோடு, இயக்கத்திலிருக்கும் பொருட்களின் முடுக்கம், பொருட்களில் இயக்கத்தை உண்டுபண்ணும் விசை போன்றவை பற்றிய கருத்துக்களையும் முதன் முதலில் வெளிப்படுத்தி "இயக்க விசையியலின் தந்தை?" (Father of Dynamics) என்றழைக்கப்படும் பேறு பெற்றார். ஹைஹென்ஸ் (Huygens)—1629—1695) என்பவர், அலைவுமையக் கொள்கை (Theory of centre Oscillation), ஊசலிக்கடிகாரக் கண்டுபிடிப்பு, ஊசலினுதவியால் புவியீர்ப்பு முடுக்கம் g யின் மதிப்பை நிர்ணயித்தல், மையவிட்டோடும் விசை (centrifugal force) பற்றிய சில தேற்றங்கள் போன்ற பலவற்றை இயக்க விசையியல் என்னும் இவ்வறிவியலுக்கு அளித்ததன் மூலம் இவ்வறிவியலின் விளர்ச்சிக்குக் காரணமானவர்களுள் ஒருவராகப் பெரிதும் போற்றப்படுகின்றார். கெப்ளர் (Kepler, 1571-1630) என்பவர் கோள்களின் மூன்று இயக்க விதிகளை அளித்துப் பெருமை பெற்றார். இருப்பினும் பொருட்களின் இயக்கம் பற்றிய விதிகளைத் திட்டவட்டமாக வரை

யறுத்துக் கூறியவர் சர். ஐசக் நியூட்டன் (Sir Issac Newton, 1642-1727) என்னும் அறிஞரே ஆவார். அவர் வகுத்துக் கூறிய இயக்க விதிகள் அவர் பெயராலேயே "நியூட்டன் இயக்க விதிகள்" (Newton's Laws of Motion) என்றழைக்கப்படு கின்றன. அவ்விதிகளாவன :

முதல்விதி : ஓய்வு நிலையிலிருக்கின்ற, அல்லது ஒரு நேர் கோட்டில் சீரான இயக்கத்துடன் இயங்கிக் கொண்டிருக்கின்ற ஒவ்வொரு பொருளும் புறவிசைகளின் தாக்குதல்களினால் தன் நிலையை மாற்றிக்கொள்ளப் பலவந்தப் படுத்தப்பட்டாலொழிய தொடர்ந்து அந்நிலையிலேயே இருந்துவரும்.

இரண்டாம் விதி : ஒரு விசையின் தாக்கத்திற்குள்ளான ஒரு பொருளின் உந்தமாறு வீதம் (Rate of change of momentum) அவ்விசைக்கு விகித சமமாயிருப்பதோடு அவ் விசையின் செயற்கோட்டின் திசையிலேயே செயல்படும்.

மூன்றும் விதி : ஒவ்வொரு விசைத் தாக்கத்திற்கும் எப் பொழுதும் ஒரு சம எதிர் விசைத் தாக்கம் உண்டு.

இம்மூன்று விதிகளும் தாம் இயக்க விசையியலுக்கு அடிப் படையாக அமைகின்றன. இவ்விதிகளை நிரூபிக்க முடியா விடினும் இவற்றின் உண்மைகளை எவராலும் மறுக்க முடிய வில்லை. இவ்விதிகள் வானியலில் கோள்களின் இயக்கத் திற்கும் பொருந்துபவனவாக யிருக்கின்றன. இவ்விதிகளின் அடிப்படையில் தான் வானியல் அறிஞர்களால் சூரிய, சந்திர கிரகணங்களை முன்னதாகவே அறிவிக்க முடிகிறது. இருப்பி னும், இவ்விதிகளின் அடிப்படையில் நிர்ணயிக்கப்பட்ட கோள் களின் அறிமுறை இயக்கத்திற்கும், உண்மையாகக் கண்டறியப் பட்ட கோள்களின் இயக்கத்திற்கும் சிற்சில முரண்பாடு களுள்ளன. ஆனால் கி. பி. 1905 இல் ஆல்பர்ட் அயின்ஸ்டீன் என்னும் அறிஞர் இவ்விதிகளைத் திருத்தி தமது சார்ச்சித் தத்துவத்தை (Principle of Relativity) அறிவித்தபோது மேற் கூறப்பட்ட முரண்பாடுகள் நீக்கப்பட்டு விட்டன. ஆயினும், எல்லா நடைமுறை நோக்கங்களுக்கும் இவ்விதிகள் போதுமான அளவில் சரியாக இருக்கின்றன. எனவே, அயின்ஸ்டீனின் சார்ச்சித் தத்துவத்தின் காரணமாக நியூட்டனின் இயக்கவிதி களின் முக்கியத்துவம் எவ்வகையிலும் குறைந்துவிடவில்லை.

எந்தப் பொருளாலும் தன் நிலையைத் தானகவே மாற்றிக் கொள்ள இயலாது. எடுத்துக்காட்டாக, சீரான வேகத்துடன்

சென்று கொண்டிருக்கும் ஒரு தொடர் வண்டியில் ஒரு மனிதன் நின்று கொண்டு பயணம் செய்வதாகக் கொள்வோம். எனவே, அம்மனிதனும் வண்டியின் வேகத்துடன் சென்று கொண்டிருக்கிருன் என்று கூறலாம். அவ்வண்டி தன் வேகத்தையும், திசையையும் மாற்றிக் கொள்ளாதவரை அம்மனிதன் தான் வண்டியின் வேகத்துடன் முன்னேக்கிக் கொண்டு செல்லப்படுவதை உணரமாட்டான். ஆனல், வண்டி திடீரென நின்றுவிட்டால், அம்மனிதன் முன்புறமாக விழுந்து விடுவான். என்ன காரணம்? வண்டியின் வேகம் திடீரென குறைக்கப் பட்ட போதிலும், அம்மனிதன் அதே வேகத்துடன் இயக்கத்தி லிருப்பதும், அதனல் தானுகவே தன்னுடைய வேகத்தைத் திடீரென குறைத்துக் கொள்ள முடியாததுமேயாகும். இவ்வாறு, பொருட்களின் தன்னிலே மாற்றிக் கொள்ள இயலாத் தன்மையே ''சடத்துவம்'' அல்லது ''நிலேமம்'' (Inertia) என்று சொல்லப்படுகிறது. பொருட்களின் சடத்துவத் தத்துவத்தையே நியூட்டனின் முதல் விதி விளக்குகிறது. மேலும், எந்தப் பொருளும் ஏதேனுமொரு புறவினையின் தாக்குதலுக் குட்படுத்தப் பட்டால் மட்டுமே தன் நிலையை மாற்றிக் கொள்ள இயலும் என்றும் முதல் விதி கூறுகிறது. இவ்வாறு ஒரு பொருள் தன் நிலையை மாற்றிக் கொள்ளச் செய்கின்ற புறவினையே ''விசை,' (Force) என்று சொல்லப்படுகிறது. ஆகவே, முதல் விதியின் உதவியால் விசை யென்பது கீழ்க் கண்டவாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

''ஒரு பொருளின் மீது செயல் படுத்தப்பட்டு அப்பொருளின் ஒய்வு நிலையை அல்லது ஒரு நேர்கோட்டிலுள்ள அதன் சீரியக்கத்தை மாற்றுகின்ற அல்லது மாற்ற முயலுகின்ற வினையே ''விசை'' எனப்படும்.

மேலும், ஒரு பொருளின் பொருண்மை (Mass) பற்றிய வரையறையையும் முதல் விதியளிக்கிறது. ஒரு பொருள் மீது செயல்படும் விசை, அப்பொருள் ஓய்விலிருந்தால் அதை நகரச் செய்கிறது; அது சீரியக்கத்துடன் நகர்ந்து கொண்டிருந்தால் அதன் இயக்கத்தை மாற்றுகிறதென்று முதல் விதியின் மூலம் கண்டோம். அதாவது, ஒரு பொருளின் மீது செயல்படும் ஒரு விசை அப்பொருளுக்கு ஒரு முடுக்கத்தைக் கொடுக்கிறது. மறுதலையாக, முடுக்கத்துடனிருக்கும் ஒரு பொருள் மீது ஒரு விசை செயல்பட்டுக் கொண்டிருக்கும்.

F என்னும் ஒரு விசை ஒரு பொருளின்மீது செயல்பட்டு அப் பொருளுக்கு f_1 என்னும் முடுக்கத்தைக் கொடுப்பதாகவும்,

அதே விசை (அல்லது அதற்குச் சரிசமமான மற்றொரு விசை) மற்றொரு பொருளின்மீது செயல்பட்டு, அதற்கு f_2 என்னும் முடுக்கத்தைக் கொடுப்பதாகவும் கொள்வோம். $f_1 = f_2$ எனில், இரு பொருட்களும் சம சடத்துவமுடையதாகவும், $f_1 > f_2$ எனில் முதற்பொருள் இரண்டாவது பொருளைக்காட்டிலும் அதிகச் சடத்துவமுடையதாகவும் சொல்லப்படுகிறது. ஆனால் F-இன் அளவு எவ்வாறிருந்த போதிலும் $\frac{f_1}{f_2}$ என்னும் விகிதம் மாருமலிருக்குமென்பது பரிசோதனைகளின் மூலம் கண்டறியப்பட்ட உண்மையாகும். இவ்விரு பொருட்களுள் இரண்டாவது பொருளின் சடத்துவம் ஒரு அலகு என்று எடுத்துக் கொள்ளப்பட்டால், $\frac{f_1}{f_2}$ என்பது முதற்பொருளின் சடத்துவமாக அளவிடப்படுகிறது. ஒரு பொருளின் சடத்துவ அளவே அதன் 'பொருண்மை' (Mass) என்றழைக்கப்படுகிறது. எனவே, பொருண்மை என்பது ஒரு பொருளின் சடத்துவத்தை அளவிடுகின்ற ஒரு திசையிலிக் கணியமாகும்.

அ-ரா-வி முறையில் பொருண்மையின் அலகு ஒரு ராத்தல் என்றும், செ-கி-வி. முறையில் அதன் அலகு ஒரு கிராம் என்றும் கொள்ளப்படுகின்றன.

பொருட்களில் இயக்கத்தையுண்டு பண்ணுகின்ற விசைகளை அளவிடும் வகையினை இரண்டாம் விதி அளிக்கிறது. இயக்கத்திலிருக்கும் ஒரு பொருளின் பொருண்மை, அதன் திசைவேகம் ஆகியவற்றின் பெருக்கம் 'உந்தம்' (Momentum) எனப்படும். திசைவேகம் ஒரு திசையியாகையால் உந்தமும் ஒரு திசையியாகும். m என்னும் பொருண்மையுள்ள ஒரு பொருள் V என்னும் திசைவேகத்துடன் நகர்ந்து கொண்டிருந்தால் அப்பொருளின் உந்தம் mV ஆகும். ஆகவே, F என்னும் ஒரு விசை m பொருண்மையுள்ள ஒரு பொருள்மீது t என்னும் காலத்திற்குச் செயல்படுத்தப்படுகிறதென்று கொள்க. அவ்விசையின் தாக்கத்தின் காரணமாகப் பொருளின் திசைவேகமும் மாறுபடும். எனவே, அப்பொருளின் உந்தமும் மாறுபடும். இவ்வுந்த மாறுதலின் வீதமானது அவ்விசைக்கு விகித சமமாயிருக்குமென்பதையே இரண்டாம் விதி கூறுகிறது. mV என்பது உந்தமாகையால் $\frac{d}{dt}(mV)$ என்பது உந்தமாறு வீதமாகும். இரண்டாம் விதியின்படி, இவ்வுந்த மாறுவீதமானது செயல்படுத்தப்பட்ட விசைக்கு விகித சமத்திலிருக்கும்.

அதாவது, $\frac{d}{dt}(mV) \propto F$

எனவே, k என்பது விகித சம மாறிலியாயின்,

$$\frac{d}{dt}(mV) = k\,F$$

ஆகும். அதாவது, $m.\frac{dV}{dt} = k\,F$

ஆனால் $\frac{dV}{dt}$ என்பது முடுக்கமாகும். இம்முடுக்கம் Q என்று குறிப்பிடப்பட்டால், $mQ = k\,F$

ஆகும். இப்பொழுது ஓர் அலகு விசையென்பது ஓர் அலகு பொருண்மையுள் ஒரு பொருளில் தன்னுடைய தாக்கத்தினுல் ஓர் அலகு முடுக்கத்தையுண்டு பண்ணுகின்ற விசையென்று வரையறுக்கப்பட்டால், $m = 1$, $Q = 1$ ஆகயிருக்கும்போது $F = 1$ ஆகும்.

$$\therefore \quad 1.1 = 1.1$$

அல்லது, $k = 1$ ஆகும். இவ்வாறு,

$$F = mQ$$

என்னும் சூத்திரத்தைப் பெறுகிறோம். இச்சூத்திரத்திற்கு ''இயக்கச் சமன்பாடு' (Equation of Motion) என்று பெயர். இச்சூத்திரம் விசைகளை அளவிடப் பயன்படுகிறது. மேலும், பொருட்களின் பொருண்மைகளை அளவிடவும் இச் சூத்திரம் பயன்படுகிறது. எவ்வாறெனில், இரு வெவ்வெறு பொருண்மைகளையுடைய பொருட்களின்மீது இரு சம விசைகளைச் செயல் படச் செய்து, அவ்விரு பொருட்களும் பெறுகின்ற முடுக்கங்களை அளவிட்டு, $m = \frac{F}{2}$ என்ற தொடர்பின் மூலம் அப்பொருட்களின் பொருட்களை ஒப்பிடலாம். இவ்விரு பொருட்களுள் ஒன்றின் பொருண்மை ஓர் அலகு இருக்குமாறு எடுத்துக் கொண்டால், மற்ற பொருளின் பொருண்மையைக் கணக்கிடலாம். அது மட்டுமன்று ; இச் சூத்திரத்திலிருந்து, $F = o$ எனில் $Q = o$ என்று காண்கிறோம். அதாவது, ஓய்விலிருக்கின்ற அல்லது ஒரு நேர்கோட்டில் சீரியக்கத்திலிருக்கின்ற ஒரு பொருள் புறவிசையினுல் தாக்கப்படாதிருக்குமே யானுல், அதன் தன்னிலையை மாற்றிக் கொள்ள இயலாதென்ற முதல் விதியைப் பெறுகிறோம்.

குறிப்பு : முடுக்கம் ஒரு திசையி ஆகையால் விசையும் ஒரு திசையியாகும்.

விசையின் அலகுகள்

அ-ரா-வி. முறையில் பொருண்மை, முடுக்கம் ஆகியவற்றின் அலகுகள் முறையே ஒரு ராத்தல், ஓர் அடி/(விஞடி)^2 ஆகும். எனவே, ஓர் அலகு விசை என்பது ஒரு ராத்தல் பொருண்மை யுள்ள ஒரு பொருளில் ஒரு அடி/(விஞடி)^2 முடுக்கத்தையுண்டு பண்ணக்கூடிய விசையாகும். இவ் வலகு விசை ஒரு ராத்தலி (Poundal) என்றழைக்கப்படுகிறது. ஆகவே, ஒரு ராத்தல் பொருண்மையுள்ள ஒரு பொருளின்மீது ஒரு ராத்தலி விசை செயல்பட்டால், அப்பொருள் ஒரு அடி/(விஞடி)^2 முடுக்கத்தைப் பெறும்.

செ-கி-வி முறையில் பொருண்மை, முடுக்கம் ஆகியவற்றின் அலகுகள் முறையே ஒரு கிராம், ஒரு செ.மீ./(விஞடி)^2 ஆகும். எனவே, இம் முறையில் ஓர் அலகு விசை என்பது ஒரு கிராம் பொருண்மையுள்ள ஒரு பொருளில் ஒரு செ.மீ. (விஞடி)^2 முடுக்கத்தையுண்டு பண்ணக்கூடிய விசையாகும். இவ் வலகு விசை ஒரு டைன் (Dyne) என்னும் பெயரால் அழைக்கப்படு கிறது. ஆகவே, ஒரு கிராம் பொருண்மையுள்ள ஒரு பொருளின் மீது ஒரு டைன் விசை செயல்பட்டால் அப்பொருள் ஒரு செ.மீ./(விஞடி)^2 முடுக்கத்தைப் பெறும்.

இவை தவிர மீட்டர்-கிலோகிராம்-விஞடி ஆகியவற்றை முறையே தூரம், பொருண்மை, காலம் ஆகியவற்றின் அலகு களாகக் கொண்ட மீ-கி-வி என்ற முறையுமுள்ளது. இது செ-கி-வி. முறையின் ஒரு தனி வகையேயாகும். செ-கி-வி. முறையில் தூரம், பொருண்மை ஆகியவற்றின் அலகுகளாகிய சென்டிமீட்டர், கிராம் ஆகியவை மிகவும் சிறிய அளவுகளாக யிருப்பதால் நடைமுறையில் பெரும்பாலும் பயன்படக்கூடிய மீட்டர் (= 100 செ.மீ.), கிலோ கிராம் (= 1000 கிராம்) ஆகியவை முறையே தூரம், பொருண்மை ஆகியவற்றின் அலகு களாக எடுத்துக் கொள்ளப்படுகின்றன. இம்முறையில் ஒரு அலகு விசை என்பது ஒரு கிலோகிராம் பொருண்மையுள்ள ஒரு பொருளில் ஒரு மீட்டர்/(விஞடி)^2 முடுக்கத்தையுண்டு பண்ணக் கூடிய விசையாகும். இவ்வலகு விசை ஒரு நியூட்டன் (Newton) என்று சர். ஐசக் நியூட்டனின் பெயராலேயே அழைக்கப்படு கின்றது. ஆகவே, ஒரு கிலோ கிராம் பொருண்மையுள்ள ஒரு பொருளின்மீது ஒரு நியூட்டன் விசை செயல்பட்டால் அப் பொருள் ஒரு மீட்டர்/(விஞடி)^2 முடுக்கத்தைப் பெறும்.

மேற்கூறப்பட்ட டைன், ராத்தலி, நியூட்டன் ஆகிய விசை யலகுகள் யாவும் தனியலகுகள் அல்லது சார்பிலா அலகுகள் (Absolute units) என்றழைக்கப்படுகின்றன.

ஈர்ப்பலகுகள் (Gravitational units)

மேல் நோக்கி எறியப்படும் பொருட்கள் யாவும் சிறிது தூரம் மேலே சென்று பின் கீழே விழுவதை நாமறிவோம். பூமியின் ஈர்ப்புக் கவர்ச்சியின் காரணமாகவே மேலே எறியப்பட்ட பொருட்கள் யாவும் கீழ்நோக்கி விழுகின்றன. அவ்வாறு கீழ் நோக்கி ஈர்க்கப்படுகின்ற பொருட்களின் திசைவேகத்தில் ஒரு முடுக்கம் ஏற்படுவதைக் காணலாம். இம் முடுக்கத்திற்குப் புவி யீர்ப்பு முடுக்கம் (Accleration due to Gravity) என்று பெயர். இப் புவியீர்ப்பு முடுக்கம் g என்று குறிப்பிடப்படுகிறதென்று நாம் முன்பே குறிப்பிட்டுள்ளோம். ஈர்ப்புக் கவர்ச்சி விதியின்படி, பொருட்களைத் தன் வசமிழுக்கின்ற பூமியின் ஈர்ப்புக் கவர்ச்சி விசையானது பொருட்களின் பொருண்மைகளுக்கு விகித சமமா யிருக்குமென்று கண்டறியப்பட்டுள்ளது. இதன் காரணமாக, பூமியின் ஈர்ப்புக் கவர்ச்சியினால் கீழே விழும் பொருட்களிலேற் படுகின்ற ஈர்ப்பு முடுக்கம் எல்லாப் பொருட்களுக்கும் ஒரே அளவினதாகயிருக்குமென்றும் காணப்பட்டுள்ளது. அ-ரா-வி. முறையில் இப் புவியீர்ப்பு முடுக்கத்தின் அளவு 32 அடி/(வினாடி)^2 என்றும், செ-கி-வி. முறையில் அதன் அளவு 981 செ.மீ./(வினாடி)^2 என்றும் நடைமுறைக் கணக்கீடுகளுக்குப் பயன் படுத்தும் வகையில் ஏற்றுக் கொள்ளப்பட்டுள்ளன.

புவியீர்ப்புக் கவர்ச்சியின் காரணமாக, m பொருண்மை யுள்ள ஒரு பொருள் பூமியின் மையத்தை நோக்கி g முடுக்கத் துடன் ஈர்க்கப்படுவதால், அப் பொருளில் செயல்படும் ஈர்ப்பு விசை mg ஆகும். இவ்வீர்ப்பு விசையே அப்பொருளின் எடை (Weight) என்றழைக்கப்படுகிறது. எடையை W என்று குறிப் பிட்டால், $W = mg$ ஆகும். விசையின் அலகு செ-கி-வி. முறை யில் டைன் என்றும், அ-ரா-வி. ராத்தலியென்றும் வரையறுக்கப் பட்டுள்ளனவாகையால் ஒரு பொருளின் எடை W ஆனது செ-கி-வி. முறையில் mg டைன்கள் என்றும் அறிந்து கொள்ள லாம். நடைமுறையில் ஓர் அலகு பொருண்மையுள்ள ஒரு பொருளின் எடையே ஒரு விசையலகாகப் பயன்பட்டு வருகிறது. இந்த முறை அலகுக்கு ஈர்ப்பலகு (Gravitational unit) என்று பெயர். அ-ரா-வி. முறையில் விசையின் ஈர்ப்பலகு என்பது ஒரு ராத்தல் எடை (Pound Weight) ஆகும்; அதாவது ஒரு ராத்தல் பொருண்மையுள்ள பொருளின் எடையாகும். செ-கி-வி

முறையில் விசையின் ஈர்ப்பலகு என்பது ஒரு கிராம் எடை (Gram Weight) ஆகும் ; அதாவது, ஒரு கிராம் பொருண்மை யுள்ள ஒரு பொருளின் எடையாகும்.

எனவே,

1 ராத்தல் எடை $= g$ ராத்தலிகள் $= 32$ ராத்தலிகள்,

1 கிராம் எடை $= g$ டைன்கள் $= 981$ டைன்கள்

என்று காணலாம். ஆகவே,

1 ஈர்ப்பலகு $= g$ தனியலகுகள்

என்று அறிந்து கொள்க.

ஒவ்வொரு விசைத் தாக்கத்திற்கும் எப்பொழுமே ஒரு சம எதிர்விசைத் தாக்கம் உண்டு என்பது மூன்ரும் விதி. *A* என்னும் ஒரு பொருள் *B* என்னும் மற்ளுெரு பொருளின் மீது ஏதேனுமொரு விசையினுல் தாக்குதல் செய்தால், *B* யானது *A* யின் மீது அவ் விசைத் தாக்குதலுக்குச் சமமான எதிர் விசையால் தாக்குதல் செய்யுமென்று இவ்விதி கூறுகிறது. எனவே, *A*யின் விசைத் தாக்கத்திஞல் *B* யில் ஏற்படுகின்ற உந்தமும், *B* யின் எதிர் விசைத் தாக்கத்திஞல் *A* யில் ஏற்படுகின்ற உந்தமும் சமமாக வும் எதிராகவுமிருக்கும். எனவே, ஒரு குறிப்பிட்ட திசையில் இவ்வுந்தங்களின் மொத்தம் ஒரு மாறிலியாகயிருக்கும். இக் கொள்கையே உத்தக் காப்புத் தத்துவமாகப் பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

உந்தக் காப்புத் தத்துவம் (Principle of conservation of Linear Momentum)

ஒன்றையொன்று ஈர்க்கின்ற அல்லது தாக்குகின்ற பொருட் களின் ஒரு குறிப்பிட்ட திசையிலுள்ள மொத்த உந்தம், அத் திசையில் புறவிசை யேதும் செயல்பட்டாலன்றி, ஒரு மாறிலி யாகும்.

மூன்ரும் விதியின் விளக்கங்கள் :

1. மேசையின் மீது வைக்கப்படும் ஒரு பொருள் தன் எடைக்குச் சமமான ஒரு விசையினுல் மேசையை அழுத்து கிறது. அதே சமயம் மேசையானது அப்பொருளின் அழுத்தத் திற்குச் சமமான எதிரழுத்தத்தைச் செயல்படுத்துகிறது.

2. காந்தம் இரும்புத் துண்டைத் தன்னேக்கி இழுப்பது போல், அந்த இரும்புத் துண்டானது அக் காந்தத்தைத் தன் வசம் அதே விசையுடன் இழுக்கும்.

3. இரு குழுவினருக்கிடையே நடைபெறும் கயிறு இழுப்புப் போட்டியின் போது, கயிற்றின் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் இரு சம எதிர்விசைகள் செயல்படுவதைக் காணலாம். அதாவது, ஒவ்வொரு குழுவினராலும் செயற்படுத்தப்படும் இழுவிசையானது கயிற்றின் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் மாற்றுக் குழுவினரால் செயல்படுத்தப்படும் இழுவிசைக்குச் சமமாகவும் எதிராகவுமிருக்கும். அவ்வாறுயின் ஏதேனுமொரு குழு வெற்றியடைவது எவ்வாறு என்ற ஐயமேற்படலாம். ஒரு குழுவைச் சேர்ந்த உறுப்பினர்கள் கயிற்றைத் தங்கள் திசையை நோக்கி இழுக்கும் போது தங்களுடைய பாதங்களினுல் தரையை எதிர்த்திசையை நோக்கி உந்தித் தள்ளுகிருர்கள். இத் தள்ளுவிசையின் காரணமாகத் தரைக்கும் பாதங்களுக்கு மிடையே ஏற்படுகின்ற உராய்வு விசையானது தள்ளுவிசையின் திசைக்கு எதிர்த் திசையில் அதாவது அக்குழுவினர் கயிற்றை இழுக்கின்ற திசையில் செயல்படும். இது போல், மாற்றுக் கட்சியினரின் பாதங்களுக்கும் தரைக்குமிடையேயுள்ள உராய்வு விசை அவர்கள் கயிற்றை இழுக்கும் திசையை நோக்கிச் செயல்படும். இவ்விரு உராய்வு விசைகளும் அளவில் மாறுபடும் போது ஒரு குழுவினர் வெற்றி பெறமுடிகிறது.

மாதிரி 22. ஒரு பொருள் 24 ராத்தலிகள் அளவுள்ள ஒரு விசையினுல் செயல்படுத்தப்பட்ட பொழுது 54 அடி தூரம் சென்று 18 அடி/விளுடி வேகத்தைப் பெறுகிறதெனில், அதன் பொருண்மையைக் காண்க.

தீர்வு: பொருளின் பொருண்மை m என்க.

பொருளானது ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டு 54 அடி தூரத்தில் 18 அடி/விளுடி வேகத்தைப் பெறுகிறது.

$$\therefore u = O, S = 54, V = 18, a = ?$$

$$v^2 = u^2 + 2as$$

$$18^2 = O + 2a\,(54)$$

$$a = \frac{18 \times 18}{2 \times 54} = \text{அடி}/(\text{விளுடி})^2$$

பொருளில் செயல்படுத்தப்பட்ட விசை $F = 24$ ராத்தலிகள்.

$= ma = F$ என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து,

$$m \times 3 = 24$$

$m = 8$ ராத்தல்கள்.

மாதிரி 23. 15 கிராம் எடையுள்ள ஒரு விசை 327 கிராம் பொருண்மையுள்ள ஒரு பொருளின் மீது 10 வினாடிகளுக்குச் செயல்படுகிறது. பொருள் அமைந்துள்ள திசை வேகத்தையும், இந்த நேரத்தில் அது சென்றுள்ள தூரத்தையும் காண்க.

தீர்வு: $F = 15$ கிராம் எடை $- 15\,g$ டைன்கள்

$= 15 \times 981$ டைன்கள்.

$m = 327$ கிராம்கள்.

$t = 10$ வினாடிகள்.

$F = ma$ என்னும் சூத்திரத்திலிருந்து,

$$a = \frac{F}{m}$$

$$= \frac{15 \times 981}{327}$$

$= 45$ செ.மீ./(வினாடி)^2.

10 வினாடிக்குப் பின் பொருளின் வேகம் v எனில்,

$$v = u + at$$

$$= 0 + 45 \times 10$$

$= 450$ செ.மீ./(வினாடி)

10 வினாடிகளில் பொருள் சென்ற தூரம் S எனில்,

$$S = ut + \tfrac{1}{2}at^2$$

$$= 0 + \tfrac{1}{2} \times 45 \times 10^2$$

$= 2250$ செ.மீ.

$= 2{\cdot}25$ கி. மீட்டர்.

மாதிரி 24. m பொருண்மையுள்ள ஒரு பொருள் h உயரத்திலிருந்து கீழே விழுகிறது. அது மணலில் d ஆழத்திற்குத் துளைத்துச் சென்ற பின் ஓய்விற்குக் கொண்டுவரப்படுகிறது. மணலின் சராசரித் தடை $m\left(1 + \dfrac{h}{d}\right)$ தனியலகுகள் என்று காட்டுக.

தீர்வு: பொருள் தரையை வந்தடையும் போது அதன் வேகம் v என்க.

இங்கு u = பொருளின் தொடக்க வேகம் $= O$

a = பொருளின் முடுக்கம் = ஈர்ப்பு முடுக்கம் $= g$

S = பொருள் சென்ற தூரம் $= h$.

$$v^2 = u^2 + 2aS$$
$$= O + 2gh$$
$$= v = \sqrt{2gh}.$$

பொருளானது மணலுக்குள் $\sqrt{2gh}$ தொடக்கவேகத்துடன் துளைத்துச் செல்கிறது. மணலுக்குள் d தூரம் சென்றபின் அதன் இறுதி வேகம் பூச்சியமாகிறது. மணலின் எதிர்த்தடையால் ஏற்படும், பொருளின் எதிர்முடுக்கம் f என்க.

அதாவது, $u = \sqrt{g2h},\ v = O,\ S = d,\ a = -f$

$v^2 = u^2 + 2as$ என்னும் சூத்திரத்திலிருந்து,

$$O = (\sqrt{2gh})^2 - 2fd$$
$$= 2gh - 2fd$$
$$\therefore f = \frac{gh}{d}$$

$\therefore$ மணலின் எதிரமுத்தம் = பொருண்மை $\times$ எதிர்முடுக்கம்

$$= \frac{mgh}{d}$$

இவ் வெதிரழுத்தமானது, மணலின் சராசரித் தடைக்கும், பொருளின் எடைக்குமுள்ள விளைவு விசையாகும்.

மணலின் சராசரித் தடை $= R$ என்க.

பொருளின் எடை $= W = mg$

மணலின் சராசரித்தடை மேல் நோக்கியும், பொருளின் எடை கீழ்நோக்கியும் செயல்படுமாகையால், இவற்றின் விளைவு விசை $= R - mg$ ஆகும்.

$$\therefore R - mg = \frac{mgh}{d}$$
$$\therefore R = mg + \frac{mgh}{d}$$
$$= mg\left(1 + \frac{h}{d}\right)$$

அதாவது, மணலின் சராசரித் தடை

$$= m\left(1 + \frac{R}{d}\right) g \text{ ஈர்ப்பலகுகள்.}$$

$$= \left(1 + \frac{h}{d}\right) \text{ தனியலகுகள்.}$$

மாதிரி 25. 2 அவுன்சு பொருண்மையுள்ள ஒரு துப்பாக்கிக் குண்டு 1000 அடி/விஞடி வேகத்துடன் சுடப்பட்டு 180 அடி தூரத்திலுள்ள ஒரு குறியை $\frac{1}{2}$ விஞடியில் தாக்குகிறது. காற்றின் சராசரித் தடையைக் காண்க.

தீர்வு :

u = குண்டின் தொடக்க வேகம் = 1000 அடி/(விஞடி)

S = குண்டு சென்ற தூரம் = 180 அடி,

t = குண்டு எடுத்துக் கொண்ட நேரம் = $\frac{1}{2}$ விஞடி,

a = குண்டின் முடுக்கம்.

$S = ut + 2\,at^2$ என்னும் சூத்திரத்திலிருந்து,

$$180 = 1000\left(\tfrac{1}{2}\right) + \tfrac{1}{2}\,a\left(\tfrac{1}{2}\right)^2$$

$$= 500 + \frac{a}{8}$$

$$\therefore \frac{a}{8} = -320$$

$$a = -2560.$$

குண்டின் எதிர்முடுக்கம் = -2560 அடி/(விஞடி)^2.

காற்றின் தடை = எதிர்விசை = ma

ஆனல், m = குண்டின் பொருண்மை = 2 அவுன்சு

= $2 \times (\frac{1}{16}$ ரா)

= $\frac{1}{8}$ ராத்தல்.

$\therefore$ காற்றின் தடை = $\frac{1}{8} \times 2560 = 320$ ராத்தலிகள்

$= \frac{320}{32} = 10$ ராத்தல் எடை.

மாதிரி 26. மிதிவண்டியுடன் 200 ராத்தல் எடையுள்ள ஒரு மிதிவண்டி போட்டி 16 அடி/(விஞடி) வேகத்தில் தனது மிதிவண்டியை ஓட்டிச் செல்கிருன். அவனுடைய இயக்கத்

திற்கு எதிரான மொத்தத் தடை 10 ராத். எடையெனில், அவன் மிதிப்பதை நிறுத்தியபின் ஓய்விற்கு வருமுன் எவ்வளவு தூரம் செல்வான் ?

தீர்வு : m = மிதிவண்டியுடன் அவனுடைய பொருண்மை

= 200 ராத்.

F = மிதிவண்டியின் இயக்கத்திற்குத் தடை

= 10 ராத். எடை

= $10 \times 32 = 320$ ராத்தலிகள்,

மிதிவண்டியின் எதிர் முடுக்கம் a எனில், $F = ma$ சூத்திரத்திலிருந்து,

$$a = \frac{F}{m}$$

$$= \frac{320}{200}$$

= $\frac{8}{5}$ அடி/(விஞடி)^2.

இப்பொழுது, $u = 16$, $a = -\frac{8}{5}$ v = இறுதிவேகம் $= O$;

$$v^2 = u^2 + 2as$$

$$O = 16^2 + 2\left(-\tfrac{8}{5}\right) S$$

$$\therefore \tfrac{16}{5} S = 16^2$$

$$S = 80$$

மிதிவண்டி யொட்டி செல்லும் தூரம் = 80 அடி.

மாதிரி 27. 300 டன்கள் எடையுள்ள ஒரு தொடர்வண்டி ஓர் இயந்திரத்தினுல் 1/150 என்னும் சரிவில் மேல் முகமாக இழுத்துச் செல்லப்படுகிறது. இயந்திரத்தின் வேகத்திற்கு எதிரான தடை மாறிலியாகவும், தொடர்வண்டியின் எடையில் $\frac{1}{40}$ பாகத்திற்குச் சமமாகவு முள்ளது. தொடர்வண்டி 3 அடி/(விஞடி)^2 முடுக்கத்துடன் சென்று கொண்டிருந்தால், இயந்திரத்தின் உண்மையான இழுவிசையைக் காண்க.

தீர்வு :

m = தொடர்வண்டியின் பொருண்மை

= 300 டன்கள் = 300×2240 ராத்தல்கள்

a = வண்டியின் முடுக்கம்

$= 3$ அடி/(விநாடி)^2

$F =$ இயந்திரத்தின் விளைவு இழுவிசை

$= ma$

$= 300 \times 2240 \times 3$ ராத்தலிகள்.

$= 900 \times 2240$ ராத்தலிகள்.

தடை $= \frac{1}{40} \times 300 \times 2240$ ராத்தல்கள் எடை

$= \frac{1}{40} \times 300 \times 2240 \times 32$ ராத்தலிகள்

$= 240 \times 2240$ ராத்தலிகள்.

சரிவின் காரணமாக இயந்திரத்திற்கு ஏற்படும் தடை = சாய்தளத்தில் தொடர்வண்டியின் எடையின் கீழ்முகக் கூறு

$= mg \sin \alpha$ ($\sin \alpha$ = சரிவு $= \frac{1}{150}$)

$= 300 \times 2240 \times \frac{1}{150}$ ராத்தல்கள் எடை

$= 2 \times 2240$ ராத். எடை

$= 2 \times 2240 \times 32$ ராத்தலிகள்

$= 64 \times 2240$ ராத்தலிகள்.

மொத்தத்தடை $= (240 \times 2240 + 64 \times 2240)$ ராத்தலிகள்

$= 304 \times 2240$ ராத்தலிகள்.

இயந்திரத்தின் உண்மை இழுவிசை = விளைவு இழுவிசை + மொத்தத் தடை

$= (901 \times 2240 + 304 \times 3240)$ ராத்தலிகள்

$= 2240 \times 1204$ ராத்தலிகள்

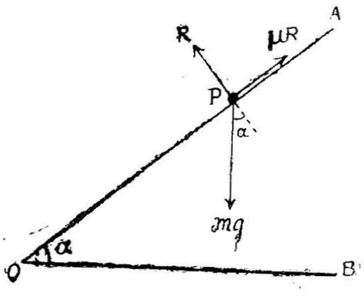
$= \dfrac{2240 \times 1204}{32}$ ராத்தல்கள்

$= \dfrac{2240 \times 1204}{33 \times 2250}$ டன் எடை

$= 37\frac{5}{8}$ டன் எடை.

மாதிரி **28.** கிடைத்தளத்துடன் α கோணத்தில் சாய்ந்துள்ள ஓர் உராய்வுடைய சாய்தளத்தின் மீது கீழ்முகமாக ஒரு துகள் நழுவிச் செல்கிறது. உராய்வுக் குணகம் μ எனில் துகளின் இயக்கத்தை நிர்ணயிக்கவும்

தீர்வு :



படம் 27

துகளின் பொருண்மை m என்க. எனவே, அதன் எடை mg நிலைக்குத்தாகக் கீழ் நோக்கிச் செயல்படும். சாய்தளத்தின் எதிர்விசை R சாய்தளத்திற்குச் செங்குத்தாகச் செயல்படும். பொருள் தளத்தின் மீது கீழ் முகமாக நழுவுவதால், உராய்வு விசை μR மேல் முகமாகச் செயல்படும்.

தளத்தின் சாய்வுக் கோணம் α

சாய்தளத்திற்குச் செங்குத்துத் திசையில் துகளுக்கு இயக்கம் கிடையாதாகையால் இத்திசையிலுள்ள விசைகள் விளைவு நீக்கம் செய்யப்படவேண்டும்.

$$\therefore R = mg \cos \alpha \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

துகள் சாய்தளத்தில் கீழ்முகமாக நகருவதால், தளத்தின் வழியே துகளின் விளைவுவிசை கீழ்முகமாகயிருக்கும்.

$$\therefore \text{கீழ்முக விளைவுவிசை} = mg \sin \alpha - \mu R.$$

துகள் சாய்தளத்தில் f என்னும் முடுக்கத்துடன் கீழ்முகமாக நகர்ந்து சென்றால், இக்கீழ்முக விளைவுவிசை mf க்குச் சமமாகும்.

$$\therefore \quad mf = mg \sin \alpha - \mu R$$
$$= mg \sin \alpha - \lambda\, mg \cos \alpha$$
$$= mg (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$$

அல்லது, $f = g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$

தளத்தின் மீது l தூரத்திற்கு நழுவியபின் துகளின் திசைவேகம் v எனில்,

$$u = O,\ S = l,\ f = f,\ v = v.$$
$$v^2 = u^2 + 2 f S$$
$$= O + 2 g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) . l$$
$$\therefore v = \sqrt{2 gl (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)} \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

(2), (3) ஆகிய சமன்பாடுகள் துகளின் இயக்கத்தை நிர்ணயிக்கின்றன.

குறிப்பு : துகள் சாய்தளத்தின் மீது மேல்முகமாக வீசப் பட்டால், ஈர்ப்புச் சக்தியின் காரணமாக அதன் இயக்கத்திற்கு ஏற்படுகின்ற எதிர்முடுக்கம் $g (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$ ஆகும்.

மாதிரி 29. ஒரு தொடர்வண்டி ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டு $1//100$ சரிவில் கீழ்முகமாக ஒரு மைல்தூரம் ஓடுகிறது. தொடர்வண்டியின் இயக்கத்திற்கு எதிரான தடை 1 டன்னுக்கு 8 ராத்தல் எடை வீதத்திலிருந்தால், சரிவின் அடியிலுள்ள கிடைத்தளத்தை அடைந்ததும் தொடர்வண்டி கிடைத் தளத்தில் எவ்வளவு தூரம் இழுத்துச் செல்லப்படுமென்று காண்க.

தீர்வு : தொடர்வண்டியின் பொருண்மை m டன்கள் என்க.

வண்டி சரிவில் கீழ்முகமாக ஓடுவதால், சரிவின் காரண மாகக் கீழ்முகத் திசையிலேற்படுகின்ற விசை

$= mg \sin \alpha$ ஆகும்.

$= m \times 2240 \times 32 \times \frac{1}{100}$ ராத்தலிகள்

$= m \left(\frac{112 \times 32}{5} \right)$ ராத்தலிகள்.

உராய்வின் காரணமாக மேல்மிகத்தடை

$= 8\, m$ ராத்தல் எடை

$= 8\, m \times 32$ ராத்தலிகள்.

$\therefore$ கீழ்முக விளைவுவிசை

$$= m \left(\frac{112 \times 32}{5} \right) - 8\, m \times 32 \text{ ராத்தலிகள்}$$

$$= \frac{m \times 32}{5} (112 - 40) \text{ ராத்தலிகள்}$$

$$= \frac{m \times 32 \times 72}{5} \text{ ராத்தலிகள்}$$

இவ்விளைவு விசையினால் வண்டி பெறுகின்ற முடுக்கும் a எனில்,

$$a = \frac{F}{m} = \frac{32 \times 72}{5} \text{ அடி/(விநாடி)}^2,$$

வண்டி ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டு $a = \dfrac{32 \times 72}{5}$ அடி/(விநாடி)^2 முடுக்கத்துடன் $S = 1$ மைல் $= 5280$ அடிதூரம் சென்று கிடைத்தளத்தை அடைகிறது.

கிடைத்தளத்தை அடையும் போது அதன் திசை வேகம் V எனில்,

$$V^2 = u^2 + 3\,a\,S$$

$$= O + 2 \times \frac{35 \times 72}{5} \times 5280$$

$$= \frac{64 \times 72 \times 5280}{5}$$

கிடைத்தளத்தில் இயக்கத்திற்கெதிரான தடை

$= 8\,m$ ராத். எடை

$= 8\,m \times 32$ ராத்தலிகள்.

இத் தடையினுலுண்டாகும் எதிர் முடுக்கம்

$$= \frac{F}{m}$$

$= 8 \times 32$ அடி/(விநாடி)^2.

ஆகவே, கிடைத்தளத்தில்,

$$u = \text{தொடக்க வேகம்} = \sqrt{\frac{64 \times 72 \times 5280}{5}},$$

$V -$ இறுதிவேகம் $= O$

$a =$ முடுக்கம் $= -\,8 \times 32$

$S =$ கிடைத்தளத்தில் சென்ற தூரம்,

$$v^2 = u^2 + 2\,a\,S$$

$$O = \frac{64 \times 72 = 5280}{5} - 2 \times 8 \times 32 \times S$$

$$\therefore S = \frac{64 \times 72 \times 5280}{5 \times 2 \times 8 \times 32} \text{ அடி}$$

$$= \frac{9}{5} \times 5280 \text{ அடி}$$

$$= 1\frac{4}{5} \text{ மைல்}$$

மாதிரி 30. W ராத்தல்கள் எடையுள்ள ஒரு தொடர் வண்டி $1/100$ சரிவின் உச்சியிலுள்ள ஒரு நிலையத்தை நோக்கிச் சென்று கொண்டிருக்கிறது. நிலையத்திலிருந்து l அடி தூரத்தில் வேகத்தடைகள் செயல்படுத்தப்பட்டன. இப்பொழுது தொடர் வண்டி சரிவில்மேல் முகமாக V அடி (வினடி) வேகத்தில் செல்கிறது. உராய்வுத் தடைய எனில், வண்டியை நிலையத்தில் நிறுத்துவதற்குத் தேவையான கூடுதல் வேகத்தடை

$$\left(\frac{V^2W}{2gl} - \frac{W}{100} - \omega\right) \text{ ராத்தல் எடை}$$

என்று காட்டு.

தீர்வு : சரிவின் காரணமாக ஏற்படும் தடை $= W \times \frac{1}{100}$

$$= \frac{W}{100} \text{ ராத். எடை}$$

உராய்வுத் தடை $= \omega$ ராத். எடை

V வேகத்துடன் சென்று கொண்டிருக்கும் வண்டியை நிறுத்தத் தேவையான எதிர்முடுக்கம் f எனில், $v^2 = u^2 + 2fs$ என்னும் சமன்பாட்டிலிருந்து,

$$O = V^2 - 2fl.$$

$$\therefore f = \frac{V^2}{2l}$$

அதிகப்படியாகத் தேவையான வேகத்தடை x ராத். எடையெனில்,

$$\text{மொத்தத் தடை} = \left(\frac{W}{100} + \omega + x\right) \text{ ராத். எடை}$$

$$\left(\frac{W}{100} + \omega + x\right) g \text{ ராத்தலிகள்.}$$

இந்த மொத்த வேகத்தடையினுலேற்படக்கூடிய எதிர்முடுக்கம் $\frac{V^2}{2l}$ க்குச் சமம்.

$$\therefore \left(\frac{W}{100} + \omega + x\right) g = W . \frac{V^2}{2l}$$

$$\frac{W}{100} + \omega x = \frac{V^2 W}{2gl}$$

$$\therefore \quad x = \left(\frac{V^2 W}{2gl} - \frac{W}{100} - \omega\right) \text{ ராத். எடை}$$

மாதிரி 31. 500 ராத்தல் பொருண்மையுடைய ஒரு பொருள் கிடைத்தளத்துடன் $\sin^{-1}\left(\frac{1}{20}\right)$ சாய்விலுள்ள ஒரு உராய்வுடைய சாய்தளத்தின்மீது கீழ்முகமாக ஓய்விலிருந்து நழுவுகிறது. உராய்வின் காரணமாக அதன் இயக்கத்திற்கு ஏற்படும் தடை 10 ராத். எடையாகும். புறப்பட்ட இடத்திலிருந்து d தூரத்தில் அதன் திசைவேகம், $g = 32$ அடி/(வினாடி)^2 என்ற தற்கோளின்கீழ், $\frac{4}{5}\sqrt{3d}$ என்று காட்டுக.

(சென்னை 1967. ஏப்.)

தீர்வு: $m = 500$ ராத்.

சரிவின் காரணமாக ஏற்படும் விசை $= 500 \times \frac{1}{20} = 25$ ராத். எடை.

உராயவுத் தடை $= 10$ ராத். எடை.

சரிவில் கீழ் முகமாக விளைவு விசை $= (25-10) = 15$ ராத். எடை $= 15 \times 32$ ராத்தலிகள்

இவ்விளைவு விசையின் காரணமாக ஏற்படும் முடுக்கம் $= a$ என்க.

$$\therefore a = \frac{F}{m} = \frac{15 \times 32}{500} = \frac{24}{25} \text{ அடி/வினாடி)}^2$$

இந்த முடுக்கத்துடன் அந்த பொருள் ஓய்விலிருந்து d தூரம் செல்கிறது.

$$\therefore \quad u = O \; ; \; a = \frac{24}{25}, S = d \; ; \; v = ?$$

$$v^2 = u^2 + 2\,as,$$

$$= O + 2 \times \frac{24}{25} d$$

$$= \frac{48}{25} d$$

$$\therefore \quad v = \frac{4}{5}\sqrt{3d}$$

மாதிரி 32. நிலைக்குத்தாக இயங்கும் ஒரு கிடைதளத்தின் மேல் m பொருண்மையுள்ள ஒரு பொருள் வைக்கப்பட்டு, அக் கிடைத்தளம் (i) மேல்நோக்கி f எனும் மாரு முடுக்கத்துடன், (ii) கீழ்நோக்கி f எனும் மாருமுடுக்கத்துடன், (iii) மாருத் திசை வேகத்துடன் நகர்த்தப்படுகிறது. ஒவ்வொரு வகையிலும் பொருளின்மீது கிடைத்தளத்தின் எதிரழுத்தத்தைக் காண்க.

தீர்வு: (i) கிடைத்தளம் மேல்நோக்கி f எனும் முடுக்கத்துடன் நகர்வதால், பொருளும் அதே முடுக்கத்துடன் மேல் நோக்கி நகரும்.

பொருளின் எடை mg நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கிச் செயல் படும். பொருளின்மீது கிடைத்தளத்தின் எதிர் விசைத்தாக்கம் R_1 எனில், R_1 மேல்நோக்கிச் செயல்படும். கிடைத்தளமும், பொருளும் மேல்நோக்கிச் செல்வதால் R_1, mg ஆகியவற்றின் விளைவு விசைத் தாக்கமாகிய $R_1 - mg$ நிலைக்குத்தாக மேல் நோக்கிச் செயல்படும். நியூட்டனின் இரண்டாம் விதியின்படி, இந்த மேல் நோக்கிச் செயல்படும் விளைவு விசை mf க்குச் சமமாகும்.

அதாவது, $R_1 - mg = mf$

$$\therefore \quad R_1 = m(g + f)$$

(ii) தளம் கீழ்நோக்கி f எனும் முடுக்கத்துடன் நகர்கிறது. பொருள்மீது தளத்தின் எதிரழுத்தம் R_2 என்க. பொருளின் எடை mg நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கிச் செயல்படும். தளம் கீழ் நோக்கி நகர்வதால், பொருளின் எடை mg ஆனது பொருளின்மீது தளத்தின் மேல்நோக்கிய எதிரழுத்தம் R_2ஐ விட அதிகமாகயிருக்கும். அதாவது, mg, R_2 ஆகியவற்றின் கீழ் நோக்கிய விளைவு விசை $mg - R_2$ ஆகும். கீழ்நோக்கிய முடுக்கம் f ஆதலின், நியூட்டனின் இரண்டாம் விதியின்படி,

$$mg - R_2 = mf.$$

ஆகும். அதாவது, $R_2 = m(g - f)$

இப்பொழுது, $g = f$ எனில், $R_2 = O$ ஆகும். பொருளின்மீது கிடைத்தளத்தின் எதிரழுத்தம் பூச்சியமாவதால், பொருளும், கிடைத்தளமும் ஒன்றுக்கொன்று எவ்வித அழுத்தமுமின்றி இரண்டுமே ஈர்ப்பு முடுக்கத்துடன் கீழ்நோக்கி நகர்கின்றன.

$f > g$ எனில், $R_2 < O$ ஆகும். பொருளின்மீது கிடைதளத்தின் எதிரழுத்தம் பூச்சியத்தைவிடக் குறைவதால், பொருள்மீது

எவ்வித எதிரழுத்தமும் செயல்படவில்லையெனலாம். எனவே, பொருளும், கிடைத்தளமும் ஒன்றுக்கொன்று எவ்விதத் தொடுகையுமில்லாது இரண்டுமே தனித்தனியாகக் கீழ்நோக்கி நகர்கின்றன.

(iii) கிடைத்தளம் மேல்நோக்கி அல்லது கீழ்நோக்கிச் சீரான வேகத்துடன் நகர்வதால், $f = 0$ ஆகும். $\therefore$ R_3 = பொருள்மீது கிடைத்தளத்தின் எதிரழுத்தம் $= mg$ ஆகும்.

பயிற்சி 3

1. ஒரு மாறு விசை 16 ராத்தல் பொருண்மையுள்ள ஒரு பொருளின்மீது செயல்பட்ட 4 விநாடிகளில் 12 அடி/(விநாடி) எனும் திசை வேகத்தையுண்டு பண்ணுகிறது. அவ் விசையினைக் காண்க.

2. 3 டன்கள் பொருண்மையுள்ள ஒரு பொருளை ஒரு மைல் தூரத்திற்கு நகரச் செய்து 30மைல்/மணி வேகத்தையுண்டு பண்ணக்கூடிய விசை யாது ?

3. 70 ராத்தல் எடையுள்ள ஒரு மாறு விசை தொடக்கத்தில் ஓய்விலிருக்கும் 112 ராத்தல் பொருண்மையுள்ள ஒரு பொருளின்மீது 10 விநாடிகட்குச் செயல்படுத்தப்பட்டுப்பின் விலக்கிக் கொள்ளப்படுகிறது. 15 விநாடிகளில் அப்பொருள் சென்ற தூரம் யாது ?

4. 10 ராத்தல் பொருண்மையொன்று ஓய்வு நிலையிலிருந்து 10 அடி உயரத்திலிருந்து மண்ணில் விழுகிறது. மண்ணிற்குள் அது ஒரு அடி ஆழத்திற்குத் துளைத்துச் சென்றதெனில் அதன் மீது மண்ணின் சராசரி அழுத்தம் என்ன ?

5. ஓய்வு நிலையிலுள்ள 80கிராம் பொருண்மையுள்ள ஒரு பொருள் 218 செ.மீ. உயரத்திலிருந்து மண்ணில் விழுகிறது. மண்ணிற்குள் 109 செ.மீ. ஆழத்திற்குத் துளைத்துச் சென்றபின் அது ஓய்வுக்குக் கொண்டுவரப்படுகிறது. அதன்மீது மண்ணின் சராசரி அழுத்தம் என்ன ?

6. ஓய்வு நிலையிலுள்ள 10கிராம் பொருண்மையுள்ள ஒரு பொருள் 50செ.மீ. உயரத்திலிருந்து சேற்றில் விழுகிறது. சேற்றிற்குள் 25 செ.மீ. ஆழத்திற்குத் துளைத்து சென்றபின் அது ஓய்வுக்குக் கொண்டுவரப்படுகிறது. சேற்றின் சராசரி அழுத்தத்தைக் காண்க.

7. 6 ராத்தல் எடையுள்ள ஒரு பொருள் தண்ணீருக்குள் போடப்பட்டது. கல் நீரினுள் மூழ்கும்போது நீரின் மேல் நோக்கிய அழுத்தம் உராய்த்தல் எடையெனில் முடுக்கத்தைக் காண்க.

8. 25கிராம் பொருண்மையுள்ள ஒரு பொருள் 200 டைன் விசையினுல் செயல்படுத்தப்படுகிறது. அப்பொருளை ஓய்வு நிலையிலிருந்து 64 செ.மீ. தூரம் நகர்த்துவதற்கு எவ்வளவு நேரமாகும் ?

9. ஓய்விலிருக்கும் ஒரு பொருள் 10 ராத்தலி விசையினுல் 4 விஞடிகளுக்குச் செயல்படுத்தப்படுகிறது. இதன் பின்னர் அவ்விசை செயல்படாமல் நின்று விடுகிறது. அப்பொருள் 8 விஞடிகளில் 48 அடி செல்கிறது. அப்பொருளின் பொருண் மையைக் காண்க. இப்பொழுது அப்பொருளை 4 அடி தூரத்தில் நிறுத்தக்கூடிய விசையினைக் காண்க.

10. 300 மீட்/விஞடி வேகத்தில் சென்று கொண்டிருக்கும் ஒரு துப்பாக்கிக் குண்டு ஒரு மரத்தில் 1 மீட்டர் ஆழத்திற்குத் துளைத்துப் பின் நிற்கிறது. மரத்தின் தடை சீரானதெனக் கருதி, 200மீட்./விஞடி வேகத்தில் அக்குண்டு மரத்தைத் தாக்கினுல் எவ்வளவு ஆழத்திற்குத் துளைக்குமென்று காண்.

11. v திசைவேகத்துடன் சென்று கொண்டிருக்கும் ஒரு துப்பாக்கி குண்டு ஒரு நிலையான பலகையைத் துளைத்து $\frac{1}{5}$ பகுதித் திசை வேகத்தை இழக்கிறது. அதன் பின் அது மற்ருெரு பலகையைத் துளைத்துக்கொண்டு சரியாக வெளிவருகிறது. இரு பலகைகளிலும் தடை சீராகவும் ஒரே மாதிரியும் இருப்பதாகக் கருதி, அவற்றின் பருமன்களின் விகிதத்தைக் காண்க.

12. 200 மீட்./வி. வேகத்துடன் கிடைத் திசையில் சுடப் பட்ட 10கிராம் பொருண்மையுள்ள ஒரு துப்பாக்கிக் குண்டு 100 மீட்டர் தூரத்திலுள்ள ஒரு குறியை $\frac{1}{4}$ விஞடியில் தாக்குகிறது. காற்றின் தடை சீராகயிருப்பதாகக் கருதி, அத்தடையைக் காண்க.

13. m கிராம் பொருண்மையொன்று P கிராம் எடை விசையினுல் t நிமிடங்கட்குச் செயல்படுத்தப்படுகிறது. அப் பொருண்மை பெற்ற திசைவேகம் $\frac{60\,gt}{m}P$ செ.மீ./வி. என்றும்,

ஓய்விலிருந்து அப்பொருண்மை சென்ற தூரம் $\frac{1800}{m} gt^2 P$ செ.மீ. என்றும் நிறுவுக.

14. ஒரு உந்துவண்டி 20 கி.மீ./மணி வேகத்தில் சென்று கொண்டிருக்கும்போது வேகத்தடைகளைச் செயல்படுத்தி 16 மீட்டர் தூரத்தில் நிறுத்த முடியும். அது 40 கி.மீ./மணி வேகத்தில் சென்று கொண்டிருந்தால் அதே வேகத்தடைகளைப் பயன்படுத்தி எவ்வளவு தூரத்தில் நிறுத்த முடியும் ?

15. 36 கி.மீ./மணி வேகத்தில் சென்று கொண்டிருக்கும் ஓர் உந்து வண்டியை அதன் வேகத் தடைகளைச் செயல்படுத்து வதன் மூலம் 4 வினுடிகளில் நிறுத்த முடியுமெனில், அது ஓய்விற்கு வருமுன் செல்லும் தூரத்தைக் காண்க. மேலும், அவ்வேகத் தடைகளினுல் செயல்படுத்தப்படும் விசை உந்து வண்டியின் எடையைப்போல் $\frac{250}{981}$ என்று காட்டு.

16. ஒரு சாய்தளத்தின் சாய்வு 1/200 ; அதன் உராய்வி ஞல் ஏற்படக்கூடிய தடை டன்னுக்கு 12 ராத்தல் எடை. இச் சாய்வின்மேல் 150 டன் எடையுள்ள ஒரு தொடர் வண்டியை ஒரு நிமிடத்தில் ½ மைல் தூரத்திற்கு நகர்த்தக்கூடிய விளைவு விசையைக் காண்க.

17. ஒரு தொடர் வண்டி 1/100 சரிவிலுள்ள ஒரு சாய் தளத்தின்மீது மீப்பெரு சரிவுக் கோட்டின் வழியே இறங்குமுக மாக ஓய்வு நிலையிலிருந்து ஓடுகிறது. தண்டவாளத்தின் தடை பயணம் முழுவதும் டன்னுக்கு 8 ராத்தல் எனில், தளத்தின் அடியிலுள்ள கிடைத்தளத்தின்மீது தொடர் வண்டி எவ்வளவு தூரத்திற்கு இழுத்துச் செல்லப்படும் ?

18. ஒரு தொடர் வண்டியின் பொருண்மை இயந்திரத் துடன் 160 டன்கள். வண்டி ஓய்விலுருந்து புறப்பட்டு 22 வினுடிகளில் 45 மை/மணி வேகத்தைப் பெறுகிறது. காற்று, உராய்வு ஆகியவற்றினுல் ஏற்படும் தடை டன்னுக்கு 25 ராத்தல் எடை எனில், இயந்திரத்தின் உண்மையான இழுவிசையைக் காண்க.

19. 15 மை/மணி வேகத்தில் ஒரு சமதளச் சாலையில் சென்று கொண்டிருக்கும் ஒரு தொடர் வண்டி 1/160 சரிவுள்ள ஒரு சாய்தளத்தின் அடியை அடைந்ததும் நீராவி அடைக்கப்

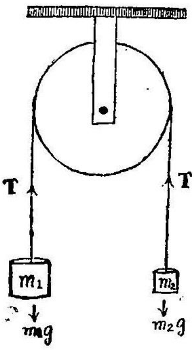
படுகிறது. உராய்வு முதலியவற்றால் ஏற்படும் தடை டன்னுக்கு 14 ராத்தல் எடையெனில், சாய்தளத்தின்மீது எவ்வளவு தூரத்திற்கு வண்டி செல்லும் ?

20. 150 டன்கள் பொருண்மையுள்ள ஒரு தொடர் வண்டி 1/75 சரிவுள்ள ஒரு சாய்தளத்தின் அடியில் ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டு தளத்தின்மீது மேலே செல்லுகிறது. அது 3 நிமிடங்களில் 30 மை/மணி வேகத்தை அடைந்தால், இயந்திரத்தின் இழுவிசையைக் காண்க.

(சென்னை பி.எஸ்ஸி. 1966 செப்.)

கயிற்றின் மூலம் இணைக்கப்பட்ட பொருட்களின் இயக்கம்

1. m_1 m_2 ஆகிய பொருண்மைகளுடைய இரு துகள்கள் ஓர் இலேசான, வழவழப்பான கப்பியின் வழியே செல்லும் ஒரு இலேசான நீளியல்பற்ற கயிற்றின்மூலம் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. இத் தொகுதியின் இயக்கத்தை விவரிக்கவும். கயிற்றின் இழுவிசையையும் காண்க.



படம் 28

இரு பொருட்களும் ஒரே கயிற்றின் மூலம் இணைக்கப்பட்டுள்ளன வாகையால், இரண்டுக்கும் பொதுவான முடுக்கத்துடன் ஒன்றுமேல் நோக்கியும் மற்றென்று கீழ்நோக்கியும் நகரும். எனவே, எந்தக் கணத்தில் அவற்றின் வேகங்கள் சம அளவினதாகயிருப்பதோடு, இரண்டும் நகர்ந்துள்ள தூரங்களும் சமமாகயிருக்கும். மேலும், வழவழப்பான கப்பியின் வழியே தாராளமாகச் சென்றுவரக்கூடிய ஒரு நீளியல் பற்றக் கயிற்றின்மூலம் இரு பொருட்களும் இணைக்கப்பட்டுள்ளதால் கயிறு முழுவதும் இழுவிசை சீரானதாகயிருக்கும். இச் சீரான இழுவிசையை T என்க.

$m_1 > m_2$ என்று கொள்க. பொருட்களின் எடைகளாகிய $m_1 g$, $m_2 g$ என்பன நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கிச் செயல்படும். ஒவ்வொரு பொருளின்மீதும் கயிற்றின் இழுவிசை T மேல்

நோக்கிச் செயல்படும். பொருட்கள் சமனற்ற எடைகளுடன் இருப்பதாலும், கப்பி வழவழப்பாகயிருப்பதாலும் அவை ஒன்றை யொன்று சமநிலையில் தாங்க முடியாது. எனவே, கனமான பொருள் (m_1) கீழ்நோக்கியும், இலேசான பொருள் (m_2) மேல் நோக்கியும் நகரும். அவற்றின் பொதுவாக முடுக்கம் f என்க.

பொருள் m_1 கீழ்நோக்கி நகருவதால் $m_1 g > T$ ஆகயிருக்கும். எனவே, m_1இல் செயல்படும் கீழ்நோக்கிய விசை $m_1 g - T$ ஆகும். நியூட்டனின் இரண்டாம் விதியின்படி,

$$m_1 f_1 = m_1 g - T \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

இதுபோல், பொருள் m_2 மேல்நோக்கி நகருவதால்,

$$m_2 f = T - m_2 g \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

$$\therefore \quad (m_1 + m_2) f = (m_1 - m_2) g$$

கூட்டவும். $f = \dfrac{(m_1 - m_2) g}{m_1 + m_2}$

(1) இலிருந்து $T = m_1 g - m_1 f$

$$= mg - m_1 . \frac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} . g$$

$$= m_1 g \left[1 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right]$$

$$= m_1 g \left[\frac{m_1 + m_2 - m_1 + m_2}{m_1 + m_2} \right]$$

$$= \left(\frac{2\, m_1 m_2}{m_1 \; m_2} \right) g.$$

குறிப்பு 1. கப்பியின் இருபுறமும் கயிற்றின் இழுவிசை கப்பியை அழுத்துமாகையால் கப்பியின் மீது அழுத்தம் 2 T க்குச் சமமாகும்

$$\therefore \text{ கப்பியின் மீது அழுத்தம் } R = 2T = \left(\frac{4\, m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) g.$$

குறிப்பு 2. இரு பொருட்களின் எடைகள் W_1, W_2 எனில்,

$$W_1 = m_1 g,\ W_2 = m_2 g \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore \text{ கயிற்றின் இழுவிசை } T = \left(\frac{2\, m_1\, m_2}{m_1 + m_2}\right).g$$

$$= \frac{2\, m_1\, g.\, m_2\, g}{m_1\, g + m_2\, g}$$

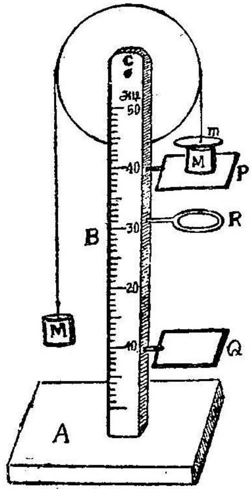
$$= \left(\frac{2\, W_1\, W_2}{W_1 + W_2}\right)$$

'அட்வுட்' இயந்திரம் (Atwood's Machine)

ஒரு அகலமான கிடைத்தளத் தாங்கி (A)யின் மேல் நிலைக்குத்தாக நிற்கும் ஒரு நீளமான சட்டத்தின் (B) நுனியில் ஒரு இலேசான, வழவழப்பான கப்பி (C) யொன்று பொருத்தப் பட்டுள்ளது. இச் சட்டமானது நீளத்தை அளவிடக்கூடிய வாறு அளவுக் குறியிடப்பட்டிருக்கும். சட்டத்தில் ஒரு பக்க மாக நீட்டிக் கொண்டிருக்குமாறு மேலே ஒன்றும் (P), அடியில் ஒன்று (Q) மாக இரு மேடைகள் பொருத்தப்பட்டுள்ளன. இவ்விரு மேடைகளும் சட்டத்தில் எந்த இடத்திலும் பொருத்தக் கூடியவாறு அமைக்கப்பட்டுள்ளன. தவிர, மேலேயுள்ள மேடையைந் திடீரென நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கித் திருப்பி விட முடியும். இவ்விரு மேடைகளுக்குமிடையே வளையம் (R) ஒன்று பொருத்தப்பட்டுள்ளது. இவ்வளையத்தையும் சட்டத்தில் எந்த இடந்திலும் பொருத்திக் கொள்ளலாம்.

கப்பி வழியே செல்லும் ஒரு இலேசான வழவழப்பான கயிற்றின் இரு முனைகளிலும் இரு சம எடை (M) கள் இணைக்கப் பட்டுள்ளன. மேடைகளும் வளையமும் இருக்கின்ற பக்கத்தி லுள்ள எடை M வளையத்தின் வழியே தங்குதடையிற்றி செல்லக் கூடியதாயிருக்கும். இந்த எடையின் மேல் வளையத்தினுள் நுழைய முடியாதவாறு சற்று விரிவான ஆனல் எடையில் குறைந்த m எனும் சிறிய மேலெடை யொன்று வைக்கப்பட் டுள்ளது. ஒன்றின் மேலொன்ருக வைக்கப்பட்ட இவ்விரு எடைகளும் மேலேயுள்ள மேடை (P) யின் மேல் வைக்கப் பட்டுள்ளன.

இரு மேடைகளும், வளையமும் தக்க இடைவெளிலிருக்குமாறு பொருத்தப்பட்டு, அவற்றிற்கிடையே யுள்ள தூரங்கள் அளவிடப்படுகின்றன. M என்ற எடையையும் m என்னும் சிறிய மேலெடையையும் தாங்கி நிற்கும் P என்னும் மேடை திடீரென கீழ் நோக்கிக் கவிழ்ந்த நிலையில் திருப்பி விடப்படுகிறது. இம்மேடையின் மேலுள்ள மொத்த எடை $(M+m)$ கயிற்றின் மறுமுனையிலுள்ள எடை M-ஐ விட அதிகமாயிருப்பதால் கீழ்நோக்கி நகரத் தொடங்கும். அதே தருணம், மறுமுனையிலுள்ள எடை மேல் நோக்கி நகரத் தொடங்கும். இவ்வெடைகள் சமமான முடுக்கத்துடன் நகரும். இச்சம முடுக்கம் f எனில்



படம் 29

$$f=\frac{(M+m)-M}{(M+m)+M}\cdot g$$

$$=\frac{m}{2M+m}\cdot g$$

ஆகும். $(M+m)$ என்ற எடைத்தொகுதி வளையத்தை (R) அடைந்தவுடன் மேலெடை வளையந்தினுள்நுழைய முடியாத படியால் வளையத்தின் மேலேயே தங்கிவிடும். எடை M மட்டும் வளையத்தினுள்ளே நுழைந்து சென்று மேடை Q வின் மேல் போய் நிற்கும். எடை M வளையத்தினுள் நுழைந்த பின் கயிற்றின் இரு முனைகளிலும் எடைகள் சமமாகயிருக்கு மாகையால் எடை M வளையத்திலிருந்து மேடை Q வரை சீரான வேகத்துடன் செல்லும். வளையத்திலிருந்து கீழ்மேடை Q வரையுள்ள தூரம் S என்றும், மேல்மேடை P யிலிருத்து வளையம் வரையுள்ள தூரம் S_1 என்றும் கொள்க. எடை M ஆனது வளையத்தினுள் நுழைந்தது முதல் கீழ்மேடை Q ஐ அடையும் வரை எடுத்துக் கொண்ட நேரத்தை மிகத் துல்லியமாகக் கணக்கிடவும். இக் கால இடைவெளியை t என்று கொள்க.

$(M+m)$ என்னும் எடைத்தொகுதி O தொடக்கவேகத்துடன் புறப்பட்டு, f முடுக்கத்துடன் மேல்மேடை P ஐ அடையும் போது திசைவேகம் v என்று கொள்க.

$$\therefore v^2 = u^2 + 2fS$$
$$= O + 2fS_1$$
$$= 2fS_1.$$

இதன் பின்னர், எடை M ஆனது v — ஐத் தொடக்க வேகமாகக் கொண்டு t நேரத்தில் சீரான வேகத்துடன் S தூரத்தைக் கடக்கின்றது. எனவே, $S = vt$ ஆகும்.

$$\therefore S^2 = v^2 t^2$$
$$= 2fS_1 t_2$$
$$= 2\frac{m}{2M + m} . g S_1 t^2$$
$$\therefore g = \frac{(2M + m) S^2}{2m S_1}$$

இத்தொடர்பிலிருந்து ஈர்ப்பு முடுக்கம் g யின் மதிப்பைக் கணக்கிடலாம். இவ்வாறு அட்வுட் இயந்திரமானது ஈர்ப்பு முடுக்கத்தின் மதிப்பைக் கணக்கிடப் பயன்படுகிறது. ஆனால், இவ்வியந்திரத்தின் மூலம் கணக்கிடப்படுகின்ற ஈர்ப்பு முடுக்க மதிப்பு துல்லியமாக யிராது; தோராயமாகவேயிருக்கும். காரணங்கள் வருமாறு:

1. கப்பியின் எடை கணக்கீட்டில் சேர்த்துக்கொள்ளப் படவில்லை. முற்றிலும் எடையேயில்லாத கப்பி யென்பது கற்பனையாகும். ஆகவே, எடையற்ற கப்பி யென்பது அறி முறையில் ஒப்புக் கொள்ளக்கூடியதாயிருக்குமே யொழிய நடை முறைக்கு ஒவ்வாததாகும். ஆகவே கப்பியின் எடையின் காரணமாக, எடை எத்துணை சிறியதாகயிருப்பினும், g யின் மதிப்பீட்டில் சிறிதளவேனும் மாறுபாடிருக்கும்.

2. முற்றிலும் வழவழப்பான கப்பி யென்பதும் நடைமுறை யில் காணப்படாத ஒன்றாகும். எவ்வளவு வழவழப்பான கப்பி யாயிருந்த போதும் அது சிறிதளவேனும் உராய்வுத் தடை யுண்டு பண்ணக்கூடியதாகவே யிருக்கும். எனவே, கப்பியின் உராய்வுத் தடையின் காரணமாகவும் g யின் மதிப்பீட்டில் சிறிதளவு மாறுபாடு இருக்கலாம். ஆனால், இக் குறைபாட்டை உராய்வுத்தடைக்குச் சமமான மற்றொரு மேலெடையைச் சேர்த்துச் கொள்வதன் மூலம் நீக்கிவிடலாம். இதற்கு ''உராய்வு மேலெடை'' (Friction Rider) என்று பெயர்.

3. எடைகள் நகரும் போது காற்றின் தடையின் காரணமாக அவற்றின் வேகம் சிறிதளவு தடைப்பட்டிருக்கலாம். இத்தடை புறக்கணிக்கப்பட்டுள்ளதால் g யின் மதிப்பீட்டில் சற்று வித்தியாசமிருக்கலாம்.

4. எடைகள் மிகக் குறுகிய தூரங்களே நகருவதால் நேரக் கணக்கீட்டிலேற்படும் சிறு தவறும் g யின் மதிப்பீட்டைப் பெரிதளவில் பாதிக்கும்.

மேற்கூறப்பட்ட குறைபாடுகளின் காரணமாக அட்வுட் இயந்திரத்தின் மூலம் கணக்கிடப்படுகின்ற ஈர்ப்பு முடுக்க மதிப்பு துல்லியமாக யிருப்பது ஐயப்பாடுடையதாகின்றது. இருப்பினும், பழமைச் சிறப்பின் காரணமாக இவ் வியத்திரம் நினைவிற் கொள்ளப்பட்டு வருகிறது.

மாதிரி 33, 4 அவுன்சு பொருண்மையுள்ள ஒரு பொருள் ஒரு வழவழப்பான கப்பியின் வழியே செல்லும் ஒரு கயிற்றின் மூலம் அதைவிடவும் அதிகமான பொருண்மையுடைய ஒரு பொருளுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது, பொருட்கள் இயக்கத்தில் விடப்பட்டு 3 வினடிகட்குப் பின் கயிறு வெட்டிவிடப்பட்டது. இதன் பின்னர் முதல் பொருள் $\frac{16}{9}$ அடி தூரம் உயரே சென்று பின் கீழே இறங்கினல், இரண்டாவது பொருளின் பொருண்மையைக் காண்க.

தீர்வு: இரண்டாவது பொருளின் பொருண்மை m அவுன்சு என்க.

பொருட்களிரண்டும் O தொடக்க வேகத்துடன் 3 வினடிகட்கு இயக்கத்திலிருக்கின்றன. மூன்று வினடிகட்குப்பின் அவற்றின் வேகம் u என்றும், அவற்றின் இயக்கத்தின் முடுக்கம் f என்றும் கொள்க.

∴ கயிறு வெட்டப்பட்டபின் 4 அவுன்சு பொருளின் மேல் நோக்கிய வேகம் u ; அது மேல் நோக்கிச் சென்றதூரம் $= \frac{16}{9}$ அடி ; இப்பொருள் தன்னிச்சையாக மேல்நோக்கிச் செல்வதால் அதன் இயக்கத்திற்கெதிரான முடுக்கம் $= g$.

அதாவது, $u =$ தொடக்கவேகம் $= u$

$v =$ இறுதிவேகம் $= O$

$s =$ தூரம் $= \dfrac{16}{9}$ அடி.

$$a = \text{முடுக்கம்} = -g = -32 \text{ அடி/(வினாடி}^2.$$

$$v^2 = u^2 + 2as$$

$$O = u^2 - 2 \times 32 \times \frac{16}{9}$$

$$u^2 = \frac{64 \times 16}{9}$$

$$\therefore \quad u = \frac{32}{3} \text{ அடி/(வினாடி)}$$

O தொடக்க வேகத்துடன் புறப்பட்ட பொருட்கள் 3 வினாடிகளில் $u = \frac{32}{3}$ அடி/(வினாடி) என்ற தொடக்க வேகத்தைப் பெற்றுள்ளன. எனவே, f என்பது இரு பொருட்களுக்குமுள்ள பொதுவான முடுக்கமெனில்,

$$v = u + at$$

என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து,

$$\frac{32}{3} = O + (3)$$

அல்லது, $f = \frac{32}{9}$ அடி/(வினாடி)^2.

ஆனால், $f = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$;

இங்கு m_1 = பெரிய பொருள் — m அவு. = $\frac{m}{16}$ ராத்தல்.

m_2 = சிறிய பொருள் = 4 அவு. = $\frac{4}{16}$ ராத்தல்.

$$\therefore \; f = \frac{\frac{m}{16} - \frac{4}{16}}{\frac{m}{16} + \frac{4}{16}} \times 32$$

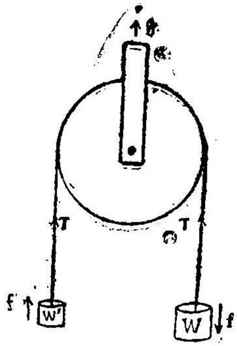
$$= \frac{m-4}{m+4} \times 32$$

$$\therefore \; \frac{32}{9} = \frac{m-4}{m+4} \times 32$$

$$m + 4 = 9m - 36$$
$$8m = 40$$
$m = 5$ அவுன்சு.

மாதிரி 34, W, W' என்னுமிரு எடைகள் ஓர் இலேசான, வழவழப்பான கப்பியின் வழியே செல்லும் ஓர் இலேசான நீளியல்பற்ற கயிற்றின்மூலம் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. கம்பியானது நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கி ஈர்ப்பு முடுக்கத்துக்குச் சமமான முடுக்கத்துடன் நகர்த்தப்பட்டால், கயிற்றின் இழுவிசை $\dfrac{4\,WW'}{W+W'}$ என்று காட்டு.

தீர்வு : $W > W'$ என்று கொள்க. எனவே, W கீழ்நோக்கியும், W' மேல்நோக்கியும் நகரும். கப்பி அசையாமலிருந்தால் இரு எடைகளும் ஒரே முடுக்கத்துடன் நகரும். கப்பி மேல்நோக்கி g முடுக்கத்துடன் நகர்வதால் இரு எடைகளின் முடுக்கங்களும் மாறுபடும். W, W' ஆகிய எடைகளின் மாறுபட்ட இம்முடுக்கங்கள் முறையே f, f' என்று கொள்க.



படம் 30

கயிற்றின் இழுவிசை T என்க.

W கீழ்நோக்கி f முடுக்கத்துடனும், கப்பி மேல்நோக்கி g முடுக்கத்துடனும் நகருவதால், கப்பியைப் பொறுத்து W-இன் கீழ்நோக்கிய முடுக்கம் $= f + g$. இதுபோல் W'இன் கப்பியைப் பொறுத்த மேல்நோக்கிய முடுக்கம் $= f' - g$ கப்பியைப் பொறுத்த இவ்விரு முடுக்கங்களும் அளவில் சமமாகயிருக்க வேண்டும்.

$$\therefore\ f + g = f' - g$$

அல்லது, $f - f = 2g$ ... ... (1)

W எடையின் பொருண்மை $= \dfrac{W}{g}$; அதன் முடுக்கம் $= f$.

$\therefore$ W எடையின் கீழ்நோக்கிய விசை $= \dfrac{W}{g} \cdot f$.

ஆனல் W எடையின் கீழ்நோக்கிய விசை $= W - T$

$$\therefore \quad W - T - \frac{W}{g} f. \quad \text{அல்லது}, f = \frac{g\,(W - T)}{W} = \left(1 - \frac{T}{W}\right)$$

இதுபோல், $T - W' = \dfrac{W'}{g} \cdot f'$

அல்லது, $f' = \dfrac{g\,(T - W')}{W'}\, g\left(1 - \dfrac{T}{W'}\right)$

சமன்பாடு (1)இல் இம்மதிப்புக்களைப் பிரதியிடவும்.

$$g\left(\frac{T}{W'} - 1\right) - g\left(1 - g\frac{T}{W'}\right) - 2g;$$

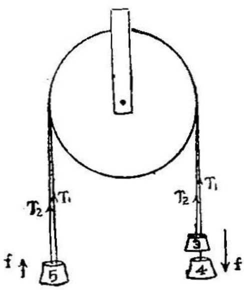
$$\frac{T}{W'} - 1 - 1 + \frac{T}{W} = 2$$

$$\frac{T}{W'} + \frac{T}{W} = 4$$

$$T\left(\frac{W + W'}{WW'}\right) = 4$$

அல்லது, $T = \dfrac{4\,WW'}{W + W'}$

மாதிரி 35. இரண்டு இலேசான நீளியல்பற்ற கயிறுகள் ஒரு சிறிய வழவழப்பான கப்பியின் வழியே செல்கின்றன. ஒரு புறம் அவை 3 ராத் ; 4 ராத். பொருண்மைகளுள்ள பொருட்களுடனும், மறுபுறம் அவை 5 ராத். பொருண்மையுள்ள பொருளுடனும் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. இத் தொகுதியின் முடுக்கத்தையும், கயிறுகளின் இழுவிசைகளையும் காண்க.



படம் 31

தீர்வு: 4 ராத், 3 ராத். பொருட்கள் கீழ்நோக்கியும், 5 ராத். பொருள் மேல் நோக்கியும் நகரும். இவற்றின் பொதுவான முடுக்கம் f என்க.

4 ராத். பொருள் இணைக்கப்பட்டுள்ள கயிற்றின் இழுவிசை T_1 என்றும், 3 ராத். பொருள் இணைக்கப்பட்டுள்ள கயிற்றின் இழுவிசை T_2 என்றும் கொள்க.

4 ராத் ; 3 ராத். பொருட்களின் கீழ் நோக்கிய மொத்த விசை $(4g - T_1)$

$+ (3g - T_2)$ ஆகும்.

$\therefore \quad (4g - T_1) + (3g - T_2) = 7f$

அதாவது, $7g - (T_1 + T_2) = 7f$ ... ... (1)

இதுபோல், 5 ராத். பொருளின் இயக்கத்திலிருந்து,

$(T_1 + T_2) - 5g = 5f$ ... ... (2)

(1), (2)ஐக் கூட்டுக.

$2g = 12f$

அல்லது, $f = \frac{g}{6} = \frac{32}{6} = \frac{16}{3}$ அடி/(வினாடி)².

(1) இலிருந்து, $7g - (T_1+T_2) = 7f = 7. \frac{g}{6}$

$$\therefore \quad T_1 + T_2 = 7g - \frac{7g}{6} = \frac{35}{6} g.$$

மேலும், $T_1 : T_2 = 4g : 3g = 4 : 3$

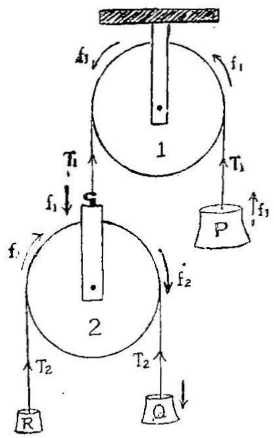
$$\therefore \quad T_1 = \frac{4}{7} \times \frac{35}{6} g = \frac{10}{3} g = \frac{10}{3} \text{ ராத். எடை.}$$

$$T_2 = \frac{3}{7} \times \frac{35}{6} g = \frac{5}{2} \text{ ராத். எடை}$$

மாதிரி 36. ஒரு இலேசான கயிறு ஒரு இலேசான கப்பியின் வழியே செல்கிறது. அதன் ஒரு முனையில் P என்னும் ஒரு பொருண்மையும், மறுமுனையில் ஒரு இலேசான கப்பியும் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. இந்த இரண்டாவது கப்பியின் வழியே மற்றொரு இலேசான கயிறு செல்கிறது. இக் கயிற்றின் நுனிகளில் R, Q $(R > Q)$ என்னும் பொருண்மைகள் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. இத்தொகுதி ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டால், R எப்போதும் ஓய்விலிருக்க வேண்டுமானால்,

$$\frac{4}{P} + \frac{1}{Q} = \frac{3}{R}$$

என்று நிறுவுக.



படம் 32

தீர்வு : இரண்டாவது கப்பியா அதன்மீது செல்லும் கயிற்றின் அழுத்தத்தின் காரணமாகக் கீழ்நோக்கி நகரும். இதன் கீழ்நோக்கிய முடுக்கம் f_1 எனில் P_1இன் மேல்நோக்கிய முடுக்கம் f_1 ஆகும்.

$Q > R$ ஆகையால், Q கீழ்நோக்கியும் நகரும். இவற்றின் பொது முடுக்கம் f எனில், முதல் கப்பியைப் பொறுத்து Rஇன் மேல்நோக்கிய முடுக்கம் $= f_1 - f_2$. R ஓய்விலிருக்க வேண்டுமாயின்,

$$f_1 - f_2 = O$$

அல்லது, $f_1 = f_2$.

முதல் கப்பியைப் பொறுத்து Q-வின் முடுக்கம் $= f_1 + f_2 = 2f_1$ (ஏனெனில் $f_1 = f_2$) முதல், இரண்டாவது கயிறுகளின் இழுவிசைகள் முறையே T_1 T_2 என்க.

$$\therefore \quad T_1 - Pg = Pf_1 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

$$Qg - T_2 = Q,\ 2f_1 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

$$T_2 - Rg = R.\ (O)\ O \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

$$\therefore \quad T_2 = Rg.$$

இப்பொழுது இரண்டாவது கப்பியின் இயக்கத்தைக் கருதுக.

$$T_1 - 2T_2 = O.\ (f_1) = O.$$

$$\therefore \quad T_1 = 2T_2 = 2Rg.$$

(2) இலிருந்து, $Qg - T_2 = 2Qf_1$

$$\therefore \quad f_1 = \frac{Qg - T_2}{2Q} = \frac{Qg - Rg}{2Q} = \frac{(Q-R)}{2Q}g$$

(1) இலிருந்து, $2Rg - Pg = \dfrac{P\,(Q-R)\,g}{2Q}\,g$

$$2R - P = \frac{P\,(Q-R)}{2Q}$$

அல்லது, $4\,QR - 2\,PQ = PQ - PR.$

அதாவது, $4\,QR + PQ = 3\,PQ$

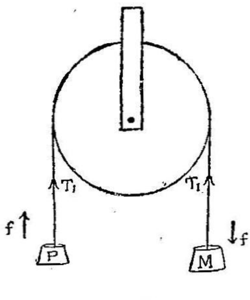
$$\therefore \quad \frac{4}{P} + \frac{1}{Q} = \frac{3}{R}.$$

மாதிரி 36. ஒரு இலேசான வழவழப்பான கப்பியின் வழியே செல்லும் ஒரு இலேசான நீளியல்பற்ற ஒரு கயிற்றின் மூலம் இரு பொருட்கள் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. அவற்றுள் M பொருண்மையுடைய ஒரு பொருள் கீழ்நோக்கி இறங்கும்போது அத்தொகுதியின் முடுக்கம் f என்று காணப்பட்டது. இப்பொழுது அப்பொருளிலிருந்து m பொருண்மையுள்ள ஒரு பகுதி எடுக்கப் பட்டபோது அது f எனும் அதே முடுக்கத்துடன் மேல்நோக்கிச் செல்கிறது.

$$m = \frac{4\,Mgf}{(g+f)^2}$$

என்று நிறுவுக.

தீர்வு : மற்றொரு பொருளின் பொருண்மை P என்க. முதல் வகையில், அதாவது M கீழே இறங்கும்போது கயிற்றின் இழுவிசை T_1 என்க. Mg, Pg ஆகிய எடைகள் நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கியும், கயிற்றின் இரு பகுதிகளிலும் T_1 மேல்நோக்கியும் செயல்படும். பொதுமுடுக்கம் f ஆகையால் இயக்கச் சமன்பாடுகள் வருமாறு :



படம் 33

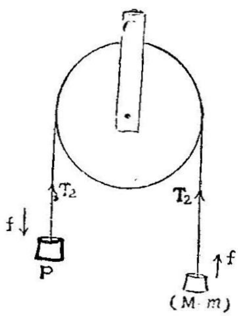
$$Mg - T_1 = Mf$$

$$\therefore \quad T_1 - M\,(g-f)$$

$$T_1 - Pg = Pf \qquad \therefore \quad T_1 = P\,(g+f)$$

எனவே, $P\,(g+f) = M\,(g-f)$

அல்லது, $$P = \frac{M(g-f)}{(g+f)}$$



படம் 34

இப்பொழுது Mஇலிருந்து m எனும் பொருண்மை எடுக்கப்பட்டபின் இரு முனைகளிலுமுள்ள எடைகள் $(M-m)g$, Pg ஆகும், இப்பொழுது, $(M-m)$ பொருண்மை மேல்நோக்கியும், P கீழ் நோக்கியும் f முடுக்கத்துடன் செல்கின்றன. கயிற்றின் இப்போதைய இழுவிசை T_2 என்க. இயக்கச் சமன்பாடுகள் வருமாறு :

$$T_2 = (M-m)g = (M-m)\,f$$

கூட்டுக. $$\frac{Pg - T_2 \quad = \quad Pf}{(P-M+m)g = (P+M-m)\,f}$$

$$P = \frac{M(g-f)}{g+f}$$ என்று பிரதியிடுக.

$$\left(\frac{M(g-f)}{g+f} - M+m\right)g = \left(\frac{M(g-f)}{g+f} + M-m\right)f$$

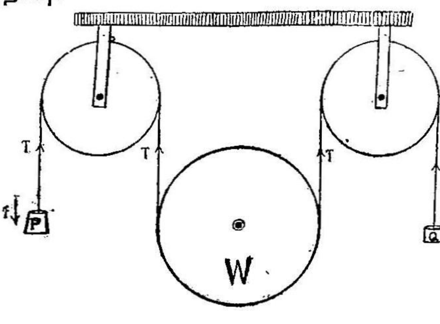
$$[M(g-f) - M(g+f) + m(g+f)]\,g$$
$$= [M(g-f) + M(g+f) - m(g+f)]\,f$$
$$Mg(g-f \quad g-f) + mg(g+f)$$
$$= Mf(g-f+g+f) - mf(g+f)$$
$$-2\,Mgf + mg(g+f) = 2\,Mgf - mf(g+f)$$
$$m(g^2 + gf + gf + f^2) = 4\,Mgf$$
$$\therefore \; m = \frac{4\,Mgf}{(g+f)^2}$$

மாதிரி 38. W என்னும் பளுவைத் தாங்கிக் கொண்டிருக்கும் ஒரு கப்பி ஒரு கயிற்றில் தொங்கிக் கொண்டிருக்கிறது. அக் கயிற்றின் இரு பகுதிகளும் இரு நிலையான கப்பிகளின் வழியே சென்று, அவற்றின் முனைகளில் P, Q $(P > Q)$ என்னும் அசம எடைகளை நிலைக்குத்தாகத் தாங்குகின்றன. W ஓய்வு நிலையிலிருக்க வேண்டுமாயின்

$$\frac{1}{P} + \frac{1}{Q} = \frac{4}{W}$$

என்று காட்டுக.

தீர்வு:



படம் 35

தொகுதி முழுவதும் ஒரே கயிறு செல்வதால் கயிற்றின் இழுவிசை கயிறு முழுவதும் ஒரே மாதிரியாக இருக்கும். இவ்விழுவிசையை T என்க. $P > Q$ ஆகையால், P கீழ் நோக்கியும், Q மேல் நோக்கியும் சம முடுக்கத்துடன் நகரும். இச்சம முடுக்கம் f என்க. P, Q ஆகிய எடைகளின்

பொருண்மைகள் முறையே $\frac{P}{g}$, $\frac{Q}{g}$ ஆகும்.

நடுவிலுள்ள கப்பியின் எடை W ஐ அதன் வழியே செல்லும் கயிற்றின் இரு பகுதிகளிலுமுள்ள இழுவிசைகள் தாங்குவதால்,

$$2\,T = W$$

அல்லது, $T = \frac{W}{2}$.

எடை P யின் இயக்கச் சமன்பாடு :

$$P - T = \frac{P}{g} \cdot f. \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

எடை Q வின் இயக்கச் சமன்பாடு :

$$T - Q = \frac{Q}{g} \cdot f \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$(1) \times Q$: $$P\,O - Q\,T = \frac{P\,Q}{g} \cdot f$$

$(2) \times P$: $$P\,T - P\,Q = \frac{P\,Q}{g} \cdot f$$

கழிக்கவும். $$2\,P\,Q - T\,(P + Q) = O$$

$$2\,P\,Q - \frac{W}{2}(P + Q) = O.$$

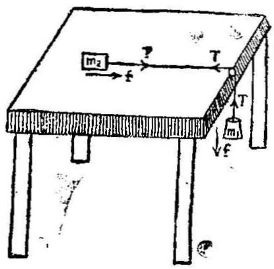
$$W\,(P + Q) = 4\,P\,Q$$

$$\frac{(P + Q}{P\,Q} = \frac{4}{W}$$

$$= \frac{1}{P} + \frac{1}{Q} = \frac{4}{W}.$$

2. (அ) ஒரு வழவழப்பான கிடைத்தள மேசையின் ஓரத்தில் பொருத்தப்பட்டுள்ள ஒரு இலேசான வழவழப்பான கப்பியின் வழியே செல்லும் ஒரு இலேசான, நீளியல் பற்ற கயிற்றின் முனைகளில் m_1, m_2 ஆகிய பொருண்மைகள் இணைக்கப் பட்டுள்ளன, m_1 நிலைக்குத்தாகத் தொங்கிக் கொண்டிருக்க, m_2 மேசையின் மேல் வைக்கப்பட்டுள்ளது. பொருண்மைகளின் இயக்கத்தை நிர்ணயிக்கவும். கயிற்றின் இழு விசையையும், கப்பியின் மீதுள்ள அழுத்தத்தையும் காண்க.

தீர்வு: m_1 நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கி நகரும் போது m_2 கிடைத்தளமாக மேசையின் மேல் சம அளவு முடுக்கத்துடன நகரும். இரு பொருண்மைகளுக்கும் பொதுவான முடுக்கம் T என்றும், கயிற்றின் இழுவிசை T என்றும் கொள்க.



படம் 36

m_1 கீழ்நோக்கி நகருவதால்,

$$m_1 g - T = m_1 f \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

m_2 — இன் எடை நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கி மேசையின் மீது செயல்படும். m_2 நகருகின்ற கிடைத்தளத் திசையில் செயல்படும் விசை T மட்டுமே. எனவே,

$$T = m_2 f \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

ஆகவே, (1) இலிருந்து,

$$m_1 g - m_2 f = m_1 f$$

$$m_1 g = (m_1 + m_2) f$$

அல்லது, $$f = \frac{m_1 g}{m_1 + m_2}$$

$\therefore$ கயிற்றின் இழுவிசை $T = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g.$

கப்பியின் மீது, நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கிச் செயல்படும் T என்னும் இழுவிசையும், மேசையின்மீது கிடைத்தளமாகச் செயல்படும் T எடையும் அழுத்துகின்றன. இவ்விரு அழுத்தங்களும் நேர்கோணத் திசைகளில் செயல்படுவதால், கப்பியின் மீது கயிற்றின் அழுத்தம் இவ்விரு இழுவிசைகளின் விளைவுக்குச் சமமாகும்.

$\therefore$ கப்பியின் மீது அழுத்தம் $= \sqrt{T^2 + T^2}$

$$= \sqrt{2 T}$$

$$= \sqrt{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m} g.$$

2. (ஆ) உராய்வுடைய கிடைத்தள மேசையின் ஓரத்தில் பொருத்தப்பட்டுள்ள ஒரு இலேசான வழவழப்பான கப்பியின் வழியே செல்லும் ஒரு இலேசான நீளியரு பற்ற கயிற்றின் முனைகளில் m_1, m_2 ஆகிய பொருண்மைகள் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. m_1 நிலைக்குத்தாகத் தொங்கிக் கொண்டிருக்க, m_2

மேசையின் மேல் வைக்கப்பட்டுள்ளது. மேசையின் உராய்வுக் குணகம் μ எனில், பொருண்மையின் இயக்கத்தையும், கயிற்றின் இழுவிசையையும் நிர்ணயிக்கவும்.

m_1 கீழ்நோக்கி நகரும்போது, m_2 கிடைத்திசையில் மேசையின் மேல் சம அளவு முடுக்கத்துடன் நகரும். இச்சம முடுக்கம் f என்றும், கயிற்றின் இழுவிசை T என்றும் கொள்க.

m_2 — இன் எடை மேசையின் மீது நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கிச் செயல்படும். m_2 — இன் மீது மேசையின் எதிரழுத்தம் R நிலைகுத்தாக மேல் நோக்கிச் செயல்படும். m_2 மேசையின் மேல் கப்பியை நோக்கி நகருமாகையால், உராய்வு விசை μR எதிர்த்திசையில் செயல்படும். எனவே, m_2 நகரும் திசையில் செயல்படும் விளைவுவிசை $T - \mu R$ ஆகும். m_2 — இன் முடுக்கம் f ஆகையால்,

$$T - \mu R = m_2 f \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

m_2-க்கு நிலைக்குத்து இயக்கம் கிடையாதாகையால், அதன் எடை $m_2 g$-ம் மேசையின் எதிரழுத்தம் R-ம் விளைவு நீக்கம் செய்து கொள்ளும்.

$$= R = m_2 g \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

பொருண்மை m_1 கீழ்நோக்கி f முடுக்கத்துடன் நகருவதால்,

$$m_1 g - T = m_1 f \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

(1), (2) இலிருந்து, $T - \mu m_2 g = m_2 f$

கூட்டுக. $\dfrac{m_1 g - T \quad = m_1 f}{(m_1 - \mu m_2 \quad = (m_1 + m_2) f}$

$$\therefore \quad f = \left(\frac{m_1 - \mu m_2}{m_1 + m_2}\right)$$

(3) இலிருந்து, $T = m_1 g - m_1 f$

$$= m_1 g - m_1 g \frac{(m_1 - \mu m_2}{m_1 + m_2}$$

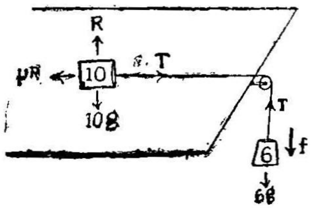
$$= m_1 g \left[1 - \frac{m_1 - \mu m_2}{m_1 + m_2} \right]$$

$$= m_1 g \left[\frac{m_1 + m_2 - m_1 + \mu m_2}{m_1 + m_2} \right.$$

$$= m_1 g \left[\frac{m_2 (1 + \mu)}{m_1 + m_2} \right]$$

$$= \frac{m_1 m_2 (1 + \mu)}{m_1 + m_2} g.$$

மாதிரி 39. ஒரு உராய்வுடைய மேசையின் ஓரத்தில் பொருத்தப்பட்டுள்ள ஒரு வழவழப்பான கப்பியின் வழியே செல்லும் ஒரு இலேசான நீளியல்பற்ற கயிற்றில் தொங்கிக் கொண்டிருக்கும் 6 ராத்தல் எடையுள்ள பொருள் ஒன்று கயிற்றின் மறுமுனையில் இணைக்கப்பட்டு மேசையின் மேல் வைக்கப்பட்டுள்ள 10 ராத்தல் எடையுள்ள ஒரு பொருளை இழுக்கிறது. மேசையின் உராய்வுக் குணகம் 0.4 எனில் முடுக்கம், கயிற்றின் இழுவிசை ஆகியவற்றைக் காண்க. பொருட்கள் 1 வினடி நேரம் நகர்ந்தபின் கயிறு அறுந்துவிட்டால், மேசையின் 10 ராத்தல் பொருள் மேற்கொண்டு எவ்வளவு தூரம் நகர்ந்து நிற்கும்?



படம் 37

தீர்வு : கயிற்றின் இழுவிசை T என்றும், இரு பொருட்களுக்கும் பொதுவான முடுக்கம் f என்றும் கொள்க. 6 ராத். பொருள் கீழ்நோக்கி நகருவதால்,

$$6g - T = 6f \quad \ldots \quad (1)$$

10 ராத். பொருளின் எடை $10g$ கீழ்நோக்கியும், மேசையின் எதிரழுத்தம் R மேல் நோக்கியும் செயல்படும். இப்பொருளுக்கு நிலைக்குத்தியக்கம் கிடையாதாகையால்,

$$R = 10\,g \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

கயிற்றின் இழுவிசை கப்பியை நோக்கியும், மேசையின் உராய்வு விசை எதிர்த் திசையிலும் செயல்படும். இப்பொருள் கப்பியை நோக்கி f முடுக்கத்துடன் நகருவதால்,

$$T - \mu R = 10\,f \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

(2), (3) இலிருந்து, $T - 10\,\mu g = 10\,f$

$\mu = \cdot 4$ ஆகையால், $T - 4g \quad = 10\,f$

(1) இலிருந்து $\begin{aligned} 6g - T &= 6f \\ \hline 2g &= 16f \end{aligned}$

கூட்டுக. $\therefore \; f = \frac{2g}{16} = \frac{2 \times 32}{16} = 4$ அடி/(விநாடி)^2.

$$T = 6g - 6f$$
$$= 192 - 24$$
$$= 168 \text{ ராத்தல்கள்}$$
$$= \frac{168}{32} = 5\tfrac{1}{4} \text{ ராத். எடை.}$$

இரு பொருட்களும் ஓய்விலிருந்து 1 விநாடி நேரம் நகர்ந்தபின் கயிறு அறுந்து விடுகிறது. ஒரு விநாடி நேரத்தில் அவை அடைந்துள்ள வேகம் v என்க.

$$u = O \; ; \; v = v \; ; \; a = 4 \; ; \; t = 1$$
$$v = u + at$$
$$= O + 4 \times 1 = 4 \text{ அடி/(விநாடி)}$$

கயிறு அறுந்ததும், மேசையிலுள்ள 10 ராத். பொருளுக்கு மேசையின் உராய்வு விசையின் காரணமாக எதிர்முடுக்கம் ஏற்படுகிறது. இந்த எதிர்முடுக்கம் a எனில்,

$$10\,a = \text{உராய்வு விசை} = \mu R = .4 \times 10g = 4g$$

$$\therefore \; a = \frac{4g}{10} = \frac{4 \times 32}{10} = \frac{64}{5} \text{ அடி/(விநாடி)}^2$$

இப்பொழுது மேசையிலுள்ள பொருள் 4 அடி/வி. தொடக்க வேகத்துடனும், $\frac{64}{5}$ அடி/(விநாடி)^2 எதிர் முடுக்கத்துடனும் நகர்ந்து செல்கிறது. அது ஓய்வுக்கு வருமுன் நகர்ந்து செல்லும் தூரம் S எனில்,

$$v^2 = u^2 + 2as$$

$$O = 4^2 + 2\left(-\frac{64}{5}\right)S$$

$$= 16 - \frac{128}{5}S$$

$$\therefore \quad S = \frac{80}{128} = \frac{5}{8} \text{ அடி.}$$

கயிறு அறுந்து போகுமுன் மேசையின் மேலுள்ள பொருள் O தொடக்க வேகத்துடனும், 4 அடி/(வினுடி)^2 முடுக்கத்துடனும் 1 வினுடி நேரத்திற்கு நகருகிறது. இந்த ஒரு வினுடியில் நகர்ந்த தூரம் S_1 எனில்,

$S = ut + \frac{1}{2} at^2$ என்னும் சூத்திரத்திலிருந்து,

$$S = O + \frac{1}{2} \times 4 \times 1^2$$

$$= 2 \text{ அடி.}$$

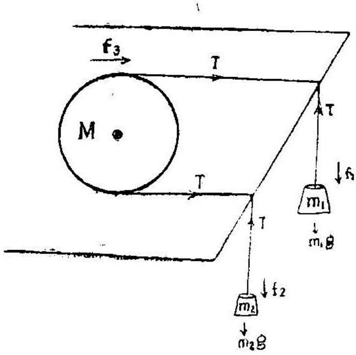
ஆகவே, மேசையின் மேலுள்ள 10 ராத். பொருள் மொத்தம் தூரம் $= \frac{5}{8} + 2 = 2\frac{5}{8}$ அடி.

மாதிரி 40. ஒரு வழவழப்பான கிடையான மேசையின் மேல் கிடையாக வைக்கப்பட்ட ஒரு சிறிய வழவழப்பான கப்பியைச் சுற்றிச் செல்லும் ஒரு இலேசான நீளியல்பற்ற கயிற்றின் இரு முனைகளில் m_1, m_2 என்னும் இரு பொருண்மைகள் இணைக்கப்பட்டு, கயிற்றின் இருமுனைகளையும் சேர்ந்த பகுதிகள் மேசையின் ஓரத்திற்குச் செங்குத்தாகயிருக்குமாறு தொங்க விடப்பட்டுள்ளன. கப்பியின் பொருண்மை M எனில், அதன் முடுக்கம்

$$\frac{4\, m_1\, m_2}{M\,(m_1 + m_2) + 4\, m_1 m_2}$$

என்று காட்டுக.

தீர்வு : $m_1 > m_2$ என்று கொள்க. கபபி மேசையின் மேல் நிலையாகயிருப்பின் m^1 கீழ்நோக்கியும், m_2 அதே முடுக்கத்துடன் மேல் நோக்கியும் நகரும். ஆனுல் கப்பியானது மேசையின் மேல் நகரக்கூடியதா யிருப்பதால், கயிற்றின் இருபகுதிகளிமுள்ள இழுவிசைகளின் அழுத்தம் காரணமாக கப்பி மேசையின் விளிம்பை நோக்கி நகரும். இதன் காரணமாக, m_2 மேல்



படம் 38

நோக்கி நகர்ந்து கொண்டிருந்த போதிலும், மொத்த விளைவு கீழ்நோக்கி நகருவதாயிருக்கும். ஆகவே, m_1, m_2 கப்பி ஆகிய மூன்றும் வெவ்வேறு முடுக்கங்களுடன் நகரும். இம் முடுக்கங்கள் முறையே f_1, f_2, f_3 என்க. கயிற்றின் இழுவிசை எங்கும் ஒரே மாதிரியாகயிருக்கும். இவ் விழுவிசையை T என்க. எனவே, பின்வரும் இயக்கச் சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றன.

$m_1 g - T - m_1 = f_1$ அல்லது, $f_1 = g - \frac{T}{m_1}$

$m_2 g - T = m_2 f_2$ அல்லது, $f_2 = g - \frac{T}{m_2}$

$2T = M f_3$ அல்லது, $f_3 = \frac{2T}{M}, T \; \frac{M f_3}{2}$

கயிற்றின் நீளம் மாறிலியாயிருப்பதால்,

கப்பியைப் பொறுத்து m_1இன் முடுக்கம் $=$ — (கப்பியைப் பொறுத்து m_2இன் முடுக்கம்)

அதாவது, $f_1 - f_3 = -(f_2 f_3) = f_3 f_2$

அல்லது, $f_1 + f_2 = 2f_3$

அதாவது, $g - \frac{T}{m_1} + g - \frac{T}{m_2} = 2 f_3$

$$2g = T\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) 2 f_3$$

அல்லது, $2f_3 = 2g - \frac{Mf_3}{2}\left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}\right)$

$$4 f_3 = 4g - = f_3 \frac{(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}$$

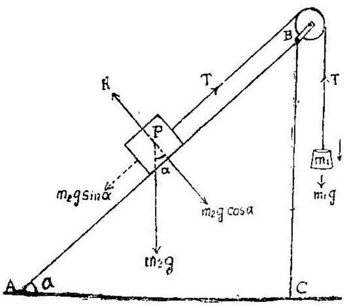
$$4 f_3 + Mf_3 \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}\right) = 4g$$

$$f_3\left[\frac{4 m_1 m_2 + M (m_1 + m_2)}{m_1 m_2}\right] = 4 g$$

$$\therefore f_3 = \frac{4 m_1 m_2 g}{4 m_1 m_2 + M (m_1 + m_2)}$$

3. கிடைத்தளத்துடன் α கோணச் சாய்விலுள்ள ஒரு வழவழப்பான சாய்தளத்தின் உச்சியில் பொருத்தப்பட்டுள்ள

ஒரு சிறு வழவழப்பான கப்பியின் வழியே செல்லும் ஒரு இலேசான நீளியல்பற்ற கயிற்றின் முனைகளில் m_1, m_2 பொருண்மைகளுள்ள இரு பொருட்கள் இணைக்கப்பட்டு, m_1 நிலைக்குத்தாகத் தொங்கிக் கொண்டிருக்குமாறும், m_2 சாய்தளத்தின் மேலிருக்குமாறும் வைக்கப்பட்டுள்ளன. m_1 கீழ்நோக்கி இறங்குகிறதெனில், விளைவு இயக்கத்தையும், கயிற்றின் இழுவிசையையும் காண்க.



படம் 39

கயிற்றின் இழுவிசை கயிறு முழுவதும் ஒரே மாதிரியாக இருக்கும். இவ்விழுவிசை T என்க.

m_1, m_2 ஆகிய இரண்டும் ஒரே முடுக்கத்துடன் நகரும். இச்சம முடுக்கம் f என்க.

பொருள் m_1 இன் இயக்கச் சமன்பாடு :

$$m_1 g - T = m_1 f \quad \ldots \quad (1)$$

பொருண்மை m_2 இன் எடை நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கிச் செயல்படும். இப்பொருளின் மீது சாய்தளத்தின் எதிர்முத்தம் R சாய்தளத்திற்குச் செங்குத்தாகச் செயல்படும். கயிற்றின் இழுவிசை T தளத்தில் மேல்முகமாகச் செயல்படும். பொருளின் எடை $m_2 g$ யின் குத்துப் பிரிவுகள் தளத்தின் வழியே கீழ்முகமாக $m_2 g \sin \alpha$-வும், தளத்திற்குச் செங்குத்தாக R க்கு எதிர்த் திசையில் $m_2 g \cos \alpha$ ஆகும்.

சாய்த்தளத்திற்குச் செங்குத்துத் திசையில் பொருண்மை m_2 க்கு இயக்கம் கிடையாதாகையால்,

$$R = m_2 g \cos \alpha \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

சாய்தளத்தின் வழியே மேல்முகமாக பொருண்மை m_2 ஆனது f முடுக்கத்துடன் நகருவதால்,

$$T - m_2 g \sin \alpha = m_2 f \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

(1) , (3) ஆகிய சமன்பாடுகளைக் கூட்டவும்.

$$(m_1 - m_2 \sin \alpha)\, g = (m_1 + m_2)\, f$$

$$\therefore f = \frac{(m_1 - m_2 \sin \alpha) g}{m_1 + m_2}$$

(1) இலிருந்து, $T = m_1 (g = f)$

$$= m_1 \left[g - \frac{(m_1 - m_2 \sin \alpha) g}{m_1 + m_2} \right]$$

$$= m_1 g \left[\frac{m_1 + m_3 - m_1 + m_2 \sin \alpha}{m_1 + m_2} \right]$$

$$= \frac{m_1 m_2 (1 + \sin \alpha) g}{m_1 + m_3}.$$

குறிப்பு 1. $m_1 = m_2 \sin \therefore$ எனில் $f = O$. இரு பொருட்களும் சமநிலையிலிருக்கும்.

குறிப்பு 2. $m_2 > m_2 \sin \alpha$ எனில், $f > O$ ஆகையால் m_1 கீழ்நோக்கி நகரும்.

குறிப்பு 3. $m_3 \angle m_2 \sin \alpha$ எனில், $f \angle O$ ஆகையால் m_1 மேல் நோக்கி நகரும்.

குறிப்பு 4: கப்பியின் மீது கயிற்றின் அழுடுதம் T^2 எனில் T^1 என்பது கப்பியின் இரு புறமுமுள்ள கயிற்றுப் பகுதிகளின் இழுவிசைகள் $T\ T$ ஆகியவற்றின் விளைவு விசையாகும். இவ்விரு இழுவிசைகளுக்கு மிடையேயுள்ள கோணம் $\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$ ஆகையால்,

$$T^1 = \sqrt{T^2 + T^2 + 2\ T.\ T. \cos (\pi - \alpha)}$$

$$= \sqrt{2\ T^2 \left\{ 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \right\}}$$

$$= \sqrt{2\ T^2 \left\{ 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \right\}}$$

$$= 2\ T \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$= \frac{2\ m_1\ m_2\ g\ (1 + \text{son}\ \alpha) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}{m_1 + m_2}$$

$$= \frac{2 m_1 m_2 g \left[1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \right] \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}{m_1 + m_2.}$$

மாதிரி 41. l நீளமும், h உயரமுமுள்ள ஒரு வழவழப்பான சாய்தளத்தின் உச்சியில் பொருத்தப்பட்டுள்ள ஒரு சிறு வழ வழப்பான கப்பியின் வழியே செல்லும் ஒரு இலேசான நீளியல் பற்ற கயிற்றின் முனைகளில் m_1, m_2 பொருண்மைகளுள்ள இரு பொருட்கள் இணைக்கப்பட்டு, m தொங்கிக் கொண்டிருக்கு மாறும், m_2 சாய்தளத்தின் மேலிருக்குமாறும் வைக்கப் பட்டுள்ளன. பொருண்மை m_2 சாய்தளத்தின் அடியிலிருக்கும் போது இயக்கங் தொடங்குகிறது. பொருண்மை m_2 சாய்தளத் தின் வழியே மேல்முகமாக x தூரம் சென்றதும் கயிறு அறுந்து விடுகிறது. இருப்பினும் அது தளத்தின் உச்சியைச் சரியாக அடைய முடிகிறதெனில்

$$x = \frac{m_1 m_2}{m_1} \cdot \frac{h l}{h + l}$$

என்று காட்டுக.

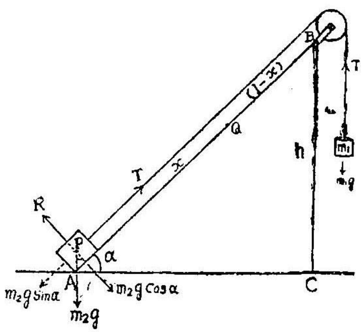
தீர்வு :

கயிற்றின் இழுவிசை T என்றும், இரு பொருட்களுக் கும் பொதுவான முடுக்கம் f என்னும் கொள்க.

பொருண்மை m_1 இன் இயக்கச் சமன்பாடு :

$m_1 g - T = m_1 f \quad \dots (1)$

பொருண்மை m_2 இன் எடை $m_2 g$ நிலைக்குத்தாகக் கீழ் நோக்கிச் செயல்படும். அதன் மீது சாய்தளத்தின் எதிரழுத்தம் தளத்திற்குச் செங்குத்தாகச் செயல்படும். கயிற்றின் இழுவிசை தளத்தில் மேல்முகமாகச் செயல்படும். எடை $m_2 g$ யின் குத்துப்பிரிவு களாகிய $m_2 g \sin \alpha$, $m_2 g \cos \alpha$ ஆகியவை முறையே தளத் தின் வழியே கீழ்முகமாகவும், தளத்திற்குச் செங்குத்தாக R க்கு எதிர்த்திசையிலும் செயல்படும்.



படம் 40

தளத்திற்குச் செங்குத்தாக m_2 க்கு இயக்கம் கிடையாத தாகையால்,

$$R = m_2 g \cos \alpha \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

தளத்தின்மீது m_2 மேல் முகமாக f முடுக்கத்துடன் நகருவதால்,

$$T - m_2 g \sin \alpha = m_2 f$$

$$\text{ஆனால், } \sin \alpha = \frac{R}{l}$$

$$\therefore T - m_2 g \frac{R}{l} = m_2 f \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

(3), (2) ஆகிய தொடர்புகளைக் கூட்டவும்.

$$g\left(m_1 - \frac{m_2 h}{l}\right) = \; = (m_1 + m_2) f.$$

$$\therefore f = \frac{(m_1 l - m_2 h) g}{t\,(m_1 + m_2)} \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

பொருண்மை m_2 தளத்தின் அடியிலிருந்து O தொடக்க வேகத்துடனும் f முடுக்கத்துடனும் புறப்பட்டு x தூரம் செல்கிறது. x தூரம் சென்றதும் அதன் திசைவேகம் v என்க.

$$v^2 = v^2 + 2 f S$$

$$= O + \frac{2 (m_1 l - m_2 h) g x}{l (m_1 1 + m_2)}$$

$$= \frac{2 (m_1 l - m_2 h) g x}{l (m_1 + m_2)}$$

x தூரம் சென்றதும் Q-வில் கயிறு அறுந்து விடுகிறது. அதன் பின் தொடக்கவேகம் v யுடன் $(l - \alpha)$ தூரம் சென்று நின்றுவிடுகிறது. எதிர்முடுக்கம் f_1 என்க.

சரிவின் காரணமாகப் பின்முக விசை $= m_2 g \sin \alpha = \dfrac{m_2 g h}{l}.$

சாய்தளத்தில் எதிர்முடுக்கம் f^1 ஆகையால்,

$$\frac{m_2 g h}{1} = m_2 f^1$$

அல்லது, எதிர்முடுக்கம் $f^1 = \dfrac{g h}{l}.$

எனவே, $l-\propto$ தூரப் பயணத்தின் போது,

$$u = \text{தொடக்கவேகம்} = \sqrt{\frac{2\,(m_1\,l - m_2\,R)\,g\,x}{l\,(m_1 + m_2)}}$$

$$v = \text{இறுதிவேகம்} = O$$

$$S = \text{தூரம்} = (l - \propto)$$

$$f = \text{எதிர்முடுக்கம்} = f^1 = \frac{g\,R}{l}$$

$$\therefore v^2 = u^2 + 2\,f\,S$$

$$O = \frac{2\,(m_1\,l - m_2\,h)\,g\,x}{l\,(m_1 + m_2)} - 2\,\frac{gh}{l}\,(l - x)$$

$$= \frac{2\,(m_1\,l - m_2\,h)\,g\,x}{l\,(m_1 + m_2)} - 2gh + \frac{2\,g\,h\,x}{l}.$$

$$\therefore \frac{2\,(m_1\,l - m_2\,h)\,g\,x}{l\,(m_1 + m_2)} + \frac{2\,g\,h\,x}{l} = 2gh$$

$$\frac{2\,g\,x}{l\,(m_1 + m_2)}[m_1\,l - m_2\,h + h\,(m_1 + m_2)] = 2\,g\,h$$

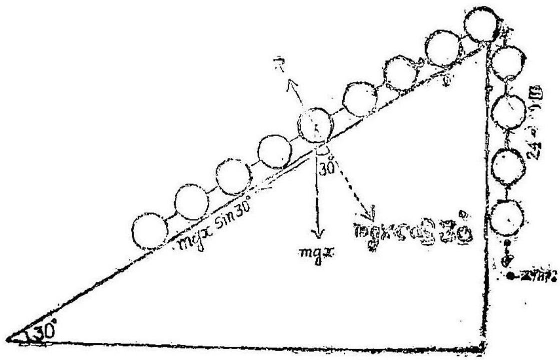
$$\frac{x}{l\,(m_1 + m_2)}\,[m_1\,(l + h)] = h.$$

$$x = \frac{h\,l\,(m_1 + m_2)}{m_1\,(h + l)}$$

$$= \frac{m_1 + m_2}{m_1} \cdot \frac{h\,l}{h + l}.$$

மாதிரி **42.** சம பொருண்மையுடைய 24 பந்துகள் ஒரு இலேசான நீளியல்பற்ற கயிற்றின் மூலம் சம இடைவெளிகளில் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. இடைத்தளத்துடன் 30° சாய்விலுள்ள ஒரு வழவழப்பான சாய்தளத்தன் மேல் சில பந்துகளிருக்குமாறும், எஞ்சியவை சநய்தளத்தின் உச்சியிலிழிந்து தொங்கிக் கொண்டிருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளன. 4 அடி/(விநாடி)^2 முடுக்கத்துடன் இயக்கம் தொடங்கவேண்டுமாயின் தளத்தின் மேல் எத்தனை பந்துகள் வைக்கப்படவேண்டும்?

தீர்வு :



படம் 41

ஒரு பந்தின் பொருண்மை m என்க. x பந்துகள் தளத்தின் மேலும், (24-x) பந்துகள் தொங்கிக் கொண்டு மிருப்பதாகக் கொள்க. எனவே, தளத்தின் மேலுள்ள x பந்துகளின் $m\,g\,x$ ஆகும். இது x பந்துகளின் புவியீர்ப்பு மையம் வழியே நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கிச் செயல்படும். கயிற்றின் இழுவிசை T தளத்தின் வழியே மேல்முகமாவும், பந்துகளின் மீது தளத்தின் எதிரழுத்தம் R தளத்திற்குச் செங்குத்தாகச் செயல்படும். தளத்தின் வழியே கீழ்முகமாகவும், தளத்திற்குச் செங்குத்தாக Rக்கு எதிர்த்திசையிலும் $m\,g\,x$ இன் குத்துப் பிரிவுகள் முறையே $m\,g\,x \sin 30° = \frac{m\,g\,x}{2}$, $m\,g\,x\, 30° = m\,g\,x$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ஆகும்.

தொங்கிக் கொண்டிருக்கும் (24-x) பந்துகளின் எடை (24-x) mg. பந்துகளின் பொதுவான முடுக்கம் f என்க. இயக்கச் சமன்பாடுகள் வருமாறு :

$$(24\text{-}x)\,mg - T = (24\text{-}x)\,mf$$

$$T - \frac{m\,g\,x}{2} = m\,x\,f$$

கூட்டுக. $mg\,(24\text{-}x\text{-}\,\frac{x}{2}) = 24\,m\,f.$

$$\therefore f = \frac{(24\text{-}\,\frac{3}{2}x\,)g}{24} = \frac{(48\text{-}3\,x)\,g}{48}$$

ஆனால், $f = 4$ அடி/(வினடி)^2 என்று கொடுக்கப்பட்டுள்ள தால்,

$$\frac{(48-3x)\,g}{48} = 4$$

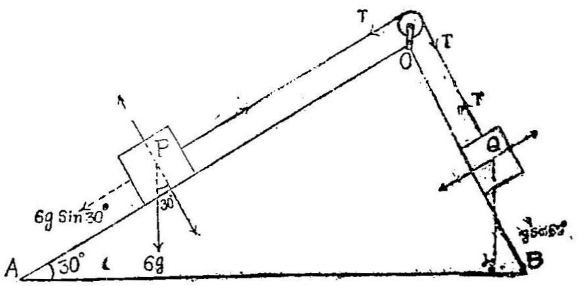
$$192 = (48-3x) \times 32$$

$$3\,x = 48 - 6 = 42$$

$$x = \mathbf{14.}$$

∴ 14 பந்துகளைச் சாய்தளத்தின் மேலும் 10 பந்துகளைத் தொங்கிக் கொண்டிருக்குமாறும் வைக்கப்படவேண்டும்.

மாதிரி **43.** சம உயரமுடைய இரு வழவழப்பான சாய் தளங்கள் கிடைத்தளத்துடன் முறையே $30°$, $60°$ சாய்வுகளி லிருக்குமாறு உச்சியில் பின்புறமாகத் தொட்டுக் கொள்ளும் நிலையில் வைக்கப்பட்டுள்ளன. இத்தளங்களின் மேல் முறையே 6 ராத்தல், 10 ராத்தல் பொருண்மைகளுள்ள பொருட்கள் வைக்கப்பட்டு, தளங்களின் பொது உச்சியில் பொருத்தப் பட்டுள்ள ஒரு வழவழப்பான கப்பியின் வழியே செல்லும் ஒரு இலேசான நீளியல்பற்ற கயிற்றின் மூலம் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. இத்தொகுதியின் முடுக்கத்தையும், கயிற்றின் இழுவிசையையும் காண்க.



படம் 42

தீர்வு: கயிற்றின் இழுவிசை T என்றும், இரு பொருட் கட்கும் பொதுவான முடுக்கம் f என்றும் கொள்க. இரு பொருட் களின் எடைகள் முறையே $6\,g$, $10\,g$ ஆகும். இந்த எடை

களின் சாய்தள வழிக் கீழ்முகக் கூறுகள் முறையே $6\,g \sin 30^\circ = 3\,g$, $10\,g \sin 60^\circ = 5\sqrt{3}\,g$ ஆகும்.

இயக்கச் சமன்பாடுகள் வருமாறு :

$$5\sqrt{3}\,g - T = 10f$$

கூட்டவும். $$T - 3g = 6f$$
$$(5\sqrt{3}-3)\,g = 16f$$

$$\therefore\ f = \frac{(5\sqrt{3}-3)g}{16}$$

$$= \frac{(5\sqrt{3}-3)\,32}{16}$$

$$= 2\,(5\sqrt{3}-3)$$ அடி/(விநாடி)^2.

மேலும், $T = 6f + 3g$

$= 12\,(5\sqrt{3}-3) + 96$ ராத்தலிகள்

$= (60\sqrt{3} - 36 + 96)$ ராத்தலிகள்

$= 60\,(\sqrt{3}+1)$ ராத்தலிகள்.

குறிப்பு : இரு தளங்களுக்குமிடையேயுள்ள கோணம் 90° ஆகையால், கப்பியின்மீது அழுத்தம்

$$= \sqrt{T^2 + T^2 + 2.T.T.\cos 90^\circ}$$

$$= \sqrt{2}\,T$$

$= 60\sqrt{2}\,(\sqrt{3}+1)$ ராத்தலிகள்.

பயிற்சி 4

1. 3 ராத்; 5 ராத். பொருண்மைகள் ஒரு வழவழப்பான கப்பியின் வழியே செல்லும் ஒரு இலேசான நீளியல்பற்ற கயின் மூலம் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. அவற்றின் பொதுவான முடுக்கம், கயிற்றின் இழுவிசை, கப்பியின் மீதுள்ள அழுத்தம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

2. ஒரு வழவழப்பான கப்பியின் வழியே செல்லும் ஒரு நீளியல்பற்ற கயிற்றின் மூலம் ஒவ்வொன்றும் 3 ராத்தல் பொருண்மையுள்ள இரு தராசுத் தட்டுக்கள் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. 12

ராத்தல் பொருண்மையை பெரிதும் சிறிதுமாக இரு பகுதி களாகப் பிரித்து இரு தட்டுகளிலும் வைக்க வேண்டும். கனமான பொருண்மை முதல் 5 வினடிகளில் 50 அடி தூரம் இறங்குமாறு பிரிக்கலாமென்று காண்க. (மதுரை 1973 ஏப்.)

3. 10 ராத்தல் பொருண்மையுள்ள ஓர் பொருள் ஒரு சிறிய வழவழப்பான கப்பியின் வழியே செல்லும் ஒரு இலேசான கயிற்றின்மூலம் 6 ராத்தல் பொருண்மையுள்ள மற்ருெரு பொருளை மேல் நோக்கி இழுக்கிறது. பொருட்களின் முடுக்கத் தையும் கயிற்றின் இழுவிசையையும் காண்க. 4 விளுடி களுக்குப்பின் இரண்டாவது பொருளின் திசைவேகத்தையும், அடுத்த 4 விளுடிகளில் முதல் பொருள் செல்லும் தூரத்தையும் காண்க.

4. ஒரு வழவழப்பான கப்பியின் வழியே செல்லும் ஒரு இலேசான கயிற்றின்மூலம் நிலைக்குத்தாக இறங்கிக் கொண்டி ருக்கும் 3 கிராம் பொருண்மையொன்று 2 கிராம் பொருண் மையை மேல்நோக்கி இழுக்கிறது. 5 விளுடி முடிவில் கயிறு அறுந்து விடுகிறது. 2 கிராம் பொருண்மை மேற்கொண்டு எவ்வளவு உயரத்திற்குச் செல்லுமென்று காண்.

5. ஒரு நிலையான, இலேசான, வழவழப்பான கப்பியின் வழியே செல்லும் ஒரு இலேசான கயிற்றின்மூலம் 18 ராத் ; 6 ராத். பொருண்மைகளுள்ள இரு பொருட்கள் இணைக்கப்பட் டுள்ளன. இத்தொகுதி இயக்கத்தில் விடப்பட்டு 2 விளுடி களுக்குப்பின் முதல் பொருளின் திசைவேகத்தைக் காண்க. இரண்டு விளுடிகளுக்குப்பின் கயிறு அறுந்துபோனுல், அதற்குப் பின் எவ்வளவு நேரம் இரண்டாவது பொருள் மேல்நோக்கிச் செல்லுமென்றும், அது மொத்தம் சென்ற மேல்நோக்கிய தூரம் எவ்வளவென்றும் காண்க.

6. ஒரு வழவழப்பான கப்பியின் வழியே செல்லும் ஓர் இலேசான கயிற்றின்மூலம் இறங்கிக் கொண்டிருக்கும் 3 ராத்தல் பொருண்மையொன்று 2 ராத்தல் பொருண்மையுள்ள மற்ருெரு பொருளை மேல்நோக்கி இழுக்கிறது. 5 விளுடிகளின் இறுதியில் கயிறு அறுந்து போனுல் 2 ராத்தல் பொருண்மை மேலும் எவ்வ்ளவு உயரத்திற்குச் செல்லும்?

7. 4 கிராம் பொருண்மையொன்று ஒரு சிறிய வழவழப் பான கப்பியின் வழியே செல்லும் ஒரு கயிற்றின்மூலம் அதிகக் கனமான எடையுள்ள மற்ருெரு பொருளுடன் இணைக்கப்பட்டுள்

ளது. 3 விநாடிகளின் இறுதியில் கயிறு வெட்டப்படுகிறது. சிறிய பொருள் கீழே இறங்குமுன் 54.5 செ.மீ. உயரம் சென்றால், கனமான பொருளின் பொருண்மையைக் காண்க.

8 ஒரு வழவழப்பான கப்பியின் வழியே செல்லும் ஒரு கயிற்றின் இருமுனைகளிலும் 7 கிராம், 14 கிராம் பொருண்மை களுள்ள பொருட்கள் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. இயக்கம் 3 விநாடி கட்குத் தொடர்ந்த பின்னர் கயிறு அறுந்து போனால், மேற் கொண்டு எவ்வளவு நேரத்திற்குப்பின் சிறிய பொருள் அது முதன் முதலிருந்த நிலையை அடையுமென்று காண்.

9. ஒரு வழவழப்பான கப்பியின் வழியே செல்லும் ஒரு நீளியல்பற்ற கயிற்றின்மூலம் இரு எடைகள் இணைக்கப்பட்டுள் ளன. ஒரு எடை மற்றதைபோல் 3 மடங்கு உள்ளது. ஓய்வி லிருந்து 2 விநாடிகளுக்கு நகர்ந்தபின் கீழே இறங்கிக் கொண்டி ருக்கும் எடை திடீரென நிறுத்தப்பட்டு உடனே கீழே விடப்படு கிறது. கயிறு எவ்வளவு நேரத்தில் மீண்டும் விறைப்பாகு மென்று காண்.

10. ஒரு வழவழப்பான கப்பியின் வழியே செல்லும் ஒரு இலேசான கயிற்றின்மூலம் ஒவ்வொன்றும் m பொருண்மையுள்ள இரு பொருட்கள் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. இத் தொகுதி 15 விநாடிகளில் 1090 செ.மீ. தூரம் செல்லவேண்டுமாயின் ஒரு பொருளிலிருந்து எவ்வளவு பொருண்மை எடுக்கப்பட்டு அடுத்த பொருளுடன் சேர்க்கப்பட வேண்டும்?

11. ஒரு கயிற்றின் ஒரு முனையில் 9 கிராம் பொருண்மை யும், அடுத்த முனையில் 7 கிராம், 4 கிராம் பொருண்மைகளும் இணைக்கப்பட்டு ஒரு வழவழப்பான கப்பியின்மேல் தொங்கவிடப் பட்டுள்ளன. இத்தொகுதி 15 விநாடிகட்கு நகரவிடப்பட்டுப் பின் 4 கிராம் பொருள் எடுக்கப்பட்டுவிடுகிறது. தொகுதி ஓய் விற்கு வருமுன் ஆகும் நேரத்தையும், செல்லும் தூரத்தையும் காண்க.

12. ஒரு வழவழப்பான கப்பியின் வழியே இரண்டு கயிறு கள் செல்கின்றன. ஒரு பக்கம் அவற்றின் முனைகள் 3 ராத்தல், 4 ராத்தல் பொருண்மைகளுடனும், மறுபக்கம் இரு முனைகளும் 5 ராத்தல் பொருண்மையுடனும் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. தொகுதியின் முடுக்கத்தையும், கயிறுகளின் இழுவிசைகளையும் காண்க.

13. ஒரு வழவழப்பான நிலையான கப்பியின் வழியே செல்லும் ஒரு இலேசான கயிற்றின் ஒரு முனையில் M பொருண்மையுள்ள ஒரு பொருளும், மறுமுனையில் ஒரு இலேசான கப்பியும் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. இந்த இலேசான கப்பியின் வழியே செல்லும் ஒரு இலேசான கயிற்றின் முனைகளில் m_1 m_2 ஆகிய பொருண்மைகளுள்ள பொருட்கள் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. பொருட்களின் முடுக்கங்களைக் காண்க. $M = \dfrac{4\, m_1\, m_2}{m_1 + m_2}$ எனில், M பொருண்மையுள்ள பொருள் ஓய்விலிருக்கும் அல்லது சீர் வேகத்துடன் நகருமென்று காட்டு.

14. ஒரு வழவழப்பான மேசையின்மேல் 9 கிராம் பொருண்மையுள்ள ஒரு பொருள் மேசையின் ஓரத்திலிருந்து 545 செ.மீ, தூரத்தில் வைக்கப்பட்டு, மேசையின் ஓரத்தின் வழியே செல்லும் ஒரு இலேசான கயிற்றின் ஒரு முனையில் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. கயிற்றின் மறுமுனையில் இணைக்கப்பட்டுள்ள 1 கிராம் பொருண்மையுள்ள பொருள் தொங்கிக் கொண்டிருக்கிறது.

(i) பொது முடுக்கத்தைக் காண்க.

(ii) கயிற்றின் இழுவிசையைக் காண்க.

(iii) மேசையின் மேலுள்ள பொருள் மேசையிலிருந்து கீழே விழும் தருணத்தில் அதன் திசைவேகத்தைக் காண்க.

15. ஒரு கயிற்றின் ஒரு முனையிலிருந்து தொங்கிக் கொண்டிருக்கும் m_1 என்னும் பொருண்மை கயிற்றின் மறுமுனையில் கட்டப்பட்டுள்ள m_2 என்னும் பொருண்மையை ஒரு வழவழப்பான மேசையின்மீது இழுக்கிறது. மேசையின் மேலுள்ள பொருண்மை இரட்டிக்கப்பட்டால், கயிற்றின் இழுவிசை அரை மடங்கு அதிகமாகிறது. $m_1 : m_2$ விகிதத்தைக் காண்க.

16. ஒரு வழவழப்பான மேசையின் குறுக்காக அதன் இரு எதிர் விளிம்புகளுக்குச் செங்குத்தாகச் செல்லும் ஒரு கயிற்றின் முனைகளில் P, Q என்னும் பொருண்மைகள் இணைக்கப்பட்டுத் தொங்கவிப்பட்டுள்ளன. மேசையின் மேலுள்ள கயிற்றுப் பகுதியுடன் M என்னும் பொருண்மை இணைக்கப்பட்டால், தொகுதியின் முடுக்கம் $\left(\dfrac{P - Q}{P + Q + M}\right) g$ என்று காட்டு.

17. 2 ராத்தல், 30 ராத்தல் பொருண்மைகளுள்ள இரு பொருட்கள் 27 அங்குல உயரமுள்ள ஒரு வழவழப்பான மேசையின்மேல் வைக்கப்பட்டுள்ளன. இவ்விரு பொருட்களும் 27 அங்குலத்திற்குக் குறையாத நீளமுடைய ஒரு கயிற்றினுல் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. கயிறு விறைப்பாக இருக்கும்போது, மேசையிலுள்ள ஒரு துவாரத்தின் வழியே சிறிய பொருள் கீழே தள்ளிவிடப்படுகிறது. அது தரையை அடைவதற்கு எடுத்துக் கொள்ளும் நேரத்தைக் கணக்கிடுக.

18. m_1, $2m$ பொருண்மைகளுள்ள இரு பொருட்கள் ஒரு கயிற்றின் இருமுனைகளில் இணைக்கப்பட்டு ஒரு வழவழப்பான மேசையின் மேல் வைக்கப்பட்டுள்ளன. கயிற்றின் நடுப்பகுதி மேசையின் ஒரு ஓரம் வழியே ஒரு வளையம்போல் கீழே தொங்கிக் கொண்டிருக்கிறது. இவ்வளையத்தில் ஒரு நகரும் கப்பி தொங்கிக் கொண்டிருக்கிறது. இக் கப்பியில் $3m$ பொருண்மையுள்ள ஒரு பொருள் தொங்கிக் கொண்டிருக்கிறது. இப்பொருளின் முடுக்கம் $\frac{9}{17}g$ என்று காட்டு.

19. ஒரு உராய்வுடைய மேசையின் ஓரத்திலிருந்து தொங்கிக் கொண்டிருக்கும் m ராத்தல் எடையுள்ள ஒரு பொருளை மேசையின் மேலுள்ள 15 ராத்தல் எடையுள்ள ஒரு பொருளை மேசையின் ஓரத்திலுள்ள ஒரு வழவழப்பான கப்பியின் வழியே செல்லும் ஓர் இலேசான கயிற்றின்மூலம் இழுக்கிறது. மேசையின் உராய்வுக் குணகம் $\frac{1}{3}$. இரு பொருட்களும் 12 அடி/(விஞடி)^2 முடுக்கத்துடன் நகர்ந்து கொண்டிருந்தால் mஇன் மதிப்பைக் காண்.

20. ஒரு உராய்வுடைய மேசையின் ஓரத்திலிருந்து தொங்கிக் கொண்டிருக்கும் $3Q$ ராத்தல் பொருண்மையுடைய ஒரு பொருள் மேசையின் மேலுள்ள Q ராத்தல் பொருண்மையுள்ள ஒரு பொருளை மேசையின் ஓரத்திலுள்ள ஒரு வழவழப்பான கப்பியின் வழியே செல்லும் ஒரு இலேசான கயிற்றின் மூலம் இழுக்கிறது. மேசையின் உராய்வுக் குணகம் $\sqrt{3}$. பொருட்கள் இயங்கத் தொடங்கி 3 விஞடிகளுக்குப்பின் கயிறு அறுந்து போனல், ஓய்வுக்கு வருமுன் பொருண்மை Q செல்லும் தூரத்தைக் கணக்கிடுக.

21. ஒரு உராய்வுடைய மேசையின் ஓரத்தின் வழியே செல்லும் ஒரு கயிற்றின் ஒரு முனையிலிருந்து 10 ராத்தல்

பொருண்மையுள்ள ஒரு பொருள் தொங்கிக் கொண்டிருக்கிறது. அதன் மறுமுனையிலிணைக்கப்பட்டுள்ள 6 ராத்தல் பொருண்மை யுள்ள ஒரு பொருள் மேசையின்மேல் வைக்கப்பட்டுள்ளது. இத் தொகுதி ஓய்விலிருந்து நகருமாறு விடப்பட்டுள்ளது. பெரிய பொருள் 2 வினாடிகளில் 24 அடி தூரம் இறங்கினால் மேசையின் உராய்வுக் குணகத்தைக் காண்க.

22. 10 ராத்தல், 5 ராத்தல் பொருண்மைகளுள்ள இரு பொருட்கள் ஒரு இலேசான நீளியல்பற்ற கயிற்றின் மூலம் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. முதல் பொருள் $\frac{8}{25}$ உராய்வுக் குணக முள்ள ஒரு மேசையின்மேல் வைக்கப்பட்டுள்ளது. கயிற்றின் மறுமுனையில் கட்டப்பட்டுள்ள இரண்டாவது பொருள் மேசை யின் விளிம்பில் பொருத்தப்பட்டுள்ள ஒரு வழவழப்பான கப்பியி லிருந்து தொங்கிக் கொண்டிருக்கிறது. பொருட்களின் முடுக்கத்தையும், கயிற்றின் இருவிசையையும் காண்க.

23. 1090 செ.மீ. நீளமும், 218 செ.மீ. உயரமுமுள்ள ஒரு வழவழப்பான சாய்தளத்தின்மேல் அடியில் 10 கிராம் பொருண் மையுள்ள பொருள் ஒன்று வைக்கப்பட்டுள்ளது. சாய்தளத்தின் ஓரத்திலுள்ள ஒரு வழவழப்பான கப்பியின் வழியே செல்லும் ஓர் இலேசான கயிற்றின்மூலம் இப்பொருள் கப்பியை ஒட்டித் தொங்கிக் கொண்டிருக்கும் 6 கிராம் பொருண்மையுள்ள மற்றொரு பொருளுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. தொங்கிக் கொண்டிருக் கும் பொருள் தரையை அடைய எவ்வளவு நேரம் பிடிக்கும் ?

24. ஒரு சாய்தளத்தின் உயரம் அதன் நீளத்தில் பாதி. அதன் உச்சியில் பொருத்தப்பட்டுள்ள ஒரு வழவழப்பான கப்பி யின் வழியே செல்லும் ஒரு கயிற்றின் ஒரு முனையில் 12கிராம் பொருண்மையுள்ள ஒரு பொருள் இணைக்கப்பட்டு சாய் தளத்தின்மேல் வைக்கப்பட்டுள்ளது. கயிற்றின் மறுமுனையில் 6 கிராம் பொருண்மையுள்ள ஒரு பொருள் இணைக்கப்பட்டுத் தொங்கிக் கொண்டிருக்கிறது. ஒவ்வொரு பொருளும் 5 வினாடி களில் செல்லும் தூரத்தைக் காண்க.

25 ஒரு சாய்தளத்தின் உயரம் அதன் நீளத்தில் பாதி. அதன் மேல் வைக்கப்பட்டுள்ள 22 ராத்தல் பொருண்மையுள்ள ஒரு பொருள் சாய்தளத்தின் உச்சியிலுள்ள ஒரு வழவழப்பான கப்பியின் வழியே செல்லும் ஒரு கயிற்றின் ஒரு முனையுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. கயிற்றின் மறுமுனையில் 14 ராத்தல் பொருண்மையுள்ள பொருளொன்று தொங்கிக் கொண்டிருக்

கிறது. பொருட்களின் முடுக்கத்தையும் 2 விநாடிகளில் ஒவ்வொரு பொருளும் செல்லும் தூரத்தையும் காண்க.

26. 30° சாய்விலுள்ள ஒரு வழவழப்பான சாய்தளத்தின் உச்சியிலுள்ள ஒரு வழவழப்பான கப்பியின் வழியே செல்லும் ஒரு இலேசான கயிற்றில் தொங்கிக் கொண்டிருக்கும் 20 ராத்தல் பொருண்மையுள்ள ஒரு பொருள் கயிற்றின் மறுமுனையில் கட்டப் பட்டுத் தளத்தின் மேல் வைக்கப்பட்டுள்ள 30 ராத்தல் பொருண்மையுள்ள ஒரு பொருளை இழுக்கிறது. 5 விநாடிகளில் சிறிய பொருள் செல்லும் தூரத்தையும், கயிற்றின் இழுவிசையை காண்க.

27. 30° சாய்விலுள்ள ஒரு வழவழப்பான சாய்தளத்தின் உச்சி வழியே செல்லும் ஓர் இலேசான கயிற்றின்மூலம் முறையே 9 ராத்தல், 6 ராத்தல் பொருண்மைகளுள்ள P, Q என்னும் இரு பொருட்கள் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. ஒரு பொருள் சாய்தளத்தின் மேல் வைக்கப்பட்டும் மற்றது தொங்கிக் கொண்டுமுள்ளன. P தொங்கவிடப்பட்டு Q-வைச் சாய்தளத்தின் மேல் இழுப்பதற்கு எடுத்துக் கொள்ளும் நேரம், Q தொங்கவிடப்பட்டு P-யைச் சாய்தளத்தின்மேல் இழுப்பதற்கு ஆகும் நேரத்தில் பாதியாகு மென்று நிறுவுக.

28. முறையே $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$ உராய்வுக் குணங்களுடைய இரு சம உயரச் சாய்தளங்கள் 45°, 60° சாய்வுகளில் அவற்றின் உச்சிகள் பின்முகமாகப் பொருந்துமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளன. 36 ராத்தல், 9 ராத்தல் பொருண்மைகள் அவற்றின்மேல் வைக்கப்பட்டு அவற்றின் உச்சி வழியே செல்லும் ஒரு கயிற்றின் மூலம் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. விளைவு இயக்கத்தை நிர்ணயிக்கவும்.

29. இரு உராய்வுடைய சம உயரச் சாய்தளங்கள் 30°, 60° சாய்வுகளில் அவற்றின் உச்சிகள் பின்முகமாகப் பொருந்து மாறு வைக்கப்பட்டுள்ளன. முதல் தளத்தில் 8 ராத்தல் பொருண்மையும், இரண்டாவது தளத்தில் 24 ராத்தல் பொருண் மையும் வைக்கப்பட்டு, தளங்களின் பொது உச்சியில் பொருத்தப் பட்டுள்ள ஒரு சிறிய வழவழப்பான கப்பியின் வழியே செல்லும் ஓர் இலேசான கயிற்றின் மூலம் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. இரு தளங்களுக்கும் உராய்வுக் குணகம் $\frac{1}{\sqrt{3}}$ எனில், பொருட் களின் முடுக்கத்தைக் காண்க.

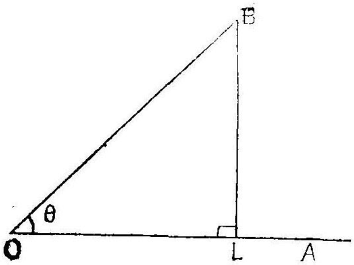
30. இரு வழவழப்பான சம உயரச் சாய்தளங்கள் α_1, α_2 சாய்வுகளில் அவற்றின் உச்சிகள் பின்முகமாகப் பொருந்துமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளன. இத் தளங்களின்மேல் முறையே m_1, m_2 என்ற பொருண்மைகள் வைக்கப்பட்டு, தளங்களின் பொது உச்சியுல் பொருத்தப்பட்டுள்ள ஒரு சிறிய வழவழப்பான கப்பி யின் வழியே செல்லும் ஒரு இலேசான கயிற்றின்மூலம் இணைக்கப் பட்டுள்ளன. பொருண்மை m_1 இறங்கிக் கொண்டிருந்தால், முடுக்கத்தையும், கயிற்றின் இழுவிசை, கப்பியின் மேலுள்ள அழுத்தம் ஆகியவற்வையும் காண்க.

வேலை, திறன், ஆற்றல்
(Work, Power, Energy)

1. வேலை (Work)

ஒருவன் ஒரு சீரான உராய்வுடைய ஒரு தளத்தின் மீது ஒரு கனமான பொருளை இழுக்கும் போது அல்லது ஒரு கனமான பொருளை மேல்நோக்கித் தூக்கும் போது தான் ஏதோ ஒரு வேலையைச் செய்வதாக உணர்கிறன். முதல் வகையில், அவ ஞல் செய்யப்பட்ட வேலையின் அளவு அத்தளத்தின் உராய்வுத் தடைக்கும், அப்பொருள் இழுக்கப்பட்ட தூரத்திற்கும் விகித சமத்திலிருக்கும். இரண்டாவது வகையில், அவனுல் செய்யப் பட்ட வேலையின் அளவு அப்பொருளின் எடைக்கும், அப் பொருள் தூக்கப்பட்ட உயரத்திற்கும் விகித சமத்திலிருக்கும். இவ்விரு வகைகளிலுமே, பொருளின் இயக்கத்திற்கெதிரான தடை மாறிலியாகவுள்ளது. தவிர, பொருளின் மீது செயல் படுத்தப்பட்ட விசையின் செயல்படுபுள்ளி (Point of application) விசை செயல்படும் திசையில் நகருவதைக் காணலாம். எனவே, ஒரு பொருளின் மீது செயல்படும் விசை யின் செயல்படுபுள்ளி நகரும் போது அவ்விசை வேலை செய்வ தாகக் கூறப்படுகிறது. அவ்விசையினுல் செய்யப்பட்ட வேலை யின் அளவு என்பது அவ்விசையின் அளவு, விசையின் திசை யில் அதன் செயல்படு புள்ளி நகர்ந்த தூரம் ஆகியவற்றின் பெருக்கம் என்று வரையறுக்கப்படுகிறது.

அதாவது, வேலை = விசை × செயல்படு புள்ளியின் இடப் பெயர்ச்சி. இங்கு செயல்படு புள்ளி நகர்ந்த தூரம் அல்லது செயல்படு புள்ளியின் இடப்பெயர்ச்சி என்பது, அவ்விசையின் திசையிலேயே அளவிடப்படல் வேண்டுமென்பதைக் கவனத் திற் கொள்ளவும்.



படம் 43

F என்னும் விசை O என்னும் புள்ளியில் OA என்னும் திசையில் செயல்படுவதாகக் கொள்க. அவ்விசையின் அழுத்தம் காரணமாக, செயல்படு புள்ளி O ஆனது B க்கு இயம் பெயருகிறதென்று கொள்க. விசையின் திசை OA-யுடன் OB யின் சாய்வு θ என்று கொள்க.

B யிலிருந்து $BL \perp OA$ வரைக. எனவே, OL என்பது விசையின் திசையில் செயல்படுபுள்ளி O-வின் இடப்பெயர்ச்சியாகும்.

$$\therefore \text{செய்யப்பட்ட வேலை} = F \cdot OL \text{ ஆகும்.}$$

$$= F \cdot OB \cos \theta$$

$$= \vec{F} \cdot \vec{OB}.$$

$\vec{F_1}$ $\vec{F_2}$ ஆகிய இரு விசைகள் O என்னும் ஒரே புள்ளியில் செயல்பட்டு, செயல்படுபுள்ளி O வை B க்கு இடம் பெயரச் செய்தால் இவ்விரு விசைகளினுல் செய்யப்பட்ட வேலைகள் முறையே

$$\vec{F_1} \cdot \vec{OB}\ ,\ \vec{F_2} \cdot \vec{OB}$$

ஆகும். $\vec{F}$ என்பது இவ்விரு விசைகளின் விளைவு எனில்,

$$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$$

ஆகும். இவ்விளைவு விசை $\vec{F}$-ம் O-விலேயே செயல்படுமாகையால், விளைவு விசையினுல் செய்யப்பட்ட வேலை

$$= \vec{F} \cdot \vec{OB}$$

$$= (\vec{F_1} + \vec{F_2}) \cdot \vec{OB}$$

$$= \vec{F_1} \cdot \vec{OB} + \vec{F_2} \cdot \vec{OB}$$

= இருவிசைகளினுல் செய்யப்பட்ட வேலை களின் மொத்தம்.

மேலும், $\vec{F}$ என்றும் விசையின் செயல்படுபுள்ளி O முதலில் B எனும் புள்ளிக்கு இடம் பெயர்ந்து, அதன் பின்னர் B யிலிருந்து C எனும் புள்ளிக்கு இடம் பெயர்ந்தால், இவ்விரு இடப்பெயர்ச்சி களின் போதும் விசை $\vec{F}$-ஆல் செய்யப்பட்ட வேலைகளின் மொத்தமானது செயல்படு புள்ளியை O-விலிருந்து நேரடியாக C-க்கு இடம் பெயரச் செய்யும்போது செய்யப்படும் வேலைக்குச் சமமாகும்.

எவ்வாறெனில், $\vec{OB} + \vec{BC} = \vec{OC}$

$$\therefore \vec{F} \cdot \vec{OB} + \vec{F} \cdot \vec{BC} = \vec{F} \cdot (\vec{OB} + \vec{BC})$$

$$= \vec{F} \cdot \vec{OC}$$

மாதிரி **44.** $\vec{F} = 4i - 3j + 2k$ என்னும் விசை ஒரு துகளின் மீது செயல்பட்டு, செயல்படுபுள்ளியை $3i + 2j - k$ யிலிருந்து $2i - j + 4k$-க்கு இடம் பெயரச் செய்கிறது. அவ் விசையினுல் செய்யப்பட்ட வேலையின் அளவைக் காண்க.

தீர்வு:

$$O = 3i + 2j - k\ ,\ B = 2i - j + 4k\ ,$$

$$\therefore \vec{OB} = (2i - j + 4k) - (3i + 2j - k)$$

$$= -i - 3j + 5k$$

செய்யப்பட்ட வேலை $= \vec{F} \cdot \vec{OB}$

$$= (4i - 3j + 2k) \cdot (-i - 3j + 5k)$$

$$= -4 + 9 + 10$$

$= 15$ அலகு வேலை.

மாதிரி **45.** $4i + j - 3k$ என்ற விசையினுல் செயல் படுத்தப்பட்ட ஒரு துகள் $2i - j - 5k$ என்ற புள்ளியிலிருந்து

$5i + 3j - 7k$ என்ற புள்ளிக்கு இடம் பெயருகிறது. விசையினால் செய்யப்பட்ட வேலையினைக் காண்க.

தீர்வு:

$$\vec{F} = 4i + j - 3k$$

$$O = 2i - j - 5k, \quad B = 5i + 3j - 7k$$

$$\therefore \quad \vec{OB} = (5i + 3j - 7k) - (2i - j - 5k)$$

$$= 3i + 4j - 2k$$

$\therefore$ செய்யப்பட்ட வேலை $= \vec{F} \cdot \vec{OB}$

$$= (4i + j - 3k) \cdot (3i + 4j - 2k)$$

$$= 12 + 4 + 6.$$

$= 22$ அலகுகள்.

மாதிரி 46. $10i - j + 11k$, $4i + 5j + 6k$, $-2i + j - 9k$ ஆகிய விசைகளினால் செயல்படுத்தப்பட்ட ஒரு துகள் $5i - 5j - 7k$ என்னும் புள்ளியிலிருந்து $6i + 2j - 2k$ என்னும் புள்ளிக்குக் கொண்டு செல்லப்படுகிறது. அவ் விசைகளினால் செய்யப்பட்ட மொத்த வேலையை அளவிடுக.

தீர்வு:

$$\vec{F_1} = 10i - j + 11k, \quad \vec{F_2} = 4i + 5j + 6k,$$

$$\vec{F_3} = -2i + j - 9k$$

$\therefore$ விளைவு விசை $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3}$

$$= 12i + 5j + 8k$$

$$O = 5i - 5j - 7k, \; B = 6i + 2j - 2k$$

$$\therefore \vec{OB} = (6i + 2j - 2k) - (5i - 5j - 7k)$$

$$= i + 7j + 5k$$

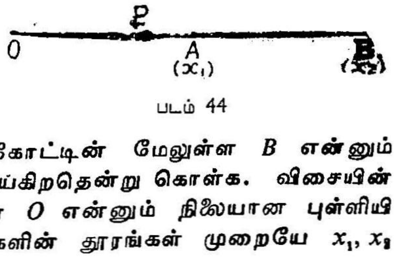
விசைகளினால் செய்யப்பட்ட மொத்த வேலை

= விளைவு விசையினால் செய்யப்பட்ட வேலை

$$= \vec{F} \cdot \vec{OB}$$
$$= (12i + 5j + 8k) \cdot (i + 7j + 5k)$$
$$= 12 + 35 + 40$$
$$= 87 \text{ அலகுகள்.}$$

குறிப்பு 1. ஒரு விசையின் தாக்குதலுக்குள்ளான ஒரு துகள் அவ் விசையின் திசைக்குச் செங்குத்துத் திசையில் நகர்த்தப்பட்டால், அவ் விசையின் திசையில் துகளின் இடப் பெயர்ச்சி பூச்சியமாகையால், அவ் விசையினுல் செய்யப்பட்ட வேலையும் பூச்சியமாகும். அதாவது, அவ் விசையினுல் வேலை யேதும் செய்யப்படவில்லை யென்றறிக.

குறிப்பு 2. P என்னும் மாருவிசை ஒரு துகளின் மீது செயல்பட்டு, அத் துகளை அவ் விசையின் திசையில் x தூரத் திற்கு இடம் பெயரச் செய்தால், அவ் விசையினுல் செய்யப்பட்ட வேலை Px ஆகும்.



படம் 44

OA என்னும் திசையில் செயல்படும் P என்னும் மாரு விசை A என்னும் புள்ளியிலுள்ள ஒரு துகளின்மீது செயல்பட்டு, அத் துகளை அதே நேர் கோட்டின் மேலுள்ள B என்னும் புள்ளிக்கு இடம் பெயரச் செய்கிறதென்று கொள்க. விசையின் செயற்கோட்டின் மேலுள்ள O என்னும் நிலையான புள்ளியி லிருந்து A, B ஆகிய புள்ளிகளின் தூரங்கள் முறையே x_1, x_2 என்க.

எனவே, P யினுல் செய்யப்பட்ட வேலை

$$= P \cdot AB$$
$$= P(x_2 - x_1)$$
$$= \int_{x_1}^{x_2} P\,dx.$$

இங்கு x என்பது விசையின் செயற்கோட்டின் மேலுள்ள ஒரு நிலையான புள்ளி O-விலிருந்து அக் கோட்டின் மேலுள்ள ஏதேனுமொரு புள்ளியின் தூரமாகும்.

வேலையின் அலகுகள் (Units of Work)

ஓர் அலகு விசை ஒரு துகளின் மீது செயல்பட்டு, செயல்படு புள்ளியை அவ் விசையின் செயற்கோட்டில் ஓர் அலகு தூரத்திற்கு இடம் பெயரச் செய்தால் அவ் விசையினுல் செய்யப்பட்ட வேலே ஓர் அலகு வேலே யென்று வரையறுக்கப் படுகிறது.

அ.ரா.வி.-முறையில் ஓர் அலகு வேலே யென்பது ஓர் அடி-ராத்தலி (Foot-Poundal) ஆகும். அதாவது, 'ஒரு ராத்தலி விசை ஒரு துகளின் மீது செயல்பட்டு, அத் துகளே அவ் விசையின் செயற்கோட்டின் மீது ஓர் அடி தூரத்திற்கு இடம் பெயரச் செய்யும்போது செய்யப்படும் வேலேயே ஓர் அடி-ராத்தலி' யாகும். இது ஓர் ஈர்ப்பலகு ஆகும். தனியலகு முறையில் இதற்கு ஒத்த அலகு அடி-ராத்தல் (Foot-Pound) ஆகும். அதாவது, ஒரு ராத்தல் எடையுள்ள ஒரு விசை ஒரு துகளின் மீது செயல்பட்டு, அத் துகளே அவ் விசையின் செயற்கோட்டின் மீது ஓர் அடி தூரத்திற்கு இடம் பெயரச் செய்யும்போது செய்யப்படும் வேலேயே ஓர் அடி-ராத்தல் ஆகும்.

எனவே, 1 அடி ராத்தல் $= g$ அடி-ராத்தலிகள்

$= 32$ அடி-ராத்தலிகள் (தோராயமாக)

செ.கி.வி.-முறையில் ஓர் அலகு வேலே யென்பது ஓர் எர்க் (Erg) ஆகும். அதாவது, ஒரு டைன் (dyne) விசை ஒரு துகளின் மீது செயல்பட்டு, அத் துகளே அவ் விசையின் செயற் கோட்டின்மீது ஒரு சென்டிமீட்டர் தூரத்திற்கு இடம் பெயரச் செய்யும்போது செய்யப்படும் வேலேயே ஓர் எர்க் ஆகும். எர்க் என்பது டைன் சென்டிமீட்டர் (dyne cm) என்றும் வழங்கப் படுகிறது.

ஆனுல், ஓர் எர்க் என்பது மிகமிகச் சிறிய அளவாகையால் நடைமுறையில் பயன்படுத்தற்கேற்றவாறு ஜௌல் (Joule) என்னும் அலகு வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது. ஒரு ஜௌல் என்பது 10^7 எர்க் அலகுகள் கொண்ட வேலேயாகும்.

1 ஜௌல் $=$ 10^7 எர்க்குகள்.

ஜௌல் என்பது நியூட்டன் மீட்டர் ((Newton metre) என் றும் அழைக்கப்படுகிறது. ஏனெனில், ஒரு நியூட்டன் விசை ஒரு துகளின்மீது செயல்பட்டு, அத் துகளே அதன் செயற்கோட் டின் மீது ஒரு மீட்டர் தூரத்திற்கு இடம் பெயரச் செய்யும்போது

செய்யப்படும் வேலை ஒரு நியூட்டன் மீட்டர் என்று வரையறுக்கப்படுகிறது. இந்த வேலையின் அளவு ஒரு ஜௌல் வேலையின் அளவுக்குச் சமமென்று காணப்படுவதால் ஜௌல் என்பது நியூட்டன் மீட்டர் என்றும் அழைக்கப்படுகிறது.

ஆகவே, 1 நியூட்டன் மீட்டர் = 1 ஜௌல்

= 10^7 எர்க்குகள்.

ஈர்ப்பலகு முறையில் கிராம் சென்டிமீட்டர் (gramme centimetre) என்பது ஓர் அலகு வேலையாகக் கொள்ளப்படுகிறது. ஒரு கிராம் எடையுள்ள ஒரு பொருளை நிலைக்குத்தாக மேலே ஒரு சென்டிமீட்டர் உயரத்திற்குத் தூக்கும்போது செய்யப்படும் வேலையே ஒரு கிராம் சென்டிமீட்டர் ஆகும். ஆனால், ஒரு கிராம் எடையென்பது g டைன்களுக்குச் சமமாகையால், ஒரு கிராம் சென்டிமீட்டர் = g எர்க்குகள்.

மாதிரி 47. 5 ராத்தல் எடையுள்ள ஒரு பொருளை 10 அடி உயரத்திற்கு நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கித் தூக்கும்போது செய்யப்படும் வேலையைக் காண்க.

தீர்வு : செய்யப்படும் வேலை W = 5 ராத். எடை × 10 அடி

= 50 அடி-ராத்தல்கள்

மாதிரி 48. 8 கிலோகிராம் பொருண்மையுள்ள ஒரு பொருளை 2.5 மீட்டர் உயரத்திற்கு நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கித் தூக்கும் போது செய்யப்படும் வேலையைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு : செய்யப்படும் வேலை W = பொருளின் எடை × உயர்த்தப்பட்ட தூரம்.

பொருளின் பொருண்மை = 8 கிலோகிராம்.

∴ பொருளின் எடை = 8 கிலோகிராம் × g

ஆனால் g 981 செ.மீ./வி².

= 9.8 மீ./வி². (தோராயமாக)

∴ பொருளின் எடை = 8 கி.கி. × 9.8 மீ./வி².

∴ செய்யப்படும் வேலை = 8 கி.கி. × 9.8 மீ./வி². × 2 5 மீ.

= 196 கி.கி.-மீ./வி². மீ.

ஆனல் 1 கி.கி.-மீ./வி². = 1 நியூட்டன்

∴ செய்யப்படும் வேலை = 196 நியூட்டன் மீட்டர் (நி.மீ.)

= 196 ஜௌல்கள்.

மீளியல்புடைய இழையினல் செய்யப்படும் வேலை (Work done by an elastic string)

ஒரு மீளியல்புடைய இழையின் இயல்பான நீளம் a, நீட்டப் பட்ட நீளம் x, மீளியல்புக் குணகம் λ என்று கொள்க. இழை யின் இழுவிசை T எனில், ஹூக்கின் விதிப்படி,

$$T = \lambda \left(\frac{x-a}{a}\right)$$

இப்பொழுது, இழையானது மேலும் dx எனும் மிகச் சிறிய நீளத்திற்கு நீட்டப்பட்டால், இச் சிறு நீட்சியின்போது இழு விசைக்கு எதிராகச் செய்யப்பட்ட வேலை $T\,dx$ ஆகும். எனவே, இழையை b நீளத்திலிருந்து c நீளத்திற்கு நீட்டும்போது, இழு விசைக்கு எதிராகச் செய்யப்படும் வேலை

$$W = \int_b^c T\,dx$$

$$= \int_b^c \lambda\ \frac{(x-a)}{a}.\ dx$$

$$= \frac{\lambda}{a}.\ \left[\frac{(x-a)^2}{2}\right]_b^c$$

$$= \frac{\lambda}{2a}\left[(c-a)^2 - (b-a)^2\right]$$

$$= \frac{\lambda}{2a}(b+c-2a)(c-b)$$

ஆனல், b நீட்சியின்போது இழுவிசை $= \lambda\left(\frac{b-a}{a}\right)$

c நீட்சியின்போது இழுவிசை $= \lambda\left(\frac{c-a}{a}\right)$

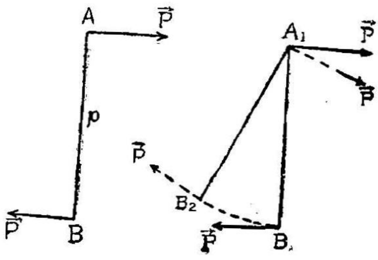
$$\text{இவ்விரு இழுவிசைகளின் சராசரி} = \frac{\lambda}{a}\left[\frac{(b-a)+(c-a)}{2}\right]$$

$$= \frac{\lambda}{2a}(b+c-2a).$$

∴ செய்யப்படும் வேலை W = தொடக்க, இறுதி இழுவிசைகளின் சராசரி × நீட்சி.

சுழலிணையினுல் செய்யப்படும் வேலை (Work done by a Couple)

(P, AB) என்பது ஒரு சுழலிணை. இச் சுழலிணை ஒரு பொருளின்மீது செயல்பட்டு (P, A_1B_2) என்று இடம் பெயருகிறதென்று கொள்க. இவ்விடப் பெயர்ச்சியை இரு நிலைகளிலேற்பட்டதாகக் கொள்ளலாம். முதலில் $(P, A_1 B_1)$ என்ற நிலையை அடைந்து, அதன் பின்



படம் 45

னர் $(P, A_1 B_2)$ என்ற நிலையை அடைந்ததாகக் கூறலாம். அதாவது, AB-ஆனது அதற்கு இணையாக நகர்ந்து $A_1 B_1$ என்ற நிலையை அடைந்து, பின் A_1ஐச் சுற்றித் திரும்பி $A_1 B_2$ என்ற நிலையை அடைகிறது. முதல் நிலை இணையிடப் பெயர்ச்சியின் போது சுழலிணையின் சம, எதிர் விசைகளால் செய்யப்பட்ட மொத்த வேலை பூச்சியமாகுமாகையால் இவ் விணைவிடப் பெயர்ச்சியின்போது சுழலிணையினுல் ஒரு வேலையும் செய்யப்படவில்லை.

சுழற்சியின்போது, A_1-ல் செயல்படும் விசை P எந்த வேலையும் செய்யவில்லை. B_1 என்னும் புள்ளி A_1ஐ மையமாகவும் $A_1 B_1 = AB = p$-ஐ ஆரமாகவும் கொண்ட வட்ட வில்லில் நகருவதால், திருப்பியுள்ள கோணம் θ ஆரையன் (Radian) எனில், இடப் பெயர்ச்சி = $p\theta$ ஆகும்.

∴ B_1-ல் செயல்படும் விசை P செய்யும் வேலை $= P \times p\theta = Pp\,\theta$ ஆகும்.

ஆகவே, சுழலிணையால் செய்யப்பட்ட வேலை $= Pp\,\theta$
$= Pp \times \theta$
= சுழலிணையின் திருப்புத்திறன் × θ.

குறிப்பு: $d\theta$ என்பது ஒரு சிறு சுழற்சியைக் குறிப்பிடின்,

$$\int_0^\theta Pp\,d\theta = Pp\theta$$

ஆகையால், $\left.\begin{array}{r}\text{சுழலிணையினுல்}\\ \text{செய்யப்பட்ட வேலை}\end{array}\right\} = \int_0^\theta Pp\,d\theta$ ஆகும்.

திறன்
(Power)

வேலை செய்யப்படும் வீதம் திறன் எனப்படும்.

அதாவது, திறன் $= \dfrac{\text{வேலை}}{\text{காலம்}}$

ஒரு விஞடிக்கு ஓர் அலகு வேலை வீதம் செய்யப்பட்டால் வேலைத் திறன் ஓர் அலகு என்று சொல்லப்படுகிறது. அ.ரா.வி. முறையில் விஞடிக்கு ஓர் அடி-ராத்தல் வேலை வீதம் செய்யப் படுவது ஓர் அலகுத் திறஞகக் கொள்ளப்படுகிறது. இவ் வலகு சிறிய அளவாகயிருப்பதால் இதுபோல் 550 அலகுகள் கொண்டது நடைமுறையில் ஓர் அலகாகக் கொள்ளப்படுகிறது. இந்த நடைமுறை அலகுக்குப் 'பரித்திறன்' (Horse Power —H.P.) என்று பெயர். அதாவது, ஒரு பரித்திறன் என்பது விஞடிக்கு 550 அடி-ராத்தல்கள் வேலைவீதத்தில் செய்யப்படும் திறஞகும். இப் 'பரித்திறன்' என்னும் அலகு பெரும்பாலும் பொறியியற் துறையில் பொறியாளர்களால் நடைமுறையில் பயன்படுத்தப்பட்டு வருகிறது.

∴ 1 பரித்திறன் (ப.தி.) = 550 அ.ரா./வி.

செ.கி.வி. முறையில் வேலையென்பது ஜெளல் என்னும் அலகினுல் அளவிடப்படுவதால் வேலைத்திறன் விஞடிக்கு ஒரு ஜெளல் என்னும் அலகினுல் அளவிடப்படுகிறது. விஞடிக்கு ஒரு ஜெளல் வேலைவீதம் என்பது வாட் (Watt) என்னும் ஒரு திறன் அலகு என்று வரையறுக்கப்படுகிறது.

அதாவது, 1 வாட் திறன் = 1 ஜெளல்/விஞடி.

நடைமுறையில் கிலோவாட் (Kilowatt) என்பது ஓர் அலகுத் திறஞகப் பயன்பட்டு வருகிறது. ஒரு கிலோவாட் என்பது 1000 வாட் திறஞகும்.

$\therefore$ 1 கி.வாட் = 1000 வாட்.

குறிப்பு: 1 பரித்திறன் = 746 வாட் திறன் என்று கணக்கிடப்பட்டுள்ளது.

மாதிரி 49. 200 ராத்தல் பொருண்மையை 10 விநாடிகளில் 55 அடி உயரத்திற்குத் தூக்கும் சக்திவாய்ந்த ஒரு பொறியின் பரித்திறனைக் காண்க.

தீர்வு: 10 விநாடிகளில் செய்யப்பட்ட வேலை

= 200 ரா. $\times$ 55 அடி = 200 $\times$ 55 அடி-ராத்.

$\therefore$ 1 விநாடியில் செய்யப்பட்ட வேலை

$$= \frac{200 \times 55}{10} = 20 \times 55 \text{ அடி-ராத்.}$$

$\therefore$ திறன் = 20 $\times$ 55 அ. ரா./வி.

$$= \frac{20 \times 55}{550} \text{ ப தி.}$$

= **2 ப.தி.**

விசையின் திறன் (Power of a force)

ஒரு விசையின் திறன் என்பது அவ் விசையின் அளவு, அது செயல்படும் திசையில் செயல்படு புள்ளியின் திசைவேகம் ஆகியவற்றின் பெருக்கமாகும்.

F என்னும் விசையின் செயற்பாட்டின் காரணமாக அதன் செயல்படு புள்ளி அவ் விசையின் திசையில் x தூரத்திற்கு இடம் பெயர்ந்தால் அவ் விசையினால் செய்யப்பட்ட வேலை W என்பது

$$W = Fx$$

என்னும் தொடர்பின் மூலம் கணக்கிடப்படுகிறதென்று கண்டோம். எனவே, செயல்படு புள்ளியின் மிகச் சிறிய δx என்னும் இடப்பெயர்ச்சியின்போது செய்யப்படும் வேலை δW என்பது $F.\delta x$ ஆகும்.

அதாவது, $\delta W = F.\,\delta x$

இவ்விடப் பெயர்ச்சி நடைபெற்ற நேரம் δt எனில்,

$$\text{வேலை வீதம் } \frac{\delta W}{\delta t} = F.\frac{\delta x}{\delta t} \text{ ஆகும்.}$$

எனவே, குறிப்பிட்ட நேரம் t-ல் வேலை வீதம் என்பது

$$\underset{\delta t \to O}{\text{எல்லை}} \left(\frac{\delta W}{\delta t}\right)$$ ஆகையால்,

$$\frac{dW}{dt} = F. \frac{dx}{dt}$$

ஆனால் $\frac{dx}{dt}$ என்பது திசைவேகம் v-யைக் குறிக்குமாகையால்,

விசையின் திறன் = வேலை வீதம்

$$= \frac{dW}{dt}$$

$$= F. v.$$

= விசை × செயல்படு புள்ளியின் திசைவேகம்.

ஆற்றல்
(Energy)

வேலை செய்யும் சக்தியின் கொள்ளளவே ஆற்றலாகும். எனவே, வேலையின் அலகுகளே ஆற்றலை அளவிடப் பயன்படுகின்றன. பொறிமுறை ஆற்றலானது (Mechanical Energy) இயக்க ஆற்றல் (Kinetic Energy) என்றும், நிலை ஆற்றல் (Potential Energy) என்றும் இருவகையாகப் பிரிக்கப்படுகிறது

இயக்க ஆற்றல் (Kinetic Energy)

ஒரு நகரும் பொருளின் இயக்க ஆற்றல் என்பது அதன் இயக்கத்தின் காரணமாக அது பெற்றிருக்கும் வேலை செய்யும் ஆற்றலேயாகும். ஒரு குறிப்பிட்ட கணத்தில் இயக்கத்திலிருக்கும் ஒரு பொருளின் இயக்க ஆற்றல் என்பது அப் பொருள் ஓய்விற்குக் கொண்டுவரப்படுமுன் தடையை எதிர்த்து அப் பொருளினால் செய்யப்படும் வேலையின் அளவினால் அளவிடப்படுகிறது. சாலையில் சென்றுகொண்டிருக்கும் ஓர் உந்து வண்டி அதன் இடப்பெயர்ச்சியின் காரணமாக இடப்பெயர்ச்சி இயக்க ஆற்றலைப் பெற்றிருப்பதாகவும், ஒரு பொறியில் சுழன்று கொண்டிருக்கும் ஒரு சக்கரம் அதன் சுழற்சியின் காரணமாகச் சுழற்சி இயக்க ஆற்றலைப் பெற்றிருப்பதாகவும் கூறப்படுகின்றன.

தேற்றம் : v என்னும் திசைவேகத்துடன் சென்று கொண்டிருக்கும் m பொருண்மையுள்ள ஒரு பொருளின் இயக்க ஆற்றல் $\frac{1}{2} mv^2$ ஆகும்.

நிறுவல் : m பொருண்மையுள்ள ஒரு துகள் t நேரத்தில் v திசைவேகத்துடன் ஒரு பாதையில் (நேர்கோட்டுப் பாதை அல்லது வளைவரைபாதை) சென்று கொண்டிருப்பதாகக் கொள்க. இயக்கத் திசையின் வழியே செயல்படுத்தப்பட்டுள்ள விசை F என்றும், t நேரத்தில் துகளின் பாதையிலுள்ள ஒரு நிலையான புள்ளியிலிருந்து துகளின் தூரம் S என்றும் கொள்க.

எனவே, பொருளின் முடுக்கம் $\frac{dv}{dt}$ ஆகும்.

$\therefore$ பொருளின் முடுக்கம் $= \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot v.$

$\therefore$ $F =$ பொருண்மை $\times$ முடுக்கம்

$$= mv \frac{dv}{ds}$$

துகளானது மேற்கொண்டு ds எனும் மிகச் சிறிய தூரத்திற்கு நகர்ந்தால், செயல்படுத்தப்பட்டுள்ள விசைக்கு எதிராகச் செய்யப்படும் வேலை $= -F.ds$ ஆகும்.

அதாவது, $-mv \frac{dv}{ds} . ds = -mv\, dv$ ஆகும்.

எனவே, துகள் ஓய்விற்குக் கொண்டு வருமுன் விசைக்கு எதிராகச் செய்யப்படும் மொத்த வேலை =

$$-\int_{v}^{0} mv\, dv = \tfrac{1}{2} mv^2$$

அதாவது, v திசைவேகத்துடன் சென்றுகொண்டிருக்கும் m பொருண்மையுள்ள ஒரு பொருளின் இயக்க ஆற்றல் $\frac{1}{2} mv^2$ ஆகும்.

ஆற்றல் தத்துவம் (Principle of Energy)

இயக்கத்திலிருக்கும் ஒரு பொருளின் திசைவேகம் u-விலிருந்து v-க்கு மாறினால்,

இறுதி இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2} mv^2$

தொடக்க இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2} mu^2$

$\therefore$ இயக்க ஆற்றல் மாறுபாடு $= \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mu^2.$

இப்பொழுது, திசைவேகம் u-விலிருந்து v-க்கு மாறும்போது பொருத்தப்பட்டுள்ள விசைகளினால் செய்யப்பட்ட மொத்தவேலை

$$= \int_{u}^{v} F \cdot ds$$

$$= \int_{u}^{v} mv\, dv$$

$$= \left[\tfrac{1}{2} mv^2\right]_u^v$$

$$= \tfrac{1}{2} mv^2 - \tfrac{1}{2} mu^2.$$

= இயக்க ஆற்றல் மாறுபாடு.

அதாவது, இயக்கத்திலிருக்கும் ஒரு பொருளின் இயக்க ஆற்றல் மாறுபாடு அப் பொருளின்மேல் செயல்பட்டுள்ள விசையினால் செய்யப்படும் வேலைக்குச் சமமாகும். இதுவே ஆற்றல் விதியாகும்.

குறிப்பு : இயக்க ஆற்றல் என்பது ஒரு திசையிலிக் கணியமாகும்.

நிலை ஆற்றல் (Potential Energy)

ஒரு பொருளின் நிலை ஆற்றல் என்பது அது இருக்கும் நிலையின் காரணமாகப் பெற்றிருக்கும் வேலை செய்யும் ஆற்றலே யாகும். ஒரு குன்றின் உச்சியில் நிறுத்தப்பட்டுள்ள ஓர் உந்து வண்டி நிலை ஆற்றல் பெற்றிருப்பதாகக் கூறலாம்; எவ்வாறெனில், அவ் வண்டி குன்றிலிருந்து கீழிறங்கும் பாதையில் விடப்பட்டால், வெகுதூரம் செல்லக்கூடிய ஆற்றலைப் பெற்றுள்ளதாகயிருக்கும். சாவி கொடுக்கப்பட்ட கடிகாரத்தின் சுருள்வில் (Spring) நிலை ஆற்றல் பெற்றுள்ளதாகக் கூறலாம்; ஏனெனில், சாவி கொடுக்கப்பட்ட கடிகாரத்தின் சுருள் வில்லானது தனது முறுக்கேற்றப்பட்ட தன்மையின் காரணமாக அக் கடிகாரத்தை நீண்டநேரம் ஓடச் செய்யும் ஆற்றலைப் பெற்றிருக்கிறது. நிலை ஆற்றல் பெற்றிருக்கும் ஒரு பொருள் அதன் நியமமான நிலை (Standard position)யிலிருந்து இப்போதைய நிலைக்கு எந்த விசையை எதிர்த்துக் கொண்டுவரப்பட்டதோ அதே விசையினால் அப்பொருளை அதன் இப்போதைய நிலையிலிருந்து அதன் நியமமான நிலைக்குக் கொண்டு செல்லும்போது செய்யப்படும் வேலையின்மூலம் அப் பொருளின் நிலை ஆற்றல் அளவிடப்படு

கின்றது. எனவே, நிலை ஆற்றல் என்பது வேலையின் அலகுகளாகிய ஜெளல், எர்க், அடி-ராத்தல், பரித்திறன் மூலமாக அளவிடப்படுகின்றது.

m எனும் ஒரு பொருண்மை தரையிலிருந்து h எனும் உயரத்திற்கு உயர்த்தப்பட்டால் அது நிலை ஆற்றல் பெற்றிருப்பதாகக் கூறலாம். அப் பொருளின் எடை mg நிலைக்குத்தாகக் கீழ் நோக்கிச் செயல்படுமாகையால், அப் பொருளை மேலே உயர்த்தும்போது mg எனும் இத் தடையை எதிர்த்துத்தான் உயர்த்தப்படுகிறது. எனவே, இத் தடை விசையாகிய mgஆல் அப் பொருளை h உயரத்திலிருந்து அதன் நியமமான நிலையாகிய தரைக்குக் கொண்டுவரும்போது செய்யப்படும் வேலை mgh ஆகும். இதுவே, அப் பொருளின் நிலை ஆற்றலாகும்.

∴ h உயரத்திலுள்ள m பொருண்மையின் நிலை ஆற்றல் $= mgh$

ஒரு பொருள் அடையக்கூடிய மிகத் தாழ்ந்த புள்ளி (அல்லது தளம்) அப் பொருளின் அடிப்புள்ளி (base point) அல்லது அடித்தளம் (base plane) என்று சொல்லப்படும். அடிப்புள்ளிக்கு உயரமான நிலையிலுள்ள பொருள்கள் நேரடையாள நிலை ஆற்றலைக் கொண்டிருப்பதாகவும், அடிப்புள்ளிக்குத் தாழ்வான நிலையிலுள்ள பொருள்கள் எதிரடையாள நிலை ஆற்றலைக் கொண்டிருப்பதாகவும் கொள்ளப்படுகின்றன.

ஒரு பொருளின் மீது செயல்படும் ஒரு விசையினால் அப் பொருள் ஒரு கிடைத்தளத்தின் மீது இழுத்துச் செல்லப் பட்டாலோ அல்லது உருட்டி விடப்பட்டாலோ, அவ் விசையினால் செய்யப்படும் வேலை நிலை ஆற்றலாகச் சேர்த்து வைக்கப் படுவதில்லை. ஏனெனில், உராய்வின் காரணமாக, ஆற்றலானது வெப்பமாக மாறி மேற்கொண்டு பயனற்றதாகி விடுகிறது. ஒரு விசையினால் செயல்படுத்தப்பட்ட ஒரு பொருள் இயக்க முடிவில் முன்னிருந்த மட்டத்திலேயே இருந்தால், இயக்கத்தின்போது வெளிப்படும் ஆற்றல் வெப்பமாக மாறி விடுவதால் அதன் முன்னிருந்த நிலை ஆற்றல் எவ்வித மாறுதலுமடையாது அப்படியேயிருக்கும். மாறாக, ஒரு பொருள் ஒரு விசையினால் ஒரு சாய்தளத்தின் மேல் இழுத்துச் செல்லப் பட்டால், அதன் ஆற்றலில் ஒரு பகுதி வெப்பமாக மாறுகிறது; எஞ்சியுள்ள பகுதி நிலை ஆற்றலாக மாறுகிறது.

காப்பு நிலை விசை (Conservative Force)

ஒரு துகளின்மீது செயல்படும் ஒரு விசை அத் துகளை அதன் நியமமான நிலையிலிருந்து அதன் இயக்கப் பாதை வழியே

வேறொரு நிலைக்குக் கொண்டு சென்று மீண்டும் அதன் நியமமான நிலைக்கே கொண்டுவருவதால் எவ்வித வேலையும் செய்யப் படவில்லையாயின் அவ் விசை ஒரு 'காப்பு நிலை விசை' எனப்படும்.

m பொருண்மையுள்ள ஒரு பொருள் h உயரத்திற்கு மேலே உயர்த்தப்பட்டு மீண்டும் அதன் நியம நிலைக்கே கொண்டுவரப் பட்டால், செய்யப்பட்ட மொத்த வேலை $-mgh + mgh = 0$ ஆகும். எனவே, அப் பொருளின் எடையாகிய mg என்பது ஒரு காப்பு நிலை விசையாகும். மாறாக, F என்னும் விசை ஒரு கிடைத்தளத்தின் மேலுள்ள ஒரு துகளை s தூரத்திற்கு நகர்த்த வேண்டுமாயின் செய்யப்பட வேண்டிய வேலை Fs ஆகும். அதே துகளை மீண்டும் அதன் நியம நிலைக்குக் கொண்டு செல்லச் செய்யப்பட வேண்டிய வேலையும் Fs ஆகும். ஆகவே, ஒரு கிடைத்தளத்தின் மேல் ஒரு துகளை உராய்வுத் தடையை எதிர்த்துச் சிறிது தூரத்திற்கு நகர்த்தி மீண்டும் நியம நிலைக்கே கொண்டுவரும்போது செய்யப்படுகின்ற வேலை பூச்சியமாகாது. எனவே, இங்கு விசை F ஆனது ஒரு காப்பு நிலை விசையாகாது.

ஒரு காப்பு நிலை விசைக் களத்தில் ஒரு துகள் ஒரு நிலையிலிருந்து வேறொரு நிலைக்கு நகரும்போது செய்யப்படுகின்ற வேலை அதன் இயக்கப் பாதையையோ அல்லது திசைவேகத்தையோ சாராமல் அதன் தொடக்க, இறுதி நிலைகளை மட்டுமே சார்ந்திருக்கும்.

ஆற்றல் காப்புத் தத்துவம் (Principle of conservation of Energy)

ஒரு காப்பு நிலை விசைத் தொகுதியின் செயல்பாட்டின்கீழ் ஒரு துகள் நகரும்போது அதன் இயக்கம் முழுவதிலும் அதன் இயக்க ஆற்றல், நிலை ஆற்றல் ஆகியவற்றின் மொத்தம் ஒரு மாறிலியாகும்.

ஆற்றலை ஆக்கவோ அல்லது அழிக்கவோ முடியாது; ஆனால் ஒரு வடிவத்திலிருந்து மற்றொரு வடிவத்திற்கு மாற்றப் படலாம். உதாரணமாக, ஒரு சாய்தளத்தின் உச்சியிலிருந்து கீழ்முகமாக உராய்வுத் தடையை எதிர்த்து நழுவிச் செல்லும் ஒரு பொருள் பெறுகின்ற இயக்க ஆற்றல் வெப்ப ஆற்றலாக மாற்றப்பட்டு விடுகிறது. பொறிமுறை ஆற்றல்களாகிய (Mechanical Energy) இயக்க ஆற்றல், நிலை ஆற்றல் ஆகியவை பற்றிய காப்புநிலைத் தத்துவம்பற்றி மட்டுமே இங்கு நாம் கவனிப்போம்.

கீழே விழும் பொருளில் ஆற்றல் காப்புத் தத்துவத்தைச் சரிபார்த்தல்

m பொருண்மையுள்ள ஒரு பொருள் தரையிலிருந்து h உயரத்திலுள்ள O என்னும் புள்ளியிலிருந்து கீழே விழுவதாகக் கொள்வோம். பொருள் O-விலிருக்கும்போது ஓய்விலிருப்பதால் அதன் இயக்க ஆற்றல் பூச்சியமாகும். தரையிலிருந்து h உயரத்திலிருப்பதால் அதன் நிலையாற்றல் mgh ஆகும்.

$\therefore$ O-வில் இயக்க ஆற்றல் + நிலை ஆற்றல்

$$= O + mgh = mgh.$$

பொருள் தரையை அடையும்போது அதன் திசைவேகம் v எனில்,

$$v^2 = u^2 + 2as$$

என்னும் சூத்திரத்தில் $u = 0,\ a = g,\ s = h$ என்று பிரதியிட,

$$v^2 = 0 + 2\,gh = 2\,gh.$$

$\therefore$ பொருளின் இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \times 2\,gh = mgh.$

பொருள் தரையிலேயே அதன் நியம நிலையிலிருப்பதால் அதன் நிலை ஆற்றல் பூச்சியமாகும்.

$\therefore$ தரையில் இயக்க ஆற்றல் + நிலை ஆற்றல்

$$= mgh + 0 = mgh.$$

இப்பொழுது, பொருள் கீழே விழும் பாதையில் O-விலிருந்து x தூரத்திலுள்ள ஏதேனுமொரு நிலையைக் கருதுக.

இந்த நிலையை அடையும்போது பொருளின் திசைவேகம் V எனில் $u = 0,\ a = g,\ s = x$ ஆகையால்,

$$V^2 = 0 + 2 \cdot g \cdot x = 2\,gx.$$

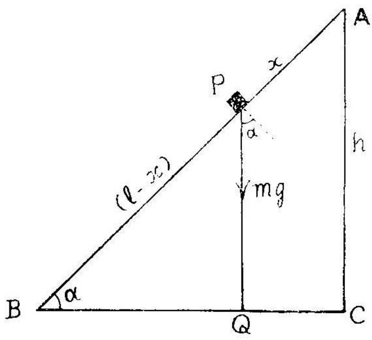
எனவே, பொருளின் இயக்க ஆற்றல் $\Big\} = \frac{1}{2}m\,V^2 = \frac{1}{2}m \times 2\,gx = mgx$

ஆனால், பொருளானது தரையிலிருந்து $(h - x)$ உயரத்திலிருப்பதால், அதன் நிலை ஆற்றல் $= mg\,(h-x)$ ஆகும்.

$\therefore$ இயக்க ஆற்றல் + நிலை ஆற்றல் $\Big\} = mgx + mg\,(h - x) = mgh.$

ஆகவே, உயரமான ஓர் இடத்திலிருந்து கீழ்நோக்கி விழுந்துகொண்டிருக்கும் ஒரு பொருளின் இயக்க ஆற்றல், நிலை ஆற்றல் ஆகியவற்றின் மொத்தம் அதன் இயக்கப்பாதையெங்கும் ஒரு மாறிலியாகவிருக்கும்.

சாய்தளத்தில் நழுவும் பொருளில் ஆற்றல் காப்புத் தத்துவத்தைச் சரிபார்த்தல்



படம் 46

m பொருண்மையுடைய ஒரு பொருள் ஒரு வழவழப்பான சாய்தளத்தில் மேலிருந்து கீழ்முகமாக ஈர்ப்பு விசையின்கீழ் நழுவுகிறது. பொருளின் நழுவு பாதையில் எந்தப் புள்ளியிலும் அதன் இயக்க ஆற்றல், நிலை ஆற்றல் ஆகியவற்றின் மொத்தம் ஒரு மாறிலியாகும்.

AB என்பது l நீளமும், h உயரமுமுள்ள ஒரு வழவழப்பான சாய்தளம். α என்பது அதன் சாய்வு. m பொருண்மையுள்ள P எனும் பொருள் A யிலிருந்து Bயை நோக்கி நழுவிச் செல்கிறது.

A-யில் பொருள் ஓய்விலிருப்பதால் இயக்க ஆற்றல் $= 0$.

A-யில் பொருள் h உயரத்திலிருப்பதால் நிலை ஆற்றல் $= mgh$.

$\therefore$ A-யில் இயக்க ஆற்றல் + நிலை ஆற்றல் $= mgh$.

பொருள் Bயை அடையும்போது அதன் திசைவேகம் v எனில்,

$$v^2 = u^2 + 2\,as$$

என்னும் சூத்திரத்தில், $u = 0$, $a = g \sin \alpha = g \times \frac{h}{l} = \frac{gh}{l}$,
$S = AB = l$ என்று பிரதியிட,

$$v^2 = 0 + 2\,\frac{gh}{l} \times l = 2\,gh \text{ ஆகும்.}$$

$\therefore$ B யில் பொருளின் இயக்க ஆற்றல்

$$= \tfrac{1}{2} mv^2 = \tfrac{1}{2} m \times 2\,gh = mgh.$$

B-யில் பொருள் 0 உயரத்திலிருப்பதால், நிலையாற்றல் $= 0$.

$\therefore$ B-யில் இயக்க ஆற்றல் + நிலை ஆற்றல்

$$= mgh + 0 = mgh.$$

பொருள் A யிலிருந்து நழுவி x தூரம் சென்று P என்னும் நிலையிலிருக்கும் போது அதன் திசை வேகம் V என்க.

$$u = O, a = g \sin \alpha = \frac{gh}{l}, S = x.$$

$$\therefore v^2 = u^2 + 2\,a\,S$$

$$V^2 = O + \frac{2\,gh}{l} \cdot x$$

$$= \frac{2\,ghx}{l}.$$

$\therefore$ P யில் பொருளின் இயக்க ஆற்றல்

$$= \tfrac{1}{2}\,m\,V^2 = \tfrac{1}{2}\,m \times \frac{2\,ghx}{l.} = \frac{mghx}{l.}$$

P யில் பொருளின் உயரம் $= PQ = PB \sin \alpha = (l\text{-}x)\dfrac{R}{l.}$

$\therefore$ P யில் பொருளின் நிலை ஆற்றல்

$$= \frac{mg\,(l - x)\,h}{l} = mgh\,m\frac{mghx}{l.}$$

$\therefore$ P யின் பொருளின் இயக்க ஆற்றல் + நிலை ஆற்றல் $= mgh.$

ஆகவே, ஒரு வழவழப்பான சாய்தளத்தின் மீது நழுவும் பொருளானது அதன் பாதையில் எந்த இடத்திலும் ஆற்றல் காப்புத் தத்துவத்தை நிறைவேற்றுகிற தென்று காண்கிறோம்.

மாதிரி 50. ஒரு விசை 10 கி. கிராம் எடையுள்ள ஒரு பொருளை 60 செ.மீ./வி². முடுக்கத்துடன் நிலைக்குத்தாக மேல் நோக்கி உயர்த்துகிறது. 2. வினடிகளில் அவ் விசையினால் செய்யப்பட்ட வேலையின் அளவு யாது?

தீர்வு:

பொருளின் எடை $= 10$ கி.கி. எடை

$= 10 \times 1000 + 981$ டைன்கள்

செயல்படும் விசை F எனில், F மேல் நோக்கியும், எடை கீழ் நோக்கியும் செயல்படுமாகையால் அவற்றின் விளைவு விசையாகிய (F — எடை) யினால் பொருளில் 60 செ.மீ./வி² முடுக்கம் ஏற்படுகிறது.

11

நியூட்டனின் இரண்டாவது விதியின்படி,

விளைவு விசை = பொருண்மை × முடுக்கம்:

$$F - 10 \times 1000 \times 981 = 10 \times 1000 \times 60$$

$$F = 10 \times 1000 \times 60 + 10 \times 1000 \times 981$$

$$= 10^4 (60 + 981)$$

$$= 10^4 \times 1041 \text{ டைன்கள்.}$$

செயல்படுபுள்ளி 2 வினாடிகளில் செல்லும் தூரம் S எனில்,

$$S = ut + \frac{1}{2} at^2$$

என்னும் சூத்திரத்தில், $u = O, a = 60, t = 2$ என்று பிரதியிட,

$$S = O + \frac{1}{2} \times 60 \times 4 = 120 \text{ செ.மீ.}$$

∴ செய்யப்படும் வேலை $= F \times S$

$$= 10^4 \times 1041 \times 120 \text{ எர்க்குகள்}$$

$$= 10^5 \times 1041 \times 12 \text{ எர்க்குகள்}$$

$$= 10^2 \times 12492 \text{ எர்க்குகள்}$$

$$= 10^7 \times 124.92 \text{ எர்க்குகள்}$$

$$= 124.92 \text{ ஜௌல்கள்.}$$

மாதிரி 51- 50 டன் பொருண்மையுள்ள ஒரு தொடர் வண்டி சமதள இருப்புப் பாதையில் டன்னுக்கு 10 ராத்தல் எடை வீதமுள்ள மாறுத்தடையை எதிர்த்து $1\frac{2}{9}$ நிமிடங்களில் 15 மை/மணி வேகத்தைப் பெறுகிறதெனில் தொடர்வண்டிப் பொறியின் பரித்திறன் காண்க.

தீர்வு :

தடைவிசை = 50 × 10 = 500 ராத். எடை

வண்டி O தொடக்கவேகத்துடன் புறப்பட்டு $\frac{11}{9}$ நிமிடங்களில் 60 மை/மணி வேகத்தை அடைகிறது.

∴ $u = O : v = 15$ மை/மணி $= 22$ அடி/வி.

$$t = \frac{11}{9} \text{ நிமி.} = \frac{11}{9} \times 60 = \frac{220}{9} \text{ வி.}$$

$v = u + at$ யிலிருந்து, $22 = O + \frac{220}{3} a$

$$\text{அல்லது, } a = \frac{66}{220} = \frac{3}{10} \text{ அடி/வி}^2$$

∴ இயக்கவிசை = பொருண்மை × முடுக்கம்

$$= 50 \times 2240 \times \frac{3}{10} \text{ ராத்தலிகள்}$$

$$= \frac{50 \times 2240 \times 3}{32 \times 10} \text{ ராத். எடை}$$

$$= 1059 \text{ ராத். எடை.}$$

∴ பொறியின் உண்மையான இழுவிசை

= இயக்கவிசை + தடைவிசை

= 1050 ராத். எடை + 500 ராத். எடை

= 1550 ராத். எடை.

ஒரு விநாடியில் செல்லும் தூரம் = 22 அடி.

∴ ஒரு விநாடியில் செய்யப்படும் வேலை

= 1550 × 22 அடி – ராத்தலிகள்

$$= \frac{1550 \times 22}{550} \text{ பரித்திறன்கள்}$$

= 62 ப. தி.

மாதிரி **52.** 200 டன் பொருண்மையுள்ள ஒரு தொடர் வண்டி 3/500 என்ற சாய்விலுள்ள ஒரு சாய்தளத்தின் மேல் 600 ப. தி. கொண்ட ஒரு பொறியினால் 40 மை/மணி வேகத்தில் இழுத்துச் செல்லப்படுகிறது. உராய்வு முதலியவற்றால் ஏற்படும் தடைவீதம் டன்னுக்கு எவ்வளவு என்று காண்க.

தீர்வு: பொறியின் திறன் = 600 ப.தி.

= 600 + 550 அடி. ராத்./வி.

= 600 × 550 × 32 அடி ராத்தலிகள்/விநாடி.

$$\text{வண்டியின் வேகம்} = 40 \text{ மை/மணி} = 40 \times \frac{22}{15} = \frac{176}{3}$$ அடி/வி.

$$\text{ஒரு விநாடியில் வண்டி செல்லும் தூரம்} = \frac{176}{3} \text{ அடி.}$$

தடையை எதிர்த்து வண்டியின் விசை $= P$ எனில், ஒரு விநாடியில் செய்யப்படும் வேலை $= P \times \frac{176}{3}$ அடி ராத்தலிகள்

$\therefore P \times \frac{175}{3}$ அடி ராத்தலிகள் $= 600 \times 550 \times 32$ அடி ராத்தலிகள்.

$.. P = 600 \times 550 \times 32 \times \frac{3}{176}$ ராத்தலிகள்.

$= 600 \times 300$ ராத்தலிகள்

$= \frac{600 \times 300}{32}$ ராத். எடைகள்

$= 5625$ ராத். எடைகள்.

தளத்தின் சாய்வுத் தடை $= 200 \times 2240 \times \frac{3}{500}$ ராத். எடைகள்.

$= 2688$ ராத். எடைகள்.

உராய்வுத் தடை முதலியன டன்னுக்கு m ராத். எடைகள் என்று கொள்க.

$\therefore$ உராய்வுத் தடை விசை $= 200\, m$ ராத். எடைகள்.

$\therefore$ மொத்தத் தடை விசை $= (2688 + 200m)$ ராத். எடைகள் வண்டி சீரான வேகத்துடன் செல்வதால்,

வண்டியின் விசை = மொத்தத் தடை விசை

$\therefore 5625 = 2688 + 200\, m$

$.200\, m = 2937$

$m = 14.685$

உராய்வுத் தடை முதலியன டன்னுக்கு 14.685 ராத். எடையாகும்.

மாதிரி 53. 500 ப.தி. கொண்ட ஒரு பொறி 200 டன் எடையுள்ள ஒரு தொடர்வண்டியை சமதள இருப்புப் பாதையின் மேல் இழுத்துச் செல்கிறது. தடைவிசை 16 ராத். எடை/டன் எனில் வண்டி 30 மை/மணி வேகத்துடன் சென்று கொண்டிருக்கும்போது அதன் முடுக்கம் என்ன ?

தீர்வு : பொறியின் திறன் $= 500$ ப.தி.

$= 500 \times 550$ அ.ராத்./வி.

வேகம் $= 30$ மை/மணி

$= 44$ அடி/வி.

$\therefore$ 1 விநாடியில் செல்லும் தூரம் $= 44$ அடி.

பொறி செயலாற்றும் விசை P எனில், ஒரு விநாடியில் செய்யப்படும் வேலை $P \times 44$ அடி. ராத். ஆகும்.

$$\therefore \quad P \times 44 = 500 \times 550$$

$$\text{அல்லது, } P = \frac{500 \times 550}{44} = 6250 \text{ ராத். எடை}$$

அதாவது, பொறியின் விசை $= 6250$ ராத். எடை.

$= 6250 \times 32$ ராத்தலிகள்.

தடை விசை $= 200 \times 16$ ராத். எடை.

$= 200 \times 16 \times 32$ ராத்தலிகள்

$= 3200 \times 32$ ராத்தலிகள்.

விளைவு விசை $=$ பொறியின் விசை— தடைவிசை

$= (6250 \times 32 - 3200 \times 32)$ ராத்தலிகள்

$= 3050 \times 32$ ராத்தலிகள்

இவ்விளைவு விசையானது பொருண்மை $\times$ முடுக்கமாகும்.

$$\therefore \quad 200 \times 2240 \times \text{முடுக்கம்} = 3050 \times 32$$

$$\therefore \quad \text{முடுக்கம்} = \frac{3050 \times 32}{200 \times 2240}$$

$$= \frac{61}{280} \text{ அடி/வி}^2.$$

மாதிரி **54.** 22,00 பரித்திறன் கொண்ட ஒரு நீராவிக் கப்பல் 10 நாட்களில் 3,300 மைல்கள் ஓடுகிறது. அதன் இயக்கத்திற்கெதிரான சராசரித் தடையைக் காண்க.

தீர்வு: கப்பலின் வேகம் $= 3300$ மைல்/10 நாள்

$= 330$ மைல்/நாள்

$$= \frac{330 \times 5280}{24 \times 60 \times 60} \text{ அடி/விநாடி}$$

$$= \frac{121}{6} \text{ அடி/விநாடி.}$$

∴ ஒரு வினாடியில் சென்ற தூரம் $= \frac{121}{6}$ அடி.

கப்பலின் விசை P எனில், ஒரு விநாடியில் செய்யும் வேலை

$= P \times \frac{121}{6}$ அடி. ராத்.

ஆனால் கப்பலின் திறன் = 22,000 ப.தி.

∴ ஒரு விநாடியில் செய்யும் வேலை = 22,000 × 550 அடி. ராத்.

$$\therefore \quad P \times \frac{121}{6} = 22{,}000 \times 550$$

$$P \therefore \quad = 22{,}000 \times 550 \times \frac{6}{121} \text{ ராத். எடை}$$

$$= 600{,}000 \text{ ராத். எடை.}$$

நீராவிக் கப்பல் சராசரி சீரான வேகத்துடன் செல்வதாகக் கருதப்படுவதால், கப்பலால் ஆற்றப்படும் விசை= தடை விசை

∴ கப்பலின் இயக்கத்திற்கெதிரான தடை

= 6000,000 ராத். எடை

அதாவது, சராசரித் தடை $= \frac{600{,}000}{2240}$ டன் எடை

$= 267 \frac{6}{7}$ டன் எடை.

மாதிரி 55. நிமிடத்திற்கு 13,200 ராத்தல் எடையுள்ள நீரை 48 அடி/வி. வேகத்துடன் வெளியே தள்ளக்கூடிய ஒரு பொறியின் பரித்திறன் காண்க.

தீர்வு : வெளியே தள்ளப்படும் நீர் = 13200 ராத்/நிமி.

$$= \frac{13200}{60}$$

= 220 ராத்/வி.

ஒரு விநாடியில் வெளியே தள்ளப்படும் நீரின் பொருண்மை = 220 ராத்.

நீரின் வேகம் = 48 அடி/வி.

∴ ஒரு விநாடியில் செய்யப்படும் வேலை = இயக்க ஆற்றல்

$= \frac{1}{2} mv^2$

$= \frac{1}{2} \times 220 \times 48^2$ அடி ராத்தலிகள்

$$= \frac{110 \times 48 \times 48}{32} \text{ அடி-ராத்.}$$

$$= \frac{110 \times 48 \times 48}{32 \times 550} \text{ ப. தி.}$$

$$= 14.4 \text{ ப.தி.}$$

மாதிரி 56. ஒரு ஆற்றின் அகலம் ஒரு இடத்தில் d அடி ; அதன் சராசரி ஆழம் h அடி ; அதன் சராசரி வேகம் u அடி/விநாடி. ஓர் அலகு கன அளவுத் தண்ணீரின் எடை w எனில் ஆற்றின் பரித்திறன்

$$\frac{hdwu^3}{1100g} \text{ என்று காட்டு.}$$

தீர்வு : ஒரு விநாடியில் பாய்கின்ற நீரின் கன அளவு

$= h\,d\,u$ க. அடி.

ஒரு விநாடியில் பாய்கின்ற நீரின் பொருண்மை

$= h\,d\,u\,w$ ராத்.

ஒரு விநாடியில் பாயும் நீரினுல் செய்யப்படும் வேலை

= அதன் இயக்க ஆற்றல்

$= \frac{1}{2} mv^2$

$= \frac{1}{2} \times hduw \times u^2$ அடி ராத்தலிகள்

$$= \frac{h\,d\,w\,u^3}{2} \text{ அடி-ராத்தலிகள்}$$

$$= \frac{h\,d\,w\,u^3}{2g} \text{ அடி-ராத்}$$

$$= \frac{h\,d\,w\,u^3}{2g \times 550} \text{ ப.தி.}$$

$$= \frac{h\,d\,w\,u^3}{1100g} \text{ ப.தி.}$$

மாதிரி 57. ஒரு பொறியானது ஒரு கிணற்றிலிருந்து நீரைத் தரைமட்டத்திற்கு இறைத்து வெளியேற்றுகிறது. கிணற்றின் சராசரி நீர்மட்டத்தின் ஆழம் 44 அடி. ஒரு விநாடியில் 6 க. அடி நீர் வெளியேற்றப்படுகிறது. பொறியின் வேலையில் மூன்றில் இரண்டு பாகமே நீரை வெளியேற்றப் பயன்படுகிறதெனில் பொறியின் பரித்திறன் காண்க.

(ஒரு க. அடி. நீரின் பொருண்மை 62.5 ராத்.)

தீர்வு: ஒரு விநாடியில் வெளியேற்றப்படும் நீரின் பொருண்மை $= 6 \times 62.5 = 375$ ராத்.

இந்த நீர் உயர்த்தப்படும் தூரம் $= 44$ அடி.

$\therefore$ ஒரு விநாடியில் செய்யப்படும் வேலை $= 375 \times 44$ அடி. ராத்.

$$= \frac{375 \times 44}{550} \text{ ப.தி.}$$

$$= 30 \text{ ப.தி.}$$

பொறியின் திறனில் மூன்றில் இரண்டு பாகம் $= 30$ ப.தி.

$\therefore$ பொறியின் திறன் $= 30 \times \frac{3}{2} = 45$ ப.தி.

மாதிரி 58. நிமிடத்திற்கு 1000 காலன்கள் வீதம் 50 அடி ஆழத்திலிருந்து நீரை இறைத்து 6 சதுர அங்குலக் குறுக்கு வெட்டுள்ள குழாயின்மூலம் வெளியேற்றுவதற்குத் தேவையான பரித்திறனைக் காண்க.

(ஒரு க.அடி நீர் $= 6\frac{1}{4}$ காலன்; 1 காலன் நீர் $= 10$ ராத்.)

தீர்வு: ஒரு நிமிடத்தில் மேலே உயர்த்தப்படும் நீர்

$$= 1000 \text{ காலன்}$$

$$= 10,000 \text{ ராத்.}$$

உயர்த்தப்படும் உயரம் $= 50$ அடி.

$\therefore$ ஒரு நிமிடத்தில் செய்யப்படும் வேலை $= 10,000 \times 50$ அடி-ராத்.

குழாயின் குறுக்கு வெட்டுப் பரப்பு $= 6$ ச. அங்

$$= \frac{6}{12 \times 12} = \frac{1}{24} \text{ ச. அடி.}$$

ஒரு நிமிடத்தில் இறைக்கப்படும் நீரின் அளவு $= 1000$ காலன்

ஒரு விநாடியில் இறைக்கப்படும் நீரின் அளவு

$$= \frac{1000}{60} \text{ காலன்}$$

$$= \frac{1000}{60} \times \frac{4}{25} \text{ க. அடி.}$$

$$\frac{8}{3} \text{ க. அடி.}$$

நீரின் வேகம், v அடி/வி. எனில், ஒரு விநாடியில் இறைக்கப்படும் நீரின் அளவு = குறுக்கு வெட்டுப் பரப்பு $\times$ வேகம் $= \frac{1}{24} \times v$ க. அடி ஆகும்.

$$\therefore \quad \frac{1}{24} \times v = \frac{8}{3}$$

அல்லது, $v = \frac{8}{3} \times 24 = 64$ அடி/வி.

64 அடி/வி. வீதம் ஒரு விஞடியில் வெளித் தள்ளப்படும்

நீரின் அளவு $= \frac{1000}{60}$ காலன்

$= \frac{1000}{60} \times 10$ ராத்

$= \frac{1000}{6}$ ராத்.

$\therefore$ வெளித் தள்ளப்படும் நீரினுல் ஒரு விஞடியில் செய்யப்படும் வேலை $= \frac{1}{2} mv^2$

$= \frac{1}{2} \times \frac{1000}{6} \times 64^2$ அடி. ராத்தலிகள்

$= \frac{1}{2} \times \frac{1000}{6} \times \frac{64 \times 64}{32}$ அடி-ராத்.

$= \frac{32000}{3}$ அடி-ராத்.

நீரை மேலே ஏற்றுவதில் ஒரு நிமிடத்தில் செய்யும் வேலை

$= 1000 \times 50$ அடி-ராத்.

$\therefore$ நீரை மேலே ஏற்றுவதில் ஒரு விஞடியில் செய்யும் வேலை

$= \frac{1000 \times 50}{60}$ அடி-ரா

$= \frac{25000}{3}$ அடி-ராத்.

$\therefore$ ஒரு விஞடியில் மொத்தம் செய்யப்படும் வேலை

$= \left(\frac{32000}{3} + \frac{25000}{3}\right)$ அடி-ராத்

$\therefore$ தேவையான திறன் $= \frac{57000}{3}$ அடி-ராத்.

$= \frac{57000}{3 \times 550}$ ப.தி.

$= 34.5$ ப.தி. (தோராயமாக)

மாதிரி 59. ஒரு பொறியானது ஒரு கிணற்றிலிருந்து அதன் சராசரி நீர் மட்டத்திற்குமேலே 15 மீட்டர் உயரத்திலுள்ள தரை மட்டத்திற்கு நீரை இறைக்கிறது. வினுடிக்கு 250 லிட்டர் நீர் மேலே ஏற்றப்படுகிறது. பொறி செய்யும் வேலையில் முக்கால் பாகம் நீரை மேலே ஏற்றுவதற்குப் பயன்படுகிறதெனில், பொறியின் திறனைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு : ஒரு வினுடியில் மேலே ஏற்றப்படும் நீர்

= 250 லிட்டர்

= 250 கிலோகிராம்.

m = ஒரு வினுடியில் ஏற்றப்படும் நீரின் பொருண்மை

= 250 கி.கி.

= 250×1000 கிராம்

= 250×10^3 கிராம்.

g = ஈர்ப்பு முடுக்கம் = 981 செ.மீ./வி².

h = நீர் ஏற்றப்படும் உயரம்

= 15 மீட்டர்

= 15×100 செ.மீ.

= 15×10^2 செ.மீ.

நீரை 15 மீட்டர் உயரத்திற்கு ஏற்றும்போது செய்யப்படும்வேலை

= mgh

= $250 \times 10^3 \times 981 \times 15 \times 10^2$ எர்க்குகள்.

= $375 \times 10^6 \times 981$ எர்க்குகள்

= $\frac{375 \times 10^6 \times 981}{10^7}$ ஜௌல்கள் (ஆனால் 1 ஜௌல்

= வாட்

= 36787.5 வாட்டுகள்

செய்யப்படும் வேலையானது பொறியின் திறனில் முக்கால் பாகம்.

∴ முக்கால் திறன் = 36787.5 வாட்டுகள்.

∴ முழுத் திறன் = $36787.5 \times \frac{4}{3}$ வாட்டுகள்

= 49050.0 வாட்டுகள்

= 49·05 கிலோ வாட்டுகள்.

பயிற்சி 5.

1. 10 கிலோகிராம் பொருண்மையுள்ள ஒரு பொருள் 218 மீட்டர் உயரத்திலிருந்து கீழே போடப்படுகிறது. அதன் இயக்கத்தின் இறுதி வினாடியில் செய்யப்படும் வேலையைக் காண்க.

2. 60 கி.கி. எடையுள்ள ஒரு மனிதன் 50 மீட்டர் உயரமுள்ள ஒரு கோபுரத்தின் மேல் ஏறுகிறான். அவன் ஏறுகின்ற போது செய்கின்ற வேலையைக் காண்க. மேலும், $\frac{1}{2}$ கிலோ வாட் திறனுள்ள ஒரு பொறி அவனை கோபுரத்தின் உச்சிக்கு 58.86 வினாடிகளில் தூக்கிச் செல்லுமென்று காட்டு.

3. 50 டன் எடையுள்ள ஒரு தொடர்வண்டியின் இலக்கத்திற்கெதிரான உராய்வுத் தடை டன்னுக்கு $\frac{1}{2}$ கிலோ கிராம் எனில் சமதள இருப்புப்பாதையில் 72 கி.மீ./மணி வேகத்தில் செல்ல பொறியின் திறன் என்னவாகயிருக்க வேண்டும்?

4. பொறியுடன் 300 டன் பொருண்மையுள்ள ஒரு தொடர்வண்டி 100 இல் 1 என்ற சாய்தளத்தின்மேல் 36 கி.மீ./மணி வேகத்தில் இழுத்துச் செல்லப் படுகிறது. பொறியின் திறன் 32·7 கிலோவாட்டுகளெனில், உராய்வு முதலியவற்றால் ஏற்படும் தடையை ஒரு டன்னுக்கு எவ்வளவு என்று காண்.

5. பொறியுடன் 200 டன் பொருண்மையுள்ள ஒரு தொடர் வண்டி 200 இல் 1 என்னும் சாய்தளத்தின் மேல் 54 கி.மீ./மணி வேகத்தில் இழுத்துச் செல்லப்படுகிறது. பொறியின் திறன் 212·55 கிலோவாட்களெனில், தடை விசையைக் கணக்கிடுக.

6. 100 டன் பொருண்மையுள்ள ஒரு பொறி சமதளத்தில் 0.5 கி.கி./டன் தடையை எதிர்த்து 45 கி.மீ./மணி சீரான வேகத்துடன் ஓடிகொண்டிருக்கிறது. பொறியின் திறனைக் காண்க.

7. 100 டன் பொருண்மையுள்ள ஒரு தொடர்வண்டி சமதளத்தில் 29 ராத்./டன் தடையை எதிர்த்து 15 மைல்/மணி சீரான வேகத்துடன் ஓடிக்கொண்டிருக்கிறது. பொறியின் பரித்திறனைக் காண்க.

8. 40 டன் பொருண்மையுள்ள ஒரு தொடர்வண்டி சமதளத்தில் 40 மை/மணி என்ற சீர் வேகத்துடன் சென்று

கொண்டிருக்கிறது. உராய்வு, காற்று முதலியவற்றின் காரண மான தடை டன்னுக்கு 30 ராத்தல் எடையெனில் பொறியின் பரித்திறனைக் காண்க.

9. ஒரு தொடர்வண்டி சமதளத்தில் 2500 ராத்தல் எடை யுள்ள தடையை மீறி $22\frac{1}{2}$ மைல்/மணி என்ற சீர்வேகத்துடன் சென்று கொண்டிருக்கிறது. பொறியின் பரித்திறனைக் காண்க.

10. 100 டன் எடையுள்ள ஒரு தொடர்வண்டி 100 இல் 1 என்ற சாய்தளத்தின் மேல் 45 மைல்/மணி சீர்வேகத்துடன் சென்று கொண்டிருக்கிறது. உராய்வு முதலியவற்றின் தடை தொடர்வண்டியின் எடையில் $\frac{1}{50}$ பாகமெனில், வண்டியின் பரித்திறனைக் காண்க.

11. 350 டன் பொருண்மையுள்ள ஒரு தொடர்வண்டி 200 இல் 1 என்ற சாய்தளத்தின் மேல் டன்னுக்கு 12 ராத்தல் எடை வீதமுள்ள தகையை எதிர்த்து சென்று கொண்டிருக் கிறது. பொறியின் பரித்திறன் 500 எனில் வண்டியின் வேகம் 15 மைல்/மணியாக இருக்கும்போது அதன் முடுக்கமென்ன ?

12. 10 டன் எடையுள்ள ஓர் உந்துவண்டி டன்னுக்கு 17 ராத்தல் எடை வீதமுள்ள உராய்வுத்தடையை எதிர்த்துச் சமதளத்தில் ஓடிக்கொண்டிருக்கிறது. வண்டியின் உச்ச பரித்திறன் 34 எனில், சமதளத்தில் வண்டியின் உச்ச வேகத்தைக் காண்க.

13. 500 ப.தி. கொண்ட ஒரு பொறி 200 டன் எடையுள்ள ஒரு தொடர் வண்டியைச் சமதள இருப்புப் பாதையில் டன்னுக்கு 16 ராத்தல் எடை வீதமுள்ள தடையை எதிர்த்து இழுத்துச் செல்கிறது. வண்டியின் வேகம் 30 மைல்/மணி ஆக யிருக்கும் போது முடுக்கத்தைக் காண்க.

14. நிமிடத்திற்கு 10,000 ராத்தல் நீரை 80 அடி/வினுடி வேகத்துடன் வெளியேற்றக்கூடிய பொறியின் பரித்திறன் காண்க.

15. ஒரு பொறியானது நிமிடத்திற்கு 1200 காலன் நீரை 6 அடி உயரத்திற்கு ஏற்றி 32 அடி/வினுடி வேகத்தில் வெளி யேற்றுகிறது. ஒரு காலன் நீரின் எடை 10 ராத்தல்கள் எனில் பொறியின் பரித்திறன் யாது ?

16. 8 அடி விட்டமும், 600 அடி ஆழமுமுள்ள உருளை வடிவமான ஒரு குழாய்க் கிணற்றில் நிறைந்துள்ள நீரை 32 மணி நேரத்தில் வெளியேற்றக்கூடிய பொறியின் பரித்திறன் காண்க.

17. நிமிடத்திற்கு 500 காலன் வீதம் 100 அடி ஆழத்தி லிருந்து 3 அங்குல விட்ட வட்டக் குழாயின் மூலம் நீரை வெளி யேற்றத் தேவையான பரித்திறனைக் காண்க.

18. 40 அடி உயரத்திற்கு 3 அங்குலக் குழாயின் மூலம் நிமிடத்திற்கு 200 காலன் வீதம் நீர் ஏற்றப்பட வேண்டி யுள்ளது. பொறியின் திறனில் 40 சதவீதமே நீரேற்றுவதில் பயன்படுகிறது. தவிர, குழாயின் உராய்வுத் தடையின் காரணமாக ஏற்படும் திறனிழப்பு 20 அடி உயர நீரேற்றத் திற்குச் சமமென்று மதிப்பிடப் பட்டுள்ளது. பொறியின் திறன் எவ்வளவு இருக்கவேண்டும் ?

(ஒரு க. அடி நீர் $= 6\frac{1}{4}$ காலன் ; 1 காலன் நீர் எடை $= 10$ ராத்தல்)

19. ஒரு நீர்த்தேக்கத்தில் தேக்கப்பட்டுள்ள நீரை $3\frac{1}{2}$ விட்டமுள்ள குழாயின் மூலம் 96 அடி/வி^{2} வேகத்தில் ஒரு பொறி வெளியேற்றுகிறது. பொறியின் வினைத்திறன் (Efficiency) 75% எனில் பொறியின் பரித்தின் காண்க.

20. 10·9 கிலோவாட் திறனுடன் வேலைசெய்யும் ஒரு பொறி 5 மீட்டர் உயரத்திற்கு நீரை ஒரு மணி நேரத்திற்கு ஏற்றிக் கொண்டிருந்தால், ஏற்பப்பட்ட நீரின் அளவு என்ன ?

21. h ப.தி., உடன் இயங்கிக் கொண்டிருக்கும் ஒரு பொறி விநாடிக்கு x ராத்தல் நீர் வீதம் ஒரு நீர்த் தேக்கத்திலிருந்து d அடி ஆழத்திலுள்ள நீரை நிலைக்குத்தாக d அடி நீளக் குழாயின் மூலம் ஏற்றுகிறது. குழாயை விட்டு வெளிவரும் போது நீரின் வேகத்தையும், குழாய்க்கு மேலே நீர் எவ்வளவு உயரம் செல்லுமென்றும் காண்க.

22. ஒரு மனிதன் m பொருண்மையுள்ள ஒரு வாளியை ஒரு கிணற்றின் அடியிலிருந்து தூக்குகிறான். வாளி h அடி உயரத்திற்குத் தூக்கப்பட்ட போது அதன் வேகம் v அடி/வி. இதுவரை மனிதனால் செய்யப்பட்டவேலை

$$g\left(mh + + \frac{mv^2}{29}\right) \text{ என்று காட்டு.}$$

23. 100 டன் பொருண்மையுள்ள ஒரு தொடர்வண்டி 112 இல் 1 சாய்வின் மேல் 30 மைல்/மணி சீர்வேகத்துடன் ஓடிக்கொண்டிருக்கிறது. உராய்வு, காற்று முதலியவற்ருலுண்டாகும் தடை 10 ராத்./டன் எனில் பொறியின் ப.தி. காண்க.

(சென்னை 1966 ஏப்.)

24. ஒரு துகள் 981 செ.மீ./வி. வேகத்துடன் நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கி எறியப்படுகிறது. அரை வினுடியில் அதன் இயக்க ஆற்றல் தொடக்க இயக்க ஆற்றலில் கால்பாகமென்று காட்டு.

25. ஒரு துகள் h உயரத்திலிருந்து கீழே போடப்படுகிறது. எந்த உயரத்தில் அதன் இயக்க ஆற்றல் தொடக்க நிலை ஆற்றலில் பாதியிருக்கும் ?

26. இயல்பான நீளம் l-ம், மீளியல்புக் குணகம் λ-ம் உடைய ஒரு மீளியல்புடைய இழையை T_1 இழுவிசையிலிருந்து T_2 இழுவிசைக்கு நீட்டும் போது செய்யப்படும் வேலை $\dfrac{l\,(T_1^2 - T_2^2)}{2\lambda}$ என்று காட்டுக.

27. 80 ராத்தல் எடையுள்ள ஒரு சிறுமி வினுடிக்கு ஒரு துள்ளல் வீதம், 3 அங்குல உயரத்திற்குத் துள்ளுகிருள். அவளுடைய சராசரி வேலை வீதத்தைக் காண்க.

28. ஒரு மின்சாரப் பளுதூக்கி (electric crane) 5 டன் பளுவை 40 அடி உயரத்திற்கு 14 வினுடிகளில் சீரான வேகத்துடன் நூக்குகிறது. செயல்படும் திறனில் 25 சதம் உராய்வில் கழிந்துவிடுமென்று கருதி, பொறியில் செயல்படுத்தப்பட வேண்டிய பரித்திறனைக் காண்க.

29. சீராக ஒழுகிக் கொண்டிருக்கும் ஒரு வாளியின் மூலம் ஒரு மனிதன் ஒரு கிணற்றிலிருந்து தண்ணீர் இறைக்கிருன். நிரம்பிய தண்ணீருடன் வாளியின் எடை 50 ராத்தல். வாளி கிணற்றின் விளிம்பை அடையும்போது பாதித் தண்ணீர் மிஞ்சி நிற்கும். கிணற்றின் ஆழம் 100 அடி யெனில் மனிதனுல் செய்யப்படும் வேலையைக் காண்க.

30. ஒரு கொல்லன் 7 ராத்தல் எடையுள்ள ஒரு சம்மட்டியால் ஒரு இரும்புத் துண்டை நிமிடத்திற்கு 20 தடவைகள்

வீதம் அடிக்கிருன். ஒவ்வொரு அடியின் போதும் சம்மட்டியானது 39 அடி/வினடி வேகத்தில் இரும்புத் துண்டின் மீது மோதி ஓய்வு பெறுகிறது. மனிதன் செய்யும் வேலை வீதத்தை பரித்திறனில் காண்க.

31. H பரித்திறன் கொண்ட ஒரு பொறி M பொருண்மையுள்ள ஒரு தொடர்வண்டியை n இல் 1 என்ற சாய்தளத்தின் மேல் m ராத். எடை/டன் தடையை எதிர்த்து இழுத்துச் செல்கிறது. தொடர்வண்டியின் மிக அதிகவேகம் $\dfrac{200\,H\,n}{(2240 + mn)\,M}$ அடி/வி. என்று காட்டு.

32. H பரித்திறனுடன் இயங்கிக் கொண்டிருக்கும் M டன் பொருண்மையுடைய ஒரு பொறி ஒவ்வொன்றும் m டன் பொருண்மையுடைய n வண்டிகளை V மைல்/மணி சீரான வேகத்துடன் இழுத்துச் செல்கிறது. பொறியின் மீதும், ஒவ்வொரு வண்டியின் மீதும் தடையானது எடைக்கு விகித சமத்திலிருந்தால் பொறிக்கும், அதற்கடுத்த வண்டிக்குமிடையேயுள்ள இணைப்பின் இழுவிசை $\dfrac{75}{448\,V}\left(\dfrac{H\,mn}{M + mn}\right)$ டன்கள் என்று காட்டுக.

33. R ராத்தல் தடையை S மைல்/மணி வேகத்தில் எதிர்த்துச் செல்லக்கூடிய பொறியின் பரித்திறன் $\dfrac{SR}{375}$ என்று காட்டுக.

34. 22,000 ப தி. கொண்ட ஒரு நீராவிக் கப்பல் 3300 மைல் தூரத்தை 6 நாட்களில் கடந்து செல்கிறது. கப்பலின் இயக்கத்திற்கெதிரான சராசரித்தடை என்ன?

3. தடை ஊடகத்தில் இயக்கம்
(Motion in a Resisting Medium)

ஒரு வெற்றிடத்தில் நகர்ந்து கொண்டிருக்கும் ஒரு பொருளில் அடங்கியுள்ள ஒவ்வொரு துகளின் மீதும் புவியீர்ப்பு முடுக்கம் ஒரே மாதிரியாகவே யிருக்குமாகையால் அப்பொருளை ஒரு துகளாகவே கருதலாம். ஆனல் காற்று மண்டலம் போன்ற ஏதேனுமொரு ஊடகத்தினுள்ளியங்கிக் கொண்டிருக்கும் ஒரு பொருளின் மேற்பரப்பு அவ் ஊடகத்தின் அழுத்தத்திற்குள்ளாகிறது. இவ் வழுத்தமானது, அவ்வூடகத்தின் தன்மை, பொருளின் வடிவமைப்பு, பொருளிலடங்கியுள்ள பொருண்மைகளின் பரவல் தன்மை, பொருளின் திசைவேகம், அதன் சுழற்சி வேகம், சுழலச்சு ஆகியவற்றிற்கேற்ப மிகவும் சிக்கலான முறையில் மாறுபடும். இருப்பினும், அப்பொருள் சுழற்சியற்று, சமச்சீர் கோள வடிவத்தையுடையதாக யிருப்பதாகவும், அத் தடை ஊடகம் ஓய்விலிருப்பதாகவும் ஏற்றுக் கொண்டால், அப்பொருளை அதன் வேகத்தின் ஏதோ ஒரு சார்பலனை அளவாகவும், அதன் வேகத்திற்கெதிரான திசையையும் கொண்ட ஒரு விசையின் செயற்பாட்டிற்குட்பட்ட ஒரு துகளாகக் கருதலாம். பொதுவாக, ஒரு தடை ஊடகத்திலியங்கிக் கொண்டிருக்கும் ஒரு பொருளின் திசைவேகம் அதிகரிக்க அதிகரிக்க அதன் இயக்கத்திற்கெதிரான தடையும் அதிகரித்துக் கொண்டேயிருக்கும். இத்தகைய தடைகளின் தன்மைகள் பற்றி ஏராளமான விதிகள் வகுக்கப்பட்டுள்ளன. அவற்றுள் பெரும்பாலானவை அனுபவ விதிகளாகும். காற்று மண்டலத்தில் எறியப்படும் பொருளின் திசைவேகம் வினடிக்கு 800 அடிக்கு மிகைப்படாமலிருந்தால் காற்று மண்டலத்தின் தடை திசைவேகத்தின் வர்க்கத்திற்கேற்ப மாறுபடுவதாகக் கண்டறியப்பட்டுள்ளது; திசைவேகம் 800 அடி/ வினடிக்கும் 1350 அடி/வினடிக்கு மிடையிலிருப்பின் தடைவேகம் திசைவேகத்தின் மூன்றடுக்கு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட அடுக்குக்கேற்ப மாறுபடுவதாகக் காணப்பட்டுள்ளது. 1350 அடி/வினடிக்கும் அதிகமான திசைவேகத்துடன் செல்லும் பொருட்களின்மீது தடையானது திசைவேகத்தின் வர்க்கத்திற்கேற்ப மாறுவதாகக் காணப்பட்டுள்ளது. தடையென்பது காப்பு நிலை விசையல்லவாகையால், தடை ஊடக இயக்கங்

களுக்கு ஆற்றல் காப்புத் தத்துவம் பொருந்தாது என்பதை உணர்க.

நோக்குவேகம் அல்லது எல்லைத் திசைவேகம், (Terminal or Limtiing Velocity)

வேகத்தைப்போல் n அடுக்குக்கு விகிதசமமான தடையை யுடைய ஓர் ஊடகத்தில் ஒரு பொருள் ஈர்ப்பு விசையின்கீழ் விழுந்து கொண்டிருப்பதாகக் கொள்வோம். பொருளின் கீழ் நோக்கிய முடுக்கம் g ஆகும். t நேரத்தில் பொருளின் வேகம் V எனில், அவ்வேகத்திற்கு எதிரானத் தடை kV^n ஆகும். இத்தடையானது மேல்நோக்கிச் செயல்படுமாகையால் கீழ் நோக்கிய விளைவு முடுக்கம் $g - kV^n$ ஆகும். ஆனால், பொருளா னது V திசை வேகத்துடன் கீழ்நோக்கிச் செல்வதால், இக்கீழ் நோக்கிய விளைவு முடுக்கம் $\frac{dV}{dt}$க்குச் சமமாகும்.

$$\therefore \frac{dV}{dt} = g - kV^n.$$

$g = kV^n$ ஆகும்போது இந்த முடுக்கம் மறைகிறது.

$$\text{அதாவது, } V^n = \frac{g}{k},$$

$$\text{அல்லது } V = \left(\frac{g}{k}\right)^{1/n}$$

எனில் முடுக்கம் பூச்சியமாவதால் துகளின் திசைவேகம் மேற் கொண்டு அதிகரிக்க இயலாத நிலையில் மீப்பெரு மதிப்பைப் பெறுகிறது. ஆகவே, $\left(\frac{g}{k}\right)^{1/n}$ என்பது அவ்வூடக இயக்கத்தில் துகள் பெறக்கூடிய மிக அதிகமான திசைவேகமாகும். இவ்வாறு ஒரு தடை ஊடகத்தில் இயங்கிக் கொண்டிருக்கும் ஒரு துகள் பெறக்கூடிய மிக அதிகமான திசைவேகமானது 'நோக்குத் திசைவேகம்' அல்லது 'எல்லைத் திசைவேகம்' என்றழைக்கப் படுகிறது. இவ் வெல்லைத் திசைவேகத்தை L என்று குறிப்பிடின், $L = (g/k)^{1/n}$ ஆகும். ஆகவே, இத்தடை ஊடகத்தினுள் ஒரு துகள் எல்லைத்திசை வேகத்துடன் கீழ்நோக்கி எறியப்பட்டால், அதன் தொடக்க முடுக்கம் பூச்சியவதால், துகளானது L எனும் சீர்வேகத்துடன் கீழ்நோக்கி இறங்கும். எல்லைத்திசை வேகத் திற்குக் குறைவான திசைவேகத்துடன் துகள் கீழ்நோக்கி யெறியப்பட்டால், ஈர்ப்பு முடுக்கம் தடையைவிட அதிகமாக

யிருக்குமாகையால் துகளின் திசைவேகம் எல்லைத்திசை வேகத்தை அடையும்வரை அதிகமாகிக் கொண்டேயிருக்கும். எல்லைத்திசை வேகத்தை அடைந்ததும், சீர்வேகத்துடன் செல்லும். மாறாக, துகளானது எல்லைத் திசைவேகத்தைவிட அதிகமான திசைவேகத்துடன் கீழ்நோக்கி எறியப்பட்டால், தடைமுடுக்கம் ஈர்ப்பு முடுக்கத்தைவிட அதிகமாயிருக்குமாகையால் துகளின் திசைவேகம் எல்லைத்திசை வேகத்தை அடையும் வரை குறைந்து கொண்டேயிருக்கும். துகள் மேல்நோக்கி எறியப்பட்டால் ஈர்ப்பு முடுக்கமும், தடைமுடுக்கமும் துகளின் வேகத்திற்கெதிராகச் செயல்படுமாகையால், வேகம் குறைந்து கொண்டே சென்று பூச்சியத்தை அடையும். அதன் பின்னர் துகள் கீழ்நோக்கி இறங்கத் தொடங்கும்.

சிலவகைத் தடைவிதிகளுக்குட்பட்ட தடை ஊடகங்களில் துகள்களின் இயக்கம்பற்றி கீழே விவரிக்கப்பட்டுள்ளன.

1. ஒரு துகள் புவியீர்ப்பின்கீழ் ஒரு தடை ஊடகத்தில் விழுகிறது. ஊடகத்தின் தடையானது திசைவேகத்தின் வர்க்கத்திற்கேற்ப மாறுமெனில், துகளின் இயக்கத்தை விவரிக்கவும் :

O தொடக்க வேகத்துடன் கீழே விழுந்து கொண்டிருக்கும் துகள் t நேரத்தில் x தூரம் விழுந்திருப்பதாகவும், அப்போது அதன் திசைவேகம் v என்றும் கொள்க. எனவே, தடைமுடுக்கம் kv^2 ஆகும். (k என்பது விகித சம மாறிலி.) ஈர்ப்பு முடுக்கம் g கீழ்நோக்கியும், தடைமுடுக்கம் kv^2 மேல்நோக்கியும் செயல்படுமாகையால், துகளானது $g-kv^2$ என்னும் விளைவு முடுக்கத்துடன் கீழ்நோக்கி விழுந்து கொண்டிருக்கும். ஆனால் t நேரத்தில் துகளின் கீழ்நோக்கிய திசைவேகம் v ஆகையால், கீழ்நோக்கிய முடுக்கம் $\frac{dv}{dt}$ ஆகும். ஆகவே, இயக்கச் சமன்பாடு வருமாறு :

$$\frac{dv}{dt} = g - kv^2 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

துகளானது எல்லைத் திசைவேகத்தை அடையும்போது முடுக்கம் பூச்சியமாகும். எனவே, எல்லைத் திசைவேகம் L எனில், $v = L$ ஆகும்போது $\frac{dv}{dt} = O$ ஆகும்.

$$\therefore \quad O = g - kL^2 \quad \text{அல்லது}, \; k = \frac{g}{L^2}.$$

$$\therefore \quad \frac{dv}{dt} = g - \frac{gv^2}{L^2}$$

$$= g\left(1 - \frac{v^2}{L^2}\right)$$

$$= g\left(\frac{L^2 - v^2}{L^2}\right) \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2)$$

ஆனால் துகளானது t நேரத்தில் x தூரம் சென்றிருப்பதால் $\frac{dx}{dt} = v$ ஆகும்.

$$\therefore \quad \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$\therefore \quad v \cdot \frac{dv}{dx} = g\left(\frac{L^2 - v^2}{L^2}\right)$$

அல்லது, $\frac{v\,dv}{L^2 - v^2} = \frac{g}{L^2}\,dx.$

$$\therefore \quad \int \frac{v\,dv}{L^2 - v^2} = \frac{g}{L^2}\int dx + c$$

(c = தொகையீட்டு மாறிலி)

$$-\tfrac{1}{2}\log\left(L^2 - v_2\right) = \frac{gx}{L^2} + c.$$

தொடக்கத்தில், $t = O, \quad x = O, \quad v = O$

$$\therefore \quad -\tfrac{1}{2}\log L^2 = c.$$

$$\therefore \quad -\tfrac{1}{2}\log\left(L^2 - v^2\right) = \frac{gx}{L^2} - \tfrac{1}{2}\log L^2$$

அல்லது, $\tfrac{1}{2}\log L^2 - \tfrac{1}{2}\log\left(L^2 - v^2\right) = \frac{gx}{L^2}$

$$\log\left(\frac{L^2}{L^2 - v^2}\right) = \frac{2\,gx}{L^2}$$

$$\therefore \quad \frac{L^2}{L^2 - v^2} = e^{\frac{2\,gx}{L^2}}$$

அல்லது, $\frac{L^2 - v^2}{L^2} = e^{-\frac{2\,gx}{L^2}}$

$$1 - \frac{v^2}{L^2} = e^{-\frac{2gx}{L^2}}$$

$$\frac{v^2}{L^2} = 1 - e^{-2gx/^2}$$

அல்லது, $v^2 = L^2 (1 - e^{-2gx/^2})$ ... (3)

$x \rightarrow \infty$ எனில் $e^{-2gx}/L^2 \rightarrow O \quad \therefore \quad v \rightarrow L.$

எனவே, துகளானது கந்தழித் தூரம் (infinite Distance) விழுந்த பின் எல்லைத் திசைவேகத்தை அடையும்.

மேலும் (2) இலிருந்து,

$$\frac{dv}{dt} = g\left(\frac{L^2 - v^2}{L^2}\right)$$

அல்லது, $\dfrac{dv}{L^2 - v^2} = \dfrac{g}{L^2}\ dt.$

$\therefore \displaystyle\int \frac{dv}{L^2 - v^2} = \frac{g}{L^2}\int dt + C_1$ (C_1 = தொகையீட்டு மாறிலி)

$$\frac{1}{2L} \text{los} \frac{L + v}{L - v} = \frac{gt}{L^2} + C_1$$

தொடக்கத்தில், $t = O$, $v = O \therefore C_1 = O.$

$$\therefore \frac{1}{2L} \log \frac{L + v}{L - v} = \frac{gt}{L^2}$$

$$\log \frac{L + v}{L - v} = \frac{2gt}{L}$$

$$\therefore \frac{L + v}{L - v} = e^{\frac{2gt}{L}}$$

$$\frac{(L + v) - (L - v)}{(L + v) + (L - v)} = \frac{e^{\frac{2gt}{L}} - 1}{e^{\frac{2gt}{L}} + 1}$$

$$\frac{2v}{2L} = \frac{e^{gt/^2} - e^{-gt/l}}{e^{gt/^2} + e^{-gt/l}}$$

$$\frac{v}{L} = \tan h\left(\frac{gt}{L}\right)$$

$$\therefore v = L \tanh\left(\frac{gt}{L}\right) \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

$t \to \infty$ எனில் $v \to L$. எனவே, துகளானது எல்லைத்திசை வேகத்தைக் கந்தழி நேரத்தில் பெறுகிறது.

இப்பொழுது, (3), (4) ஆகிய சமன்பாடுகளிலிருந்து v யை நீக்கவும்.

$$L^2 \left(1 - e^{\frac{-2gx}{L^2}}\right) = L^2 \tan h^2 \left(\frac{gt}{L}\right)$$

$$\therefore 1 - e^{-2gx/L^2} = \tan h^2 \left(\frac{gt}{L}\right)$$

$$- e^{-gx/L^2} = 1 - \tan h^2 \left(\frac{gt}{L}\right)$$

$$= \text{Sec } h^2 \left(\frac{gt}{L}\right)$$

$$\therefore e^{\frac{gx}{L^2}} = \text{Sec } h \left(\frac{gt}{L}\right)$$

$$e^{\frac{gx}{L^2}} = \cos h \left(\frac{gh}{L}\right)$$

$$\frac{gx}{L^2} = \log \cos h \left(\frac{gt}{L}\right)$$

$$\therefore x = \frac{L^2}{g} \log \cos h \left(\frac{gt}{L}\right) \quad \ldots \quad \ldots \quad (5)$$

சமன்பாடு (3) இலிருந்து துகளின் எந்த நிலையிலும் அதன் திசை வேகத்தையும், (4) இலிருந்து எந்தக் கணத்திலும் துகளின் திசை வேகத்தையும், (5) இலிந்து எந்தக் கணத்திலும் துகள் சென்றுள்ள தூரத்தையும் பெறலாம். எனவே, சமன்பாடுகள் (3), (4), (5) ஆகியவை துகளின் இயக்கத்தை முழுமையாக நிர்ணயிக்கின்றன.

2. திசைவேகத்தின் வர்க்கத்திற்கேற்ப மாறுகின்ற தடையுடன் கூடிய ஒரு தடை ஊடகத்தில் புவியீர்ப்பின் கீழ் ஒரு துகள் மேல் நோக்கி எறியப்படுகின்றது; அதன் இயக்கத்தை நிர்ணயிக்கவும்.

துகளின் தொடக்கத் திசைவேகம் u என்றும், அது t நேரத்தில் சென்றுள்ள தூரம் x என்றும், அப்போது அதன் திசை வேகம் v என்லும் கொள்க. எனவே, இயக்கத்திற் கெதிரான

தடை முடுக்கம் gv^2 ஆகும். துகளின் பொருண்மை m எனில், கீழ் நோக்கியத் தடை விசை mkv^2 ஆகும். புவியீர்ப்பு முடுக்கம் g யும் கீழ் நோக்கியே செயல்படுமாகையால், துகளின் மீது கீழ் நோக்கிச் செயல்படும் ஈர்ப்பு விசை mg ஆகும். எனவே, துகளின் மீது கீழ்நோக்கிச் செயல்படும் மொத்த விசை $mg + mkv^2$ ஆகும். ஆனால் துகள் மேல் நோக்கிப் போய்க் கொண்டிருப்பதால், துகளின் மீது செயல்படும் மேல் நோக்கிய விசை $- mg - mkv^2$ ஆகும்.

t நேரத்தில் துகள் மேல்நோக்கிச் சென்ற தூரம் x ஆகையால், துகளின் மேல் நோக்கிய முடுக்கம் $\frac{d^2x}{dt^2}$ ஆகும்; எனவே, துகளின் மீது செய்யப்படும் மேல் நோக்கிய விசை $\frac{md^2x}{dt^2}$ ஆகும்.

ஆகவே, துகளின் இயக்கச் சமன்பாடு வருமாறு:

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = - mg - mkv^2$$

அல்லது, $$\frac{d^2x}{dt^2} = - g - kv^2. \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

ஆனால், $$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$$

$$\therefore v\frac{dv}{dx} = - g - kv^2$$

$$= - g \left(1 + \frac{k}{g} v^2\right)$$

இப்பொழுது, L என்பது எல்லைத் திசைவேக மென்று கொண்டு, $\frac{k}{g} = \frac{1}{L^2}$ என்று பிரதியிடுக.

$$\therefore v\frac{dv}{dx} = - g \left(1 + \frac{v^2}{L^2}\right)$$

$$= - g \left(\frac{L^2 + v^2}{L^2}\right) \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

அல்லது, $$\frac{vdv}{L^2 + v^2} = - \frac{g}{L^2} dx,$$

$$\therefore \int \frac{v\,dv}{L^2 + v^2} = \frac{-g}{L^2} \int px\,. + C,$$

$$\tfrac{1}{2}\log(L^2 + v^2) = -\frac{g}{L^2}\,x + C.$$

தொடக்கத்தில், $x = O,\ v = u.$

$$\therefore \tfrac{1}{2}\log(L^2 + u^2) \parallel O = C$$

$$\therefore \tfrac{1}{2}\log(L^2 + v^2) = \frac{-g}{L^2}\,x + \tfrac{1}{2}\log(L^2 + u^2)$$

அல்லது, $\tfrac{1}{2}\log \dfrac{L^2 = v^2}{L^2 + u^2} = \dfrac{-g}{L^2}\,x$

அல்லது, $\dfrac{2gx}{L^2} = \log \dfrac{L^2 + u^2}{L^2 + v^2}$ ... ... (2)

மேலும், $\dfrac{dv}{dt} = v\,\dfrac{dv}{dx}$ ஆகையால் (2) இலிருந்து,

$$\frac{dv}{dt} = -g\left(\frac{L^2 + v^2}{L^2}\right)$$

அல்லது, $\dfrac{-g}{L^2}\,.\,dt = \dfrac{dv}{L^2 + v^2}.$

$$\therefore \frac{-g}{L^2}\int dt = \int \frac{dv}{L^2 + v^2} + C_1$$

$$\frac{-g}{L^2}\,t = \frac{1}{L}\tan^{-1}\frac{v}{L} + C_1$$

தொடக்கத்தில், $t = O,\ v = u\ \therefore C_1 = -\dfrac{1}{L}\tan^{-1}\dfrac{u}{L}.$

$$\therefore \frac{-g}{L^2}\,t = \frac{1}{L}\tan^{-1}\frac{v}{L} - \frac{1}{L}\tan^{-1}\frac{u}{L}$$

$$= \frac{1}{L}\left(\tan^{-1}\frac{v}{L} - \tan^{-1}\frac{u}{L}\right)$$

$$\therefore t = \frac{L}{g}\left(\tan^{-1}\frac{u}{L} - \tan^{-1}\frac{v}{L}\right) \quad \ldots \quad (4)$$

சமன்பாடு (3) துகளின் தூரம், திசை வேகம் ஆகியவற்றிற்கிடையே யுள்ள தொடர்பினையும், சமன்பாடு (4) நேரம், வேகம் ஆகியவற்றிற்கிடையேயுள்ள தொடர்பினையும் தருவ

தால் இச்சமன்பாடுகள் துகளின் இயக்கத்தை நிர்ணயிக் கின்றன.

3. திசை வேகத்தின் n-—வது அடுக்குக் கேற்ப மாறுகின்ற தடையுடன் கூடிய ஒரு தடை ஊடகத்தில் வேறெவ்வித விசைத் தாக்கமின்றி மேல்நோக்கி ஒரு துகள் எறியப்படுகின்றது; அதன் இயக்கத்தை நிர்ணயிக்கவும்.

t நேரத்தில் துகள் செல்லும் தூரம் x எனவும், அப்போது அதன் திசைவேகம் v எனவும் கொள்க. எனவே, தடை முடுக்கம் kv^n ஆகும். துகளின் பொருண்மை m எனில் தடை விசை mkv^n ஆகும்.

துகளின் மேல் நோக்கிய தொடக்கம் u என்க. துகள் மேல் நோக்கிச் செல்வதால், தடை விசை கீழ்நோக்கிச் செயல்படும். t நேரத்தில் மேல்நோக்கிச் செல்லும் தூரம் x ஆகையால் மேல் நோக்கிய முடுக்கம் $\frac{d^2v}{dt^2}$ ஆகும். எனவே, துகளின் மேல் நோக்கிய விசை $m\frac{d^2x}{dt^2}$ ஆகும்.

$$\therefore m\frac{d^2x}{dt^2} = -mkv^n.$$

$$\text{அல்லது,}\quad \frac{d^2x}{dt^2} = -kv^n. \quad \ldots \quad \ldots \qquad (1)$$

$$\text{ஆனல்}\quad \frac{d^2x}{dt^2} = v\frac{dv}{dl}\quad \text{ஆகையால்}$$

$$v\frac{dv}{dx} = -kv^u \quad \ldots \quad \ldots \qquad (2)$$

$$\therefore \frac{vdv}{v^n} = -kdx.$$

$$\text{அதாவது,}\quad \frac{dv}{v^{n-1}} = -k\,dx,$$

$$\text{தொகையீடு காணின்,}\quad \frac{v^{2-n}}{2-n} = -kx + c$$

$$\text{தொடக்கத்தில்,}\quad x = O,\quad v = u \quad \therefore \quad c = \frac{u^{2-n}}{2-n}$$

$$\therefore \quad \frac{v^{2-n}}{2-n} = -kx + \frac{u^{2-n}}{2-n}$$

அல்லது, $v^{2-n} = k(n-2)\,x + u^{2-n}$

$$\frac{1}{v^{n-2}} = (n-2)\,kx + \frac{1}{u^{n-2}}$$

அல்லது,
$$\frac{1}{v^{n-2}} - \frac{1}{u^{n-2}} = (n-2)\,kx \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (3)$$

மேலும், $v\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{dv}{dt}$ ஆகையால், (2) இலிருந்து,

$$\frac{dv}{dt} = -k\,v^n$$

அல்லது,
$$\frac{dv}{v^n} = -k\,dt$$

தொகையீடுகாணின், $\dfrac{v^{1-n}}{1-n} = -kt + c_1$

தொடக்கத்தில், $t = O,\ v = u \quad \therefore \quad c_1 = \dfrac{u^{1-n}}{1-n}$

$$\therefore \quad \frac{v^{1-n}}{1-n} = -kt + \frac{u^{1-n}}{1-n}$$

அல்லது,
$$\frac{1}{v^{n-1}} = (n-1)\,kt + \frac{1}{u^{n-1}}$$

$$\frac{1}{v^{n-1}} - \frac{1}{u^{n-1}} = (n-1)\,kt \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (4)$$

(3), (4) ஆகிய சமன்பாடுகளிலிருந்து v-யை நீக்கி x, t ஆகியவற்றிற்கிடையேயுள்ள தொடர்பைப் பெறலாம். சமன்பாடு (3) இலிருந்து திசைவேகம், தூரம் ஆகியவற்றிற்கிடையேயுள்ள தொடர்பிணையும், சமன்பாடு (4) இலிருந்து திசைவேகம், நேரம் ஆகியவற்றிற்கிடையேயுள்ள தொடர்பிணையும் பெறலாம். எனவே, (3), (4) ஆகிய சமன்பாடுகள் துகளின் இயக்கத்தை நிர்ணயிக்கின்றன.

மாதிரி **60.** ஒரு நேர்கோட்டில் நகர்ந்து கொண்டிருக்கும் ஒரு துகள் அதன் திசைவேகம் v ஆகியிருக்கும்போது kv^3

என்னும் தடைமுடுக்கத்திற்குள்ளாகிறது. நேரம் t-யின்போது அது சென்ற தூரம் x, அதன் திசைவேகம் v எனில்

$$v = \frac{u}{1 + kux}, \quad t = \frac{x}{u} + \frac{1}{2} kx^2,$$

என்று காட்டுக. u என்பது தொடக்க வேகம்.

தீர்வு :

இயக்கச் சமன்பாடு : $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kv^3$ ... ... (1)

அதாவது, $v\dfrac{dv}{dx} = -kv^3$ ... ... (2)

அல்லது, $\dfrac{dv}{v^2} = -kdx$

தொகையீடு காணின், $-\dfrac{1}{v} = -kx + c$.

தொடக்கத்தில், $x = O$, $v = u$ ∴ $c = -\dfrac{1}{u}$

$$\therefore -\frac{1}{v} = -kx - \frac{1}{u}$$

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{u} + kx = \frac{1 + kux}{u}$$

அல்லது, $v = \dfrac{u}{1 + kux}$ ... ... (3)

ஆனால், $v = \dfrac{dx}{dt}$ ஆகையால், (3) இலிருந்து,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{u}{1 + kux}$$

$$\therefore \frac{1}{u}(1 + kux)\,dx = dt.$$

$$\therefore \frac{1}{u}\int (1 + kux)\,dx = \int dt + c_1$$

$$\frac{1}{ku^2}\int (1 + kux)\,d(1 + kux) = t + c_1$$

அல்லது, $\frac{1}{ku^2} \cdot \frac{(1+kux)^2}{2} = t + c_1$

தொடக்கத்தில், $t = O$, $x = O$ $\therefore$ $c_1 = \frac{1}{2\,ku^2}$

$$\therefore \quad \frac{1}{2\,ku^2}(1+kux)^2 = t + \frac{1}{2\,ku^2}$$

$$\therefore \quad t = \frac{1}{2\,ku^2}\left[(1+kux)^2 - 1\right]$$

$$= \frac{1}{2\,ku^2}\left[2\,kux + k^2u^2x^2\right]$$

$$= \frac{x}{u} + \frac{1}{2}kx^2.$$

மாதிரி 61. ஒரு துகள் kv^2 தடை ஊடகத்தில் u திசை வேகத்துடன் மேல்நோக்கி எறியப்படுகிறது. இத்துகள் மீண்டும் எறிபுள்ளிக்கு v_1 திசைவேகத்துடன் திருப்புமெனில்,

$$\frac{1}{v_1^2} = \frac{1}{u^2} + \frac{k}{g}$$

என்று காட்டு.

(சென்னை எம். எஸ்ஸி. 1965, '67)

தீர்வு : t நேரத்தில் துகள் செல்லும் உயரம் x என்க. எனவே, மேல்நோக்கிய முடுக்கம் $\frac{d^2x}{dt^2}$ ஆகும்; துகளின் பொருண்மை m எனில், மேல்நோக்கிய விசை $m\frac{d^2x}{dt^2}$ ஆகும். புவியீர்ப்பு முடுக்கம் gயும், தடைமுடுக்கம் kv^2-ம், கீழ்நோக்கிச் செயல்படுமாகையால், கீழ்நோக்கிய மொத்தத் தடை விசை $mg + mkv^2$ ஆகும். எனவே, இயக்கச் சமன்பாடு வருமாறு :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg - mkv^2.$$

அல்லது, $\frac{d^2x}{dt^2} = -(g + kv^2)$

ஆனல், $\frac{d^2x}{dt^2} = v\frac{dv}{dt}$ ஆகையால்,

$$v \frac{dv}{dx} = -(g + kv^2) \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (1)$$

$$\therefore \quad \frac{v\,dv}{g + kv^2} \quad -dx$$

தொகையீடு காணின், $\frac{1}{2k} \log (g + kv^2) = -x + c)$

தொடக்கத்தில், $x = O, \quad v = u \quad \therefore \quad c = \frac{1}{2k} \log (g + ku^2)$

$$\therefore \quad \frac{1}{2k} \log (g + kv^2) = -x + \frac{1}{2k} \log (g + ku^2)$$

$$\therefore \quad x = \frac{1}{2k} \log \frac{g + ku^2}{g + kv^2} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2)$$

துகள் h உயரத்திற்குச் செல்கிறதெனக் கொள்க.

$$\therefore \quad x = h \text{ எனில்}, \quad v = O.$$

$$\therefore \quad h = \frac{1}{2k} \log \left(\frac{g + ku^2}{g} \right) \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (3)$$

இப்பொழுது, துகள் கீழ்நோக்கித் திரும்புகையில் புவியீர்ப்பு விசை கீழ்நோக்கியும், தடை விசை மேல்நோக்கியும், செயல் படுமாகையால்,

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = mg - mkv^2$$

அல்லது, $v \frac{dv}{dx} = g - kv^2$

$$\frac{v\,dv}{g - kv^2} = dx.$$

தொகையீடு காணின்,

$$-\frac{1}{2k} \log (g - kv^2) = x + c_1$$

கீழே திரும்பும் புள்ளியில் $x = O, \quad v = O$

$$\therefore \quad c_1 = -\frac{1}{2k} \log g$$

$$\therefore \quad -\frac{1}{2k} \log (g - kv^2) = x - \frac{1}{2k} \log g$$

$$\therefore \quad = \frac{1}{2k}\log\frac{g}{g - kv^2} \qquad \dots \qquad \dots \qquad (4)$$

திரும்பும் பாதையில் $x = h$ எனில் துகள் எறிபுள்ளியை வந்தடையும். அப்போது அதன் திசைவேகம் V' என்க.

$$\therefore \quad x = h \text{ எனில்}, \quad v = v'$$

$$\therefore \quad (4) \text{ இலிருந்து}, \quad h = \frac{1}{2k}\log\left(\frac{g}{g - kv_1^2}\right)$$

$$\text{ஆனல் } (3) \text{ இலிருந்து}, \quad h = \frac{1}{2k}\log\left(\frac{g + ku^2}{g}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{g + ku^2}{g} = \frac{g}{g - kv_1^2}$$

$$\text{அல்லது}, \quad (g + ku^2)(g - kv_1^2) = g^2$$

$$g^2 + gk(u^2 - v_1^2) - k^2 u^2 v'^2 = g^2$$

$$gku^2 - gkv_1^2 - k^2 u^2 v^2 = O$$

$$v_1^2 (gk + k^2 u^2) = gku^2$$

$$v_1^2 = \frac{gk\,u^2}{gk + k^2 u^2}$$

$$\text{அல்லது}, \qquad \frac{1}{v_1^2} = \frac{gk + k^2 u^2}{gku^2}$$

$$\text{அதாவது}, \qquad \frac{1}{v_1^2} = \frac{1}{u^2} + \frac{k}{g}$$

மாதிரி 62. திசைவேகத்தின் நான்காவது அடுக்குக்கேற்ப தடைமாறுபடின், ஒரு நிலைக்குத்துக் கோட்டின்மேல் புவியீர்ப்பின் கீழ் இயங்கும்போது மிக உயர்ந்த புள்ளிக்குக் கீழே x ஆழத்தில் பொருண்மை mஇன் ஆற்றல், துகள் மேலே சென்றுகொண்டிருக்கும்போது $E \tan\left(\frac{mg\,x}{E}\right)$ என்றும், கீழே விழுந்துகொண்டிருக்கும்போது $E \tan h\left(\frac{mgx}{E}\right)$ என்று காட்டுக. E என்பது ஊடகத்தின் எல்லை ஆற்றல்.

தீர்வு : மேல்நோக்கி எறியப்பட்ட துகள் h உயரத்திற்குச் செல்வதாகக் கொள்க. மிக உயரத்திலிருந்து கீழே விழும்போது

t நேரத்தில் x தூரம் இறங்கியிருப்பதாகக் கொள்க. துகளின் கீழ்நோக்கிய விசை $m\dfrac{d^2x}{dt^2}$. புவியீர்ப்பு விசை mg கீழ்நோக்கியும், தடைவிசை mkv^4 மேல்நோக்கியும் செயல்படும். எனவே, இயக்கச் சமன்பாடு வருமாறு :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - mkv^4$$

அல்லது, $$\frac{d^2x}{dt^2} = g - kv^4$$

எல்லைத் திசைவேகம் V எனில், $v = V$ ஆகும்போது, $\dfrac{d^2x}{dt^2} = 0$

$$\therefore \quad k = \frac{g}{V^4}$$

$$\therefore \quad \frac{d^2x}{dt^2} = g - \frac{gv^4}{V^4}$$

அதாவது, $$v\frac{dv}{dx} = g\left(1 - \frac{v^4}{V^4}\right)$$

$$= g\left(\frac{V^4 - v^4}{V^4}\right)$$

அல்லது, $$\frac{v\,dv}{V^4 - v^4} = \frac{g}{V^4}\,dx.$$

அதாவது, $$\frac{g}{V^4}\,dx = \frac{vdv}{V^4 - v^4}$$

$$= \frac{1}{2V^2}\left[\frac{1}{V^2 + v^2} + \frac{1}{V^2 - v^2}\right] vdv$$

$$= \frac{1}{2V^2}\left[\frac{vdv}{V^2 + v^2} + \frac{vdv}{V^2 - v^2}\right]$$

$$\therefore \frac{2g}{V^2}\,dx - \frac{vdv}{V^2 + v^8} + \frac{vdv}{V^2 - v^2}$$

தொகையீடுகாணின்,

$$\frac{2g}{V^2}\,x = \tfrac{1}{2}\log(V^2 - v^2) - \tfrac{1}{2}\log(V^2 - v^2) + C$$

$$= \tfrac{1}{2}\log\frac{V^2 + v^2}{V^2 - v^2} + C.$$

தொடக்கத்தில், $x = O, v = O \therefore C = O.$

$$\therefore \frac{2gx}{V^2} = \frac{1}{2} \log \frac{V^2 + v^2}{V^2 - v^2}$$

$$= \tan h^{-1} \left(\frac{v^2}{V^2}\right)$$

$$\therefore \frac{v^2}{V^2} = \tan h \left(\frac{2gx}{V^2}\right)$$

$$v^2 = V^2 \tan h \left(\frac{2gx}{V^2}\right)$$

எல்லைத்திசை வேகம் V ஆகையால் எல்லை ஆற்றல் $E = \frac{1}{2} mV^2$

$$\therefore V^2 = \frac{2E}{m}.$$

$\therefore$ இறங்கும்போது x ஆழத்தில் ஆற்றல் $= \frac{1}{2} mv^2$

$$= \frac{1}{2} mV^2 . \tan h \left(\frac{2gx}{V^2}\right)$$

$$= E \tan h \left(\frac{2gx}{2E/m}\right)$$

$$= E \tan h \left(\frac{mgx}{E}\right)$$

இப்பொழுது, மேல்நோக்கிய இயக்கத்தைக் கருதுக. மேல்நோக்கிய இயக்கச் சமன்பாடு வருமாறு :

t நேரத்தில் சென்ற உயரம் y எனில்,

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -mg - mhv^4.$$

அல்லது, $\frac{d^2y}{dt^2} = -g - kv^4.$ ஆனல், $k = \frac{g}{V^4}$

$$v \frac{dv}{dy} = -g - \frac{gv^4}{V^4}$$

$$= -g \left(1 + \frac{v^4}{V^4}\right)$$

$$= -g\left(\frac{V^4+v^4}{V^4}\right)$$

$$\frac{vdv}{V^4+v^4} = -\frac{g}{V^4}.\,dy$$

$$\frac{2v\,dv}{V^4+v^4} = \frac{-2g}{V^4}\,dy$$

தொகையீடு காணின், $\frac{1}{V^2}\tan^1\left(\frac{v^2}{V^2}\right) = \frac{-2g}{V^2}y + C_1$

தொடக்கவேகம் u எனில், $y = O$ ஆனால், $v - u$ ஆகும்.

$$\therefore \frac{1}{V^2}\tan^1\left(\frac{u^2}{V^2}\right) = C_1.$$

$$\therefore \frac{1}{V^2}\tan^1\left(\frac{v^2}{V^2}\right) = \frac{-2g}{V^4}y + \frac{1}{V^2}\tan^1\left(\frac{u^2}{V^2}\right)$$

$$\therefore \frac{2gy}{V^4} = \frac{1}{V^2}\tan^1\left(\frac{u^2}{V^2}\right) - \frac{1}{V^2}\tan^1\left(\frac{v^2}{V^2}\right)$$

மிக உயர்ந்த புள்ளியில், $y = h$, $v = O$.

$$\therefore \frac{2gh}{V^4} = \frac{1}{V^2}\tan^1\left(\frac{u^2}{V^2}\right)$$

x ஆழத்தில் $y = (h - x)$, $v = v$ எனில்,

$$\therefore \frac{2g\,(h-x)}{V^4} = \frac{1}{V^2}\tan^1\left(\frac{u^2}{V^2}\right) - \frac{1}{V^2}\tan^1\left(\frac{v^2}{V^2}\right)$$

அதாவது, $\frac{2gx}{V^4} - \frac{2gx}{V^4} = \frac{1}{V^2}\tan^4\left(\frac{u^2}{V^2}\right) - \frac{1}{V^2}\tan^1\left(\frac{v^8}{V^2}\right)$

$$= \frac{2gh}{V^4} - \frac{I}{V^2}\tan^1\left(\frac{v^2}{V^2}\right)$$

$$\therefore \frac{2gx}{V^4} = \frac{1}{V^2}\tan^1\left(\frac{v^2}{V^2}\right)$$

அல்லது, $\frac{2gX}{V^2} = \tan^1\left(\frac{v^2}{V^2}\right)$

$$\frac{v^2}{V^2} = \tan\left(\frac{2gx}{V^2}\right)$$

$$v^2 = V^2 \tan\left(\frac{2gx}{V^2}\right)$$

ஆனுல் எல்லே ஆற்றல் $E = \frac{1}{2} mV^2$ அல்லது $V^2 = \frac{2E}{m}$,

ஏறும்போது x ஆழத்தில் ஆற்றல் $= \frac{1}{2} mv^2$

$$= \frac{1}{2} mv^2 \tan\left(\frac{2gx}{V^2}\right)$$

$$= E \tan\left(\frac{2gx}{2E/m}\right)$$

$$= E \tan\left(\frac{mgx}{E}\right).$$

மாதிரி 63. m பொருண்மையுடைய ஒரு துகள் புவியீர்ப்பு விசையின் கீழ்திசை வேகத்தைப் போல் μ மடங்குக்குச் சம மான தடையுடன் கூடிய ஒரு ஊடகத்தின் வழியே விழுந்து கொண்டிருக்கிறது. துகளானது ஓய்விலிருந்து விடப்பட்டிருந் தால் t நேரத்தில் விழுந்த தூரம்.

$$\frac{gm^2}{\eta^2}\left[e^{-\frac{\mu t}{m}} - 1 + \frac{\mu t}{m} \right]$$

என்று காட்டுக.

தீர்வு :

t நேரத்தில் விழுந்த தூரம் x என்றும், திசைவேகம் v என்றும்] கொள்க. துகளின் எடை mg நிலேக்குத்தாகக் கீழ் நோக்கிச் செயல்படும் போது மேல்நோக்கிய தடை μv ஆகை யால் கீழ்நோக்கிய விளைவு விசை $mg - \mu v$ ஆகும்.

$$\therefore m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = mg - \mu v$$

அல்லது, $\frac{d^2x}{dtx} = g - \frac{\mu}{m} v$

அதாவது, $\frac{dv}{dt} = g - \frac{\mu}{m} v.$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\mu}{m} v = g$$

இது ஒரு படிவகைக் கெழுச் சமன்பாடு. இதன் தொகையீட்டுக் காரணி (integrating Factor) $e^{\frac{\mu t}{m}}$ ஆகும். எனவே, இச்சமன் பாட்டின் தீர்வு,

$$v e^{\frac{\mu t}{m}} = \int g e^{\frac{\mu t}{m}} dt + c$$

$$= g \frac{m}{\mu} e^{\frac{\mu t}{m}} + c$$

தொடக்கத்தில், $t = O, \quad v = O. \quad \therefore \quad c = -g \frac{m}{\mu}$

$$\therefore \quad v e^{\frac{\mu t}{m}} = \frac{gm}{\mu} e^{\frac{\mu t}{m}} - \frac{gm}{\mu}$$

$$\therefore \quad v = \frac{gm}{\mu} - \frac{gm}{\mu} e^{-\frac{\mu t}{m}}$$

அதாவது, $$\frac{dx}{dt} = \frac{gm}{\mu} \left[1 - e^{-\frac{\mu t}{m}} \right]$$

$$dx = \frac{gm}{\mu} \left[1 - e^{-\frac{\mu t}{m}} \right] dt$$

தொகையீடு காணின், $$x = \frac{gm}{\mu} \left[t + \frac{m}{\mu} e^{-\frac{\mu t}{m}} \right] + c_1$$

தொடக்கத்தில், $t = O, \quad x = O \quad \therefore \quad c_1 = -\frac{gm^2}{\mu^2}$

$$\therefore \quad x = \frac{gm}{\mu} \left[t + \frac{m}{\mu} e^{-\frac{\mu t}{m}} \right] - \frac{gm^2}{\mu^2}$$

$$= \frac{gm^2}{\mu^2} \left[\frac{\mu}{m} t + e^{-\frac{\mu t}{m}} - 1 \right]$$

$$= \frac{gm^2}{\mu^2} \left[e^{-\frac{\mu t}{m}} - 1 + \frac{\mu t}{m} \right]$$

பயிற்சி 6.

1. ஒரு மனிதன் பாரச்சூட்டின்மூலம் 900 மீட்டர் உயரத்திலிருந்து 150 வினுடிகளில் கீழே இறங்குகிருன். காற்று மண்டலத்தின் தடைவேகத்தின் வர்க்கத்திற்கேற்ப மாறுபடுவதாகக் கொண்டு எல்லைத் திசைவேகம் $600\left(1+\frac{4\log 2}{g}\right)$ செ.மீ./வினுடி (தோராயமாக) என்று காட்டு.

2. திசைவேகத்தின் வர்க்கத்திற்கேற்ப மாறுபடுகின்ற தடையுடன் கூடிய ஒரு ஊடகத்தில் U திசைவேகத்துடன் நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கி எறியப்படுகிறது. V என்பது எல்லைத் திசை வேகமெனில், துகளானது $\frac{V}{g}\left(\tan^{-1}\frac{U}{V}+\tan h^{-1}\frac{v}{V}\right)$ நேரத்திற்குப் பின் $v=\frac{UV}{\sqrt{U^2+V^2}}$ திசைவேகத்துடன் எறிபுள்ளியை வந்தடையும் என்று காட்டு.

3. திசைவேகம் v ஆகியிருக்கும்போது kv^2ஐத் தடையாகக் கொண்ட ஒரு தடை ஊடகத்தில் நிலைக்குத்தாகச் சென்றுகொண்டிருக்கும் ஒரு துகள் ஒரு புள்ளியை மேல்நோக்கியும், கீழ்நோக்கியும் கடந்து செல்லும்போது முறையே V_1, V_2 என்பன அதன் திசைவேகங்களாகும். L என்பது அவ்வூடகத்தில் எல்லைத் திசைவேகமெனில்,

$$\frac{1}{V_2^2}-\frac{1}{V_1^2}=\frac{1}{V^2}$$

என்று காட்டு.

4. தரையில் இறங்கிக் கொண்டிருக்கும் ஒரு விமானம் ஓய்வு முன்னேட்டத்திலிருக்கும்போது v அதன் திசைவேகமெனில் ஒரு அலகுப் பொருண்மைக்கு $a+bv^2$ தனி அலகுகள் (a, b மாறிலிகள்) வீதம் அதன் இயக்கத்திற்குத் தடையேற்படுகிறது. ஒரு குறிப்பிட்ட விமானத்திற்கு $b=10^{-3}$ அடி-ராத்தல் வினுடி அலகுகள், ஓய்வு முன்னேட்ட வேகம் 50 மைல்/மணி, விமானம் ஓய்விற்கு வருமுன் செல்லும் தூரம் 150 கெஜம் என்று தரப்பட்டிருந்தால் $a=3.68$ என்று காட்டுக.

5. திசைவேகம் v எனில் kv^2ஐ (k-மாறுலி)த் தடையாகக் கொண்ட ஒரு தடை ஊடகத்தில் புவியீர்ப்பின் கீழ் ஒரு துகள் நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கி எறியப்படுகிறது. எறிவேகம்

V எனில், $\frac{kV^2}{g}$ இன் வர்க்கம் புறக்கணிக்கப்பட்டால், துகள் செல்லக்கூடிய மிக அதிக உயரம் $\left(\frac{V^2}{2g} - \frac{k\,V^4}{4g^2}\right)$ என்றும், மிக அதிக உயரத்தை அடையும் நேரம் $\left(\frac{V}{g} - \frac{k\,V^2}{3g^2}\right)$ என்றும் காட்டுக.

6. திசைவேகத்தைப்போல் mk மடங்கு தடையேற்படுத்தக்கூடிய காற்று மண்டலத்தில் ஒரு துகள் புவியீர்ப்பின் கீழ் நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கி எறியப்படுகிறது. எல்லைத் திசைவேகம் V என்றும், தொடக்கவேகம் λV என்றும் கொண்டு துகள் செல்லக்கூடிய மிக அதிக உயரம்

$$\frac{V^2}{g}\left[\lambda - \log\,(1 + \lambda)\right]$$

என்று காட்டு.

7. திசைவேகத்தின் வர்க்கத்திற்கேற்ப மாறக்கூடிய தடையுடன் கூடிய ஒரு ஊடகத்தில் ஒரு கனமான துகள் நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கி எறியப்படுகிறது. அதன் மேல்நோக்கிய இயக்கத்தின்போது ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியில் அது K என்னும் இயக்க ஆற்றலைப் பெறுகிறது. அதன் இறக்கப் பாதையில் இயக்க ஆற்றலின் எல்லை K' எனில், அது அதே புள்ளி வழியே இறங்கும்போது அதன் ஆற்றல் இழப்பு $\frac{K^2}{K + K'}$ என்று காட்டு.

8. திசைவேகத்தைப்போல் $gu^{-2}\tan^2\alpha$ (α ஒரு மாறிலி) மடங்கு தடையேற்படுத்தக்கூடிய ஒரு ஊடகத்தில் u திசைவேகத்துடன் ஒரு துகள் மேல்நோக்கி எறியப்படுகிறது. துகளானது எறிபுள்ளிக்கு $u\cos\alpha$ திசைவேகத்துடன் $ug^{-1}\cos\alpha$ $\left(\alpha + \log\frac{\cos\alpha}{1 - \sin\alpha}\right)$ நேரத்திற்குப் பின் திரும்புமென்று காட்டு.

9. திசைவேகத்தின் வர்க்கத்திற்கேற்ப மாறுபடக்கூடிய தடை ஊடகத்தில் m பொருண்மையுள்ள ஒரு துகள் நகர்ந்து கொண்டிருக்கிறது. V என்பது அவ்வூடகத்தின் எல்லைத் திசைவேகம். அத்துகள் நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கி $V\tan\alpha$ திசை

வேகத்துடன் எறியப்பட்டால், அது மீண்டும் எறிபுள்ளியை $V \sin \alpha$ திசைவேகத்துடன் வந்தடையுமென்று காட்டு. அதன் ஏற்றத்தின்போது இயக்க, நிலை ஆற்றல்களின் மொத்த இழப்பு $\frac{1}{2} mV^2 (\tan 2\alpha - 2\log \text{Sec } \alpha)$ என்று காட்டு.

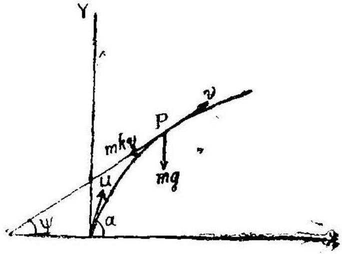
10. வெற்றிடத்தில் ஓய்விலிருந்து கீழே விழுந்து கொண்டிருக்கும் ஒரு துகள் β வினாடிகளில் L திசை வேகத்தைப் பெறுகிறது. திசைவேகத்திற்கேற்ப மாறுகின்ற தடையுடன்கூடிய ஓர் ஊடகத்தின் எல்லைத் திசைவேகம் L எனில், இவ்வூடகத்தில் அத்துகளைக் கீழே விழச் செய்தால், அது எல்லைத் திசை வேகத்தில் பாதியை சுமார் $\frac{7\beta}{10}$ வினாடிகளில் பெறுமென்று காட்டு.

தடை ஊடகத்தில் எரிபொருளின் பாதை
(Trajectory in Resisting Medium)

1. திசைவேகத்தைப்போல் mk மடங்கு தடையுள்ள ஒரு ஊடகத்தில் m பொருண்மையுள்ள ஒரு துகள் கிடைத்தளத்துடன் α கோணச் சாய்வில் u திசைவேகத்துடன் வீசப்படுகிறது. துகளின் இயக்கப் பாதையைக் காண்க.

துகளின் எறிபுள்ளி O-ஐ ஆதியாகவும், O வழியே செல்லும் கிடைக்கோடு, நிலைக்குத்துக்கோடு ஆகியவற்றை முறையே x, y அச்சுக்களாகவும் எடுத்துக் கொள்க.

t என்னும் நேரத்தில் துகளானது அதன் இயக்கப் பாதையில் $P(x, y)$ என்னும் நிலையிலிருப்பதாகக் கொள்க. இயக்கப் பாதைக்கு P-யில் வரையப்படும் தொடுகோடு x-அச்சுடன் Ψ கோணச் சாய்விலிருப்பதாகக் கொள்க. எனவே, P-யில் துகளின் திசைவேகம் v இத்தொடு கோடு வழியாகவும், ஊடகத்தின் தடை mkv இத்தொடு கோட்டின் வழியே எதிர்த் திசையிலும் செயல்படும். மேலும் P-யின் அச்சுத் தூரங்கள் (x, y) ஆகையால், x, y அச்சுக்களின் வழியே துகளின் திசைவேகக் கூறுகள் முறையே $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ என்றும், முடுக்கக் கூறுகள் முறையே $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}$ என்றும் நாமறிவோம்.



படம் 47

XO, *YO* வழியே ஊடகத் தடையின் கூறுகள் முறையே $mkv \cos \Psi$, $mkv \sin \Psi$ ஆகும். *OX*, *OY* திசைகளில் இயக்கச் சமன்பாடுகள் காண்க.

OX வழியே இயக்கச் சமன்பாடு :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -mkv \cos \Psi$$

அல்லது, $\frac{d^2x}{dt^2} = -kv \cos \Psi$

ஆனல், $\cos \Psi = \frac{dx}{ds}$, $v = \frac{ds}{dt}$

S என்பது *t* நேரத்தில் இயக்கப்பாதையில் துகள் சென்றதூரம்

$$\therefore \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -k . \frac{ds}{dt} \frac{dx}{ds}$$

அதாவது, $\frac{d^2x}{dt^2} = -k \frac{dx}{dt}$ ... ... (1)

Oλ வழியே இயக்கச் சமன்பாடு :

துகளின் எடை *mg*யும், தடைக்கூறு $mkv \sin \Psi$-ம் கீழ் நோக்கிச் செயல்படும்போது $m \frac{d^2y}{dt^2}$ மேல்நோக்கிச் செயல்படுவதால்,

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -mg\ mkv \sin \Psi$$

அல்லது, $\frac{d^2y}{dt^2} = -g - kv \sin \Psi$

ஆனல், $\sin \Psi = \frac{dy}{ds}$ ஆகையால், $v \sin \Psi = \frac{ds}{dt} \frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt}$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g - k \frac{dy}{dt} \qquad \dots \qquad \dots \qquad (2)$$

(1) இலிருந்து, $\dfrac{\dfrac{d^2x}{dt^2}}{\dfrac{dx}{dt}} = -k.$

தொகையீடு காணின், $\log \dfrac{dx}{dt} = -kt + c$

தொடக்கத்தில், $t = O$, $\dfrac{dx}{dt}$ = திசைவேகம் u-வின் x அச்சுக் கூறு $= u \cos \alpha$.

$$\therefore \quad c = \log (u \cos \alpha)$$

$$\therefore \quad \log \frac{dx}{dt} = -kt + \log (u \cos \alpha)$$

அல்லது, $\log \left\{ \dfrac{\dfrac{dx}{dt}}{u \cos \alpha} \right\} = -kt$

$$\frac{\dfrac{dx}{dt}}{u \cos \alpha} = e^{-kt}$$

$$\frac{dx}{dt} = u \cos \alpha . \ e^{-kt} \qquad \dots \qquad \dots \qquad (3)$$

(2) இலிருந்து,

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\left(g + k \frac{dy}{dt}\right)$$

$$\frac{\dfrac{d^2y}{dt^2}}{g + k \dfrac{dy}{dt}} = -1$$

$$\frac{\dfrac{1}{k} d\left(g + k \dfrac{dy}{dt}\right)}{\left(g + k \dfrac{dy}{dt}\right)} = -1$$

$$\frac{d\left(g + k \dfrac{dy}{dt}\right)}{g + k \dfrac{dy}{dt}} = -k.$$

தொகையிடுகாணின், $\log\left(g + k\dfrac{dy}{dt}\right) = -kt + c_1$

தொடக்கத்தில், t O, $\dfrac{dy}{dt}$ $= u$-வின் y அச்சுக் கூறு $- u \sin \alpha$.

$$\therefore\ c_1 = \log(g + ku \sin \alpha)$$

$$\therefore\ \log\left(g + k\frac{dy}{dt}\right) = -kt + \log(g + ku \sin \alpha)$$

அல்லது, $\log\left\{\dfrac{g + k\dfrac{dy}{dt}}{g+ku\sin\alpha}\right\} = -kt.$

$$\frac{g + k\dfrac{dy}{dt}}{g + ku \sin \alpha} = e^{-kt}$$

அல்லது, $g + k\dfrac{dy}{dt} = (g + ku \sin \alpha)\, e^{-kt}$ ... ... (4)

(3), (4) ஆகிய சமன்களிலிருந்து t என்னும் நேரத்தில் துகளின் திசைவேகத்தின் கிடைத்தள, நிலைக்குத்துக் கூறுகளைப் பெறலாம். இக்கூறுகளிலிருந்து துகளின் அப்போதைய திசை வேகத்தைக் கணக்கிடலாம்.

(3) இலிருந்து, $dx = u \cos \alpha \cdot e^{-kt}.\, dt$ என்று காணலாம்.

தொகையீடு காண்க. $x = -\dfrac{u \cos \alpha}{k} e^{-kt} + C^2$

தொடக்கத்தில், $t = O$, $x = O$ $\therefore C_2 = \dfrac{u \cos \alpha}{k}$

$$\therefore x - -\frac{u \cos \alpha}{k} e^{-kt} + \frac{u \cos \alpha}{k}$$

அல்லது, $x = \dfrac{u \cos \alpha}{k}(1 - e^{-kt})$ ... ... (5)

(4) இலிருந்து, $g\,dt + k\,dy = (g + hu \sin \alpha)\, e^{-kt}$ என்று காணலாம்.

தொகையீடு காண்க. $gt + ky = -\dfrac{(g + ku \sin \alpha)}{k} e^{-k}$ $+ C_3.$

தொடக்கத்தில், $t = O, y = O \therefore C_3 = \frac{g = ku \sin \alpha}{k}$

$$\therefore gt + kg = -\frac{(g + ku \sin \alpha)}{k} e^{-kt} + \frac{g + ku \sin \alpha}{k}$$

அதாவது, $gt + ky = \left(\frac{g + ku \sin \alpha}{k}\right)(1 - e^{-kt}$ ... (6)

(5), (6) ஆகிய சமன்பாடுகள் t நேரத்தில் துகள் சென்றுள்ள கிடைத்தூரம், நிலைத்தூரம் ஆகியவற்றைத் தருகின்றன. இவ்விரு சமன்பாடுகள் துகளின் இயக்கப்பாதையின் துணையலகுச் சமன்பாடுகள் (Parametric Equation) ஆகும்.

(5) இலிருந்து, $1 - e^{-kt} = \frac{kx}{u \cos \alpha}$

$$\therefore \quad e^{-kt} = \left(1 - \frac{kx}{u \cos \alpha}\right)$$

$$-kt = \log\left(1 - \frac{kx}{u \cos \alpha}\right)$$

$$\therefore t = -\frac{1}{k} \log\left(1 - \frac{kx}{u \cos \alpha}\right)$$

இம்மதிப்புக்களை சமன்பாடு (6) இல் பிரதியிடவும்.

$$-\frac{g}{k} \log\left(1 - \frac{kx}{u \cos \alpha}\right) + ky = \left(\frac{g + ku \sin \alpha}{k}\right)\frac{kx}{u \cos \alpha}$$

$$\therefore ky = \frac{g}{k} \log\left(1 - \frac{kx}{u \cos \alpha}\right) + \frac{x}{u \cos \alpha}(g + ku \sin \alpha$$

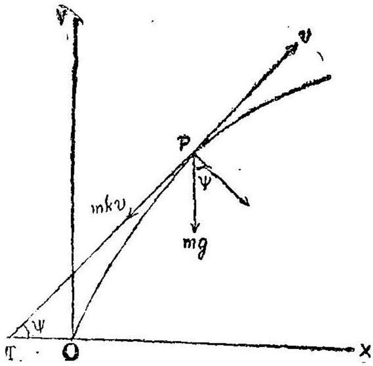
அல்லது, $y = \frac{g}{k^2} \log\left(1 - \frac{kx}{u \cos \alpha}\right) + \frac{x}{ku \cos \alpha}$

$$(g + ku \sin \alpha)$$

இச்சமன்பாடு கொடுக்கப்பட்டுள்ள தடை ஊடகத்தில் துகளின் இயக்கப்பாதையின் சமன்பாடு ஆகும்.

2. திசைவேகத்தின் வர்க்கத்திற் கேற்ப மாறுகின்ற தடையுடன் ஒரு ஊடகத்தில் புவியீர்ப்பின் கீழ் ஒரு துகள் ஒரு குறிப்

பிட்ட திசை வேகத்துடன் வீசப்படுகிறது. துகளின் இயக்கப் பாதையைக் காண்க.



படம் 48

எறிபுள்ளி O வை ஆதியாகவும், O-வழிக் கிடைக் கோடு, நிலைக்குத்துக் கோடு ஆகியவற்றை முறையே x, y அச்சிக்களாகவும் எடுத்துக் கொள்க.

t நேரத்தில் துகளின் நிலை $P(x, y)$ என்று கொள்க. துகளின் இயக்கப் பாதைக்கு P யில் வரையப்படும் தொடு கோடு x-அச்சுடன் Ψ சாய்வி லிருப்பதாகக் கொள்க.

Pயில் துகளின் திசை வேகம் v என்றும், துகளின் பொருண்மை m என்றும் கொண்டால், ஊடகத்தின் தடையாகிய mkv^2 தொடுகோட்டின் வழியே அதன் இயக்கத்திற்கு எதிராகச் செய்யப்படும். இத் தடைவிசையின் கூறுகள் XO, YO ஆகிய திசைகளில் முறையே $mkv^2 \cos\Psi$ $mkv\ \Psi$ ஆகும். துகளின் எடை mg நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கிச் செயல்படும்.

Pயில் துகளின் திசை வேகமாகிய v-யின் கிடைக்கூறு u என்று கொண்டால், OX திசையில் Pயிலுள்ள துகளின் முடுக்கக் கூறு $\frac{du}{dt}$ ஆகும். எனவே, நேரம் t யின் போது OX திசையில் துகளின் மீது செயல்படும் விசைக் கூறு $m\frac{du}{dt}$

$$\therefore m.\frac{du}{dt} = -mkv^2\cos\Psi.$$

அல்லது, $\frac{du}{dt} = -kv^2\cos\Psi.$ ... ... (3)

ஒரு வளைவரையின் மேல் v திசை வேகத்துடன் சென்று கொண்டிருக்கும் ஒரு துகளின் செங்குத்து முடுக்கம் $\frac{v^2}{P}$,

(P என்பது Pயில் வளைவாரை — radius of curvature) என்று நாமறிவோம். ∴ Pயிலுள்ள செங்கோட்டின் வழியே துகளின் விசைக்கூறு $\frac{mv^2}{P}$ ஆகும். இச் செங்கோட்டின் வழியே துகளின் எடைக்கூறு $mg \cos \Psi$ ஆகும்.

$$\therefore \frac{mv^2}{P} = mg \cos \Psi$$

அல்லது, $\frac{v^2}{P} = g \cos \Psi \qquad \dots \qquad \dots \qquad (2)$

இப்பொழுது, v இன் கிடைக்கூறு u என்று வைத்துள்ளோம். ஆனால் v இன் கிடைக்கூறு $v \cos \Psi$ ஆகும். ∴ $v \cos \Psi = u$. மேலும், t நேரத்தில், துகளானது அதன் வளைவரை இயக்கப் பாதையின் வழியே சென்றுள்ள தூரம் S எனில், $v = \frac{dS}{dt}$ ஆகும்.

∴ (1) இலிருந்து, $\frac{du}{dt} = -k . v . v \cos \Psi$

$$= -k . \frac{ns}{dt}$$

அல்லது, $\frac{du}{u} = -k ds.$

தொகையீடுகாணின், $\log u = -ks + C$.

தொடக்கத்தில், $S = O, u = u_0$ என்று கொள்க.

$$\therefore C = \log u_0$$

$$\therefore \log u = -ks + \log u_0.$$

$$\therefore \log \frac{u}{u_0} = -ks$$

$$\frac{u}{u_0} = e^{-ks}$$

$$u = u_0 e^{-k} \qquad \dots \qquad \dots \qquad (3)$$

இப்பொழுது, துகளானது அதன் இயக்கப் பாதையில் நகர்ந்து செல்லச் செல்ல, Ψ இன் மதிப்புக் கொண்டேயிருக்குமாகையால்

$\frac{ds}{d\Psi}$ என்பது ஒரு குறையுஞ் சார்பாகும். ஆனால் $\frac{ds}{d\Psi}$ என்பது வளைவாரை P என்பது நாமறிவோம்.

$$\therefore \quad \frac{ds}{d\Psi} = -P \text{ ஆகும்.}$$

$\therefore$ (2) இலிருந்து, $v\frac{v}{P} = g \cos \Psi$

$$v \frac{ds}{dt} \frac{d\Psi}{ds} = -g \cos \Psi$$

அல்லது,
$$\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{g}{v} \cos \Psi \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

மீண்டும் (1) இலிருந்து,

$$\frac{du}{dt} = -\mathrm{k}v^2 \cos \Psi$$

அதாவது,
$$\frac{du}{d\Psi} \frac{d\Psi}{dt} = -\mathrm{k}v^2 \cos \Psi$$

(4) இலிருந்து பிரதியிடவும்.

$$\frac{du}{d\Psi}\left(-\frac{g}{v} \cos \Psi\right) = -kv^2 \cos \Psi$$

$$\therefore \quad \frac{du}{d\Psi} = \frac{kv^3}{g}$$

ஆனால், $v \cos \Psi u$ ஆகையால், $v = \frac{u}{\cos \Psi}$

$$\therefore \quad \frac{du}{d\Psi} = \frac{k}{g} \frac{u^3}{\cos^3 \Psi}$$

$$= \frac{k}{g} u^3 \operatorname{Sec}^3 \Psi$$

$$\therefore \quad \frac{du}{u^3} = \frac{k}{g} \int \operatorname{Sec}^3 \Psi \, d\Psi$$

தொகையீடு காண்க. $\int \frac{du}{u^3} = \frac{k}{g} \int \operatorname{Sec}^3 \Psi \, d\Psi.$

$$-\frac{1}{2u^2} = \frac{k}{g} \int \operatorname{Sec}^3 \Psi \, d\Psi \quad \ldots \quad (5)$$

இப்பொழுது, $\int \text{Sec}^3\Psi\, d\Psi = \int \text{Sec}\,\Psi . \text{Sec}^2\Psi\, d\Psi$

$$= \int \text{Sec}\Psi\,(1 + \tan^2\Psi)\, d\Psi$$

$$= \int \text{Sec}\,\Psi\, d\Psi + \int \text{Sec}\,\Psi \tan^2\Psi\, d\Psi$$

$$= \log(\text{Sec}\Psi + \tan\Psi) + \int \text{Sec}\,\Psi \tan\Psi \tan\Psi\, d\Psi$$

$$= \log(\text{Sec}\Psi + \tan\Psi) + \int \tan\Psi\, d(\text{Sec}\,\Psi)$$

$$= \log(\text{Sec}\Psi + \tan\Psi) + \text{Sec}\,\Psi \tan\Psi - \int \text{Sec}^3\Psi\, d\Psi;$$

$$\therefore\ 2\int \text{Sec}^3\Psi\, d\Psi = \log(\text{Sec}\Psi + \tan\Psi) + \text{Sec}\Psi \tan\Psi$$

$$\therefore \int \text{Sec}^3\Psi\, d\Psi = \tfrac{1}{2}\log(\text{Sec}\Psi + \tan\Psi) + \frac{\text{Sec}\Psi \tan\Psi}{2}$$

இத் தொகையீட்டு மதிப்பை (5)இல் பிரதியிடவும்.

$$-\frac{1}{2u^2} = \frac{k}{g}\left[\frac{1}{2}\log(\text{Sec}\,\Psi + \tan\Psi) + \frac{\text{Sec}\Psi \tan\Psi}{2}\right] + C_1$$

அல்லது, $\frac{1}{u^2} = -\frac{2k}{g}\left[\frac{1}{2}\log(\text{Sec}\,\Psi + \tan\Psi) + \frac{\text{Sec}\,\Psi \tan\Psi}{2}\right] + C$

ஆனால், (3) இலிருந்து, $u = u_0\, e^{-ks}$ $\therefore \frac{1}{u^2} = \frac{e^{2ks}}{u^2}$

$$\therefore\ \frac{e^{2ks}}{u^2} = -\frac{k}{g}\left[\log(\text{Sec}\Psi + \tan\Psi) + \text{Sec}\Psi \tan\Psi\right] + C$$

இச்சமன்பாடு துகளின் இயக்கப் பாதையின் உள்ளீட்டுச் சமன்பாடு (Intrinsic Equation) ஆகும். தொகையீட்டு மாறிலி Cயின் மதிப்பைத் துகளின் தொடக்க நிலைமைகளிலிருந்து பெறலாம்.

மாதிரி 64. திசைவேகத்திற்கேற்பத் தடை மாறுகின்ற ஒரு தடை ஊடகத்தில் ஒரு துகள் நகர்ந்து கொண்டிருந்தால், x, y—அச்சுக்களைப் பொருத்தமாகக் தெரிவு செய்வதன் மூலம் துகளின் இயக்கப்பாதையை $y + ax = b \log x$ என்றவாறு அமைக்க முடியுமென்று காட்டு.

தீர்வு : mkv தடை ஊடகத்தின் துணையலகுச் சமன்பாடுகள்

$$x = \frac{u \cos \alpha}{k}\left(1 - e^{-ks}\right),$$

$$ky + gt = \frac{g + ku \sin \alpha}{k}\left(1 - e^{-ks}\right)$$

என்றும், இயக்கப்பாதையின் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு

$$y = \frac{g}{k^2} \log \left(1 - \frac{kx}{u \cos x}\right) + \frac{x}{ku \cos\alpha}\left(g + ku \sin \alpha\right)$$

என்றும் கண்டோம். இப்பொழுது, $\left(1 - \frac{kx}{u \cos\alpha}\right. = X$ என்று பிரதியிடுக.

$$\therefore \quad \frac{kx}{u \cos \alpha} = 1 - X$$

$$\frac{x}{u \cos\alpha} = \frac{1 - X}{k}$$

அல்லது, $$\frac{x}{ku \cos \alpha} = \frac{1 - X}{k^2}$$

∴ இயக்கப் பாதையின் சமன்பாடு பின்வரும் வடிவத்தைப் பெறுகிறது.

$$y = \frac{g}{k^2} \log X + \frac{1 - X}{k^2}\left(g + ku \sin \alpha\right)$$

அல்லது, $$y = \frac{g}{k^2} \log X + \frac{g + ku \sin\alpha}{k^2}$$

$$- \frac{(g + ku \sin \alpha)}{k^8} X.$$

$$\therefore \quad y - \frac{(k + ku \sin\alpha)}{k^2} = \frac{k}{k^2} \log X - \frac{(g + ku \sin\alpha)}{k^2} X$$

இப்பொழுது $Y = y - \dfrac{k + ku \sin\alpha)}{k^2}$ என்று பிரதியிடவும்.

$$\therefore \quad Y = \frac{k}{k^2} \log X - \frac{(k + ku \sin\alpha)}{k^2} X$$

அல்லது, $Y + \dfrac{g + ku \sin\alpha}{k^2} X = \dfrac{g}{k^2} \log X.$

இது, $Y + aX = b \log X$ என்னும் அமைப்பிலிருக்கிறது.

மாதிரி 65. *திசை வேகத்தைப் போல் k மடங்குத் தடையுடைய ஓர் ஊடகத்தில் ஓர் அலகு பொருண்மையுள்ள ஒரு துகள் கிடைத்தளத்திற்கு மேல் α கோணச் சாய்வில் u திசை வேகத்துடன் வீசப்படுகிறது. அதை திசையானது கிடைத் தளத்துடன் மீண்டும் α கோணத்தை*

$$\frac{1}{k} \log \left\{ 1 + \frac{2ku}{g} \sin\alpha \right\}$$

என்னும் நேரத்திற்குப்பின் உண்டுபண்ணுமென்று காட்டு.

தீர்வு: துகள் வீசப்பட்ட t நேரத்தில் v திசை வேகத்துடன் (x,y) என்றும் புள்ளியில் அத்துகளிருந்தால், அதன் கிடை, நிலைக்குத்துக் கூறுகள் பின்வரும் தொடர்புகள் மூலம் பெறப்படுகின்றன வென்று கண்டோம்.

$$\frac{dx}{dt} = u \cos\alpha \cdot e^{-kt}, \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$g + k\frac{dy}{dt} = (ku \sin\alpha + g)\, e^{-ks} \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

அதாவது, $\tan\alpha = \left[\dfrac{(ku \sin\alpha + g)\, e^{-kt} - g}{k \cdot u \cos\alpha\; e^{+kt}} \right] \quad \ldots \quad (3)$

தொடக்க எறிகோணம் α; துகனின் திசை கிடையச்சுடன் மீண்டும் α கோணத்தை யுண்டுபண்ண வேண்டுமெனில், x — அச்சுடன் துகளின் திசையின் கோணம் $(\pi - \alpha)$ ஆகும். சமன்பாடு (3) இன் α க்குப்பதிலாக $(\pi - \alpha)$ என்று பிரதியிடவும்.

$$\tan(\pi - \alpha) = \frac{(ku \sin \alpha + g)\, e^{-kt} - g}{kn \cos \alpha\, e^{-kt}}.$$

$$\text{அதாவது,}\; -\tan \alpha = \frac{(ku \sin \alpha + g)\, e^{-kt} - g}{ku \cos \alpha\, e^{-kt}}$$

$$-\tan \alpha\, ku \cos \alpha\, e^{-kt} = (ku \sin \alpha + g)\, e^{-kt} - g$$

$$\text{அல்லது,}\; -ku \sin\alpha\, e^{-kt} = (ku \sin\alpha + g)\, e^{-kt} - g$$

$$\therefore\; e^{-kt}\,(ku \sin\alpha + ku \sin\alpha + g) = g$$

$$e^{-kt}.\,(2\,ku \sin\alpha + g) = g$$

$$2\,ku \sin\alpha + g = g e^{kt}.$$

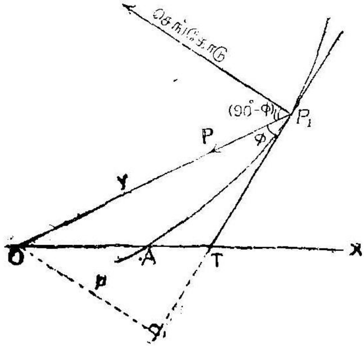
$$e^{kt} = \frac{2ku \sin\alpha + g}{g}$$

$$= \left[1 + \frac{2\,ku \sin\alpha}{g}\right]$$

$$\therefore\; kt = \log\left[1 + \frac{2\,ku \sin\alpha}{g}\right]$$

$$\text{அல்லது,}\; t = \frac{1}{k}\log\left[1 + \frac{2ku \sin\alpha}{g}\right]$$

மாதிரி 66. ஒரு துகள் ஒரு தடை ஊடகத்தினுள் தரப் பட்டுள்ள ஒரு மைய முடுக்கம் P-யுடன் நகர்ந்து செல்கிறது. துகளின் இயக்கப் பாதை தரப்பட்டிருந்தால் ஊடகத்தின் தடை $-\dfrac{1}{2P^2}\dfrac{d}{ds}\left(P^3 \dfrac{dr}{dp} P\right)$ என்று காட்டுக. r என்பது இயக்கப் பாதையில் துகளின் ஆரைத் திசையி ; P என்பது மையத்தி லிருந்து இயக்கப் பாதையில் துகளிருக்கும் புள்ளியில் வரையப் படும் தொடுகோட்டிற்கு வரையப்படும் நேர்குத்துயரம்.



படம் 49

தீர்வு : O என்பது விசை மையம். t நேரத்தில் துகளானது v திசைவேகத்துடன் நிலையானபுள்ளி A-யிலிருந்து s தூரத்தில் P_1 என்னும் நிலையிலிருப்பதாகக் கொள்க. ϕ என்பது திசையி ஆரையாகிய OP_1க்கும், P_1 இலுள்ள தொடுகோட்டிற்கு மிடையே யுள்ள கோணம். $OL = P$ என்பது O-விலிருந்து P_1 இலுள்ள தொடுகோட்டிற்குள்ள செங்குத்துத் தூரம்.

துகளின் தொடுகோட்டு முடுக்கம் $\frac{dv}{dt}$ என்றும், செங் கோட்டு முடுக்கம் $\frac{v^2}{p}$ (P என்பது வளைவரை) என்றும் நாமறிவோம். ஊடகத்தின் தடை R தொடுகோடு வழியே எதிர்த் திசையில் செயல்படும்.

∴ தொடுகோட்டு வழி இயக்கச் சமன்பாடு r

$$\frac{dv}{dt} = -P\cos\phi - R$$

ஆனல் $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds}v$ ஆகையால்,

$$v\frac{dv}{ds} = -P\cos\phi - R \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

செங்கோட்டு (Normal) வழி இயக்கச் சமன்பாடு :

$$\frac{v^2}{p} = p\sin\phi \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

ஆனல், $\cos\phi = \frac{dr}{ds}$, $p = OL = OP\sin\phi$ ஆகையால்,

(1) இலிருந்து, $v\frac{dv}{ds} = -P\frac{dr}{ds} - R$

அல்லது, $\frac{1}{2}\frac{d}{ds}(v^2) = -P\frac{dr}{ds} - R \quad \dots \quad \dots \quad (3)$

(2) இலிருந்து, $\frac{v^2}{P} = P.\frac{P}{r} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (4)$

(3) இலிருந்து, $R = -P\frac{dr}{ds} = \frac{1}{2}\frac{dv^2}{ds}$

$$= -P\frac{dr}{ds} - \frac{1}{2}\frac{ds}{d}\left(\frac{Pp}{r}\right)$$ (4) இலிருந்து,

$$= -P\frac{dr}{ds} - \tfrac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(r\frac{dr}{dp}\frac{Pp}{r}\right)$$

$$\left(\text{ஏனெனில் } P = r\frac{dr}{dp}\right)$$

$$= -P\frac{dr}{ds} - \tfrac{1}{2}\frac{ds}{d}\left(Pp.\frac{dr}{dp}\right)$$

$$= -\frac{1}{2p^2}\left[2P.p^2\frac{dr}{ds} + p^2\frac{d}{ds}\left(Pp\frac{dr}{dp}\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{2p^2}\left[Pp\frac{dr}{dp}2p.\frac{dp}{ds} + p^2\frac{d}{ds}\left(Pp\frac{dr}{dp}\right)\right]$$

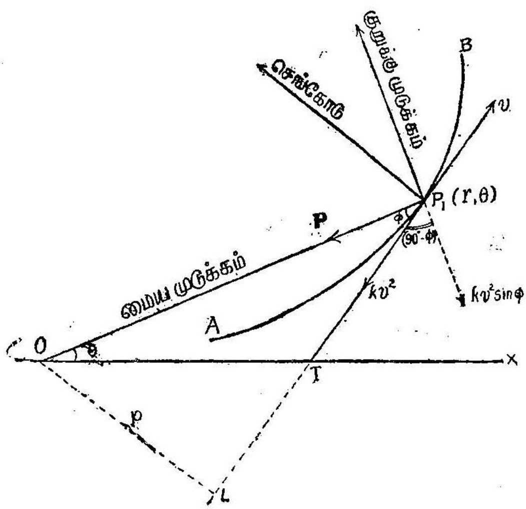
$$= -\frac{1}{2p^2}\left[Pp\frac{dr}{dp}.\frac{d}{ds}(p^2) + p^2\frac{d}{ds}\left(Pp\frac{dr}{dp}\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{2p^2}.\frac{d}{ds}\left(p^2.Pp\frac{dr}{dp}\right)$$

$$= -\frac{1}{2p^3}.\frac{d}{ds}\left(p^3\frac{dr}{dp}.P\right)$$

மாதிரி **67.** k (திசைவேகம்)^2 தடையுடன் கூடிய ஒரு தடை ஊடகத்தில் ஒரு துகள் P என்னும் மைய முடுக்கத்துடன் நகர்ந்து கொண்டிருக்கிறது. வழக்கமான குறியீடுகளின்படி, அத்துகள் இயக்கப் பாதை

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{P}{h^2u^2}.\theta^{2ks} \text{ என்று காட்டு}$$



படம் 50

தீர்வு :

Oஐ விசை மையமாகவும், OXஐ தொடக்கக் கோடாகவும் கொண்டுள்ள இயக்கப்பாதையில் துகள் நகர்ந்து கொண்டிருப்பதாகக் கொள்க. t நேரத்தில் துகள் $P_1\ (r, \theta)$ என்னும் நிலையிலிருப்பதாகக் கொள்க. $P_1 T$ என்பது இயக்கப் பாதைக்கு P_1-இல் வரையப்படும் தொடுகோடு. ϕ என்பது இத்தொடுகோட்டிற்கும் ஆரை OP_1-க்கு மிடையேயுள்ள கோணம். A என்பது இயக்கப் பாதையிலுள்ள ஒரு நிலையான புள்ளி. வளைவுத் தூரம் $AP = S$; P_1 இல் துகளின் வேகம் v_1. இது தொடுகோடு TP_1-இன் வழியே செயல்படும். எனவே, தடை முடுக்கம் kv_1^2 ஆனது $P_1\ T$ வழியே செயல்படும். P என்பது P_1-இல் வளைவாரையெனில், P_1-இல் செங்கோட்டு முடுக்கம் $\frac{v_1^2}{P}$ என்று நாமறிவோம்.

$$\therefore \frac{v_1^2}{P} = P \sin\phi \qquad \ldots \qquad (1)$$

P_1-இல் குறுக்கு முடுக்கம் $\frac{1}{r}\ \frac{d}{dt}\left(r^2\ \frac{d\theta}{dt}\right)$ என்று நாமறிவோம்.

$$\therefore \quad \frac{1}{r} \frac{dt}{d} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = -k\, v_1^2 \sin\phi \qquad \dots \quad (2)$$

ஆனால், $r^2 \dfrac{d\theta}{dt} = v_1 p$ என்றும், $p = r \sin\phi$, $v_1 = \dfrac{ds}{dt}$ என்றும் நாமறிவோம், $r^2 \dfrac{d\theta}{dt} = h_1$ என்று கொள்க. $\therefore \; h_1 = v_1 p$ அல்லது, $v_1 = \dfrac{h_1}{p}$.

$$\therefore \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (h_1) = -k .\, v_1 .\, v_1 \sin\phi$$

$$= -k .\, \frac{h_1}{p} \cdot \frac{ds}{dt} \cdot \frac{p}{r}$$

$$= -\frac{k\, h_1}{p} \frac{ds}{dt}$$

$$\therefore \quad \frac{dh_1}{dt} = -k\, h_1 \frac{ds}{dt}$$

அல்லது, $\dfrac{dh_1}{h_1} = -k\, ds.$

தொகையீடு காணின், $\log h_1 = -ks + c$

தொடக்கத்தில், $s = 0$; $h_1 = h$ என்க. $\therefore \; c = \log h$

$$\therefore \quad \log h_1 = ks + \log h$$

அல்லது $\quad \log \dfrac{h_1}{h} = -ks$

$$\frac{h_1}{h} = e^{-ks}$$

$$h_1 = h\, e^{-ks} \qquad \dots \quad (3)$$

(1)-இலிருந்து, $P = \dfrac{v_1^2}{p \sin\phi}$; (ஆனால் $h_1 = v_1 p$, $p = r \dfrac{dr}{dp}$;

$$\sin\phi = \frac{p}{r}$$

$$\therefore \quad p = \frac{h_1^2 / p^2}{r \dfrac{dr}{dp} \cdot \dfrac{p}{r}}$$

$$= \frac{h_1^2}{p^3 \dfrac{dr}{dp}}$$

$$= \frac{h_1^2}{p^3} \cdot \frac{dp}{dr}$$

$$= \frac{h^2 e^{-2ks}}{p^3} \cdot \frac{dp}{dr} \qquad \ldots (4)$$

மேலும், $\dfrac{1}{p^2} = \dfrac{1}{r^2} + \dfrac{1}{r^4}\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2$ என்று நாமறிவோம்.

இப்பொழுது, $u = \dfrac{1}{r}$ என்று பிரதியிடவும்.

$$\therefore \quad r = \frac{1}{u}$$

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{d\theta}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{p^2} = u^2 = u^4 \cdot \frac{1}{u^4}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2$$

அதாவது $\dfrac{1}{p^2} = u^2 + \left(\dfrac{du}{d\theta}\right)^2$

இச்சமன்பாட்டை θ குறித்த வகையீடு காண்க.

$$\frac{-2}{p^3} \cdot \frac{dp}{d\theta} = 2u \cdot \frac{du}{d\theta} + 2\frac{du}{d\theta} \cdot \frac{d^2u}{d\theta^2}$$

$$\therefore \quad \frac{-1}{p^3} \cdot \frac{dp}{d\theta} = \frac{du}{d\theta}\left[u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right]$$

அல்லது, $-\dfrac{1}{p^3} \cdot \dfrac{dp}{dr} \cdot \dfrac{dr}{d\theta} = \dfrac{du}{dr} \cdot \dfrac{dr}{d\theta}\left[u + \dfrac{d^2u}{d\theta^2}\right]$

$$\therefore -\frac{1}{p^3} \cdot \frac{dp}{dr} = \frac{du}{dr}\left[u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right]$$

ஆனல், $u \equiv \frac{1}{r}$ ஆகையால், $\frac{du}{dr} = -\frac{1}{r^2}$.

$$\therefore -\frac{1}{p^3} \cdot \frac{dp}{dr} = -\frac{1}{r^2}\left[u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right]$$

அல்லது, $\frac{1}{p^3} \cdot \frac{dp}{dr} = \frac{1}{r^2}\left[u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right]$

$$= u^2\left[u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right]$$

$\therefore$ (4) இலிருந்து, $p = h^2 . e^{-2ks} . \frac{1}{p^3} \frac{dp}{dr}$

$$= h^2 e^{-2ks} . u^2 \left[u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right]$$

$$= \frac{h^2 u^2}{e^{2ks}} . \left[u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right]$$

அல்லது, $u + \frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{p}{h^2 u^3} . e^{2ks}$.

பயிற்சி 7

(1) ஒரு அலகுப் பொருண்மையின் மேல் திசை வேகத்தைப் போல் k மடங்கு தடையுண்டு பண்ணக்கூடிய ஓர் ஊடகத்தில் ஒரு புள்ளியிலிருந்து u, v ஆகியவற்றை முறையே கிடை, நிலைக்குத்துக் கூறுகளாகக் கொண்ட திசைவேகத்துடன் ஒரு துகள் வீசியெறியப்படுகிறது. துகளின் இயக்கப் பாதையின் சமன்பாடு.

$$y = \frac{g}{k} \log \left(1 - \frac{kx}{ku}\right) + \frac{x}{ku}(g + kv)$$

என்று நிறுவுக. k மிகவும் சிறியதாகயிருப்பின், கிடைவீச்சு, தோராயமாக $\frac{2uv}{g} - \frac{8uv^2}{3g^2} k$ என்று காட்டு.

(2) ஊடகத்தின் தடை திசைவேகத்திற்கேற்ப மாறுபடுவதாகவும், எறிபுள்ளி வழியே செல்லும் கிடைத்தளத்தில் வீச்சு மீப்பெரிதாகவுமிருந்தால், எறிவேகத்திற்கும் எல்லை வேகத்திற்குமுள்ள விகிதம் λ எனில் நிலைக்குத்துடன் எறியப்பட்ட திசையின் சாய்வுக்கோணம் α என்பது

$$\frac{\lambda (1 + \lambda \cos \alpha)}{\lambda + \cos \alpha} = \log (1 + \lambda \sec \alpha)$$

என்ற தொடர்பின் மூலம் தரப்படுமென்று காட்டு.

(3) ஒரு தடை ஊடகத்தில் எறிபொருளின் கிடைத்தூரம் நேரத்துடன் $x = f(t)$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலம் இணைக்கப் பட்டிருந்தால் எறிபொருளின் பாதையின் சமன்பாடு

$$y = -g f(t) \int \frac{1}{f^1(t)} dt + g \int \frac{f(t)}{f^1(t)} dt + A f(t) + B,$$

A, B என்பன மாறிலிகள், என்று காட்டு.

$t = a x + bx^2$ எனில், எறிபொருளின் பாதையின் சமன் பாடு $y = x \tan \alpha - g (\frac{1}{2} a^2 x^2 + \frac{2}{3} ab x^3 + \frac{1}{3} b^2 x^4)$ என்று காட்டு.

(4) திசை வேகத்திற்கேற்ப மாறுபடுகின்ற ஓர் ஊட கத்தில் புவியீர்ப்பின் செயல்பாட்டின் கீழ் ஒரு துகள் வீசி யெறியப்படுகிறது. அதன் முடுக்கம் ஒரு நிலையான திசையைக் கொண்டிருக்குமென்றும். அதன் அளவு குறைந்து கொண்டே சென்று பூச்சியத்தை அடையுமென்றும் நிறுவுக.

(5) ஒரு ஊடகத்தின் தடை துகளின் வேகத்தின் நான்காவது அடுக்குக்கு விகித சமமானல், எறிபொருளின் பாதையின் வகைக் கெழுச் சமன்மாடு.

$$\frac{d^3y}{dx^3} = k \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}$$

என்று நிறுவுக.

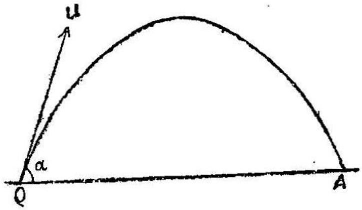
4. எறிபொருட்கள்

(Projectiles)

நாம் இதுவரை துகள்களின் நேர்கோட்டியக்கம் பற்றி விரிவாக ஆராய்ந்தோம். ஒரு நேர்கோட்டின் மேல் இயங்கிக் கொண்டிருக்கும் ஒரு துகளின் முடுக்கம் அந்த நேர்கோட்டின் வழியே அதன் இயக்கத்திசையில் செயல்படுமென்று கண்டோம். ஆனால் இயக்கத்திலிருக்கும் ஒரு துகளின் பாதை ஒரு நேர்கோடாக இல்லாமல் ஒரு வளைவரையாகயிருக்குமேயானால் துகளின் முடுக்கம் அத்துகளின் இயக்கத்திசையின் வழியே செயல்படாது. கிடை மட்டத்துடன் ஏதோவொரு கோணச் சாய்வில் உயரே எறியப்படும் பந்து ஒரு நேர்கோட்டுப் பாதையில் செல்லாமல் ஒரு வளைவுப் பாதையில் சென்று மீண்டும் தரையில் வந்து விழுவதை நாம் யாவரும் அறிவோம். இப்பந்தின் மீது இரு விசைகள் செயல்படுகின்றன. ஒன்று நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கிச் செயல்படும் பந்தின் எடை; மற்றது, பந்தின் இயக்கத்திற் கெதிராகச் செயல்படும் காற்றின் தடை, இவ்வாறு மேல்நோக்கி எறியப்படும் துகள்களின் இயக்கம் பற்றி இருதற்கோள்களின் அடிப்படையில் இங்கு ஆராய்வோம். ஒரு பொருளின்மீது செயல்படும் புவியீர்ப்பு முடுக்கம் பூமியின் மையத்திலிருந்து அதன் தூரத்திற்கேற்ப மாறுபடுகிறதென்று கண்டோம். ஆகவே, தரைமட்டத்திற்கு மேல் விண்ணில் எறியப்படும் ஒரு பொருளின் மீது செயல்படும் ஈர்ப்பு முடுக்கம் அதன் உயரத்திற்கேற்ப சிறிதளவு மாறுபடலாம். ஆனால், விண்ணில் எறியப்படுகின்ற ஒரு பொருளின்மீது செயல்படும் ஈர்ப்பு முடுக்கம் இதன் இயக்கம் முழுவதிலும் ஒரே அளவில் மாறிலியாக ஏற்றுக் கொள்ளத்தக்க அளவிலான உயரத்திற்குள்ளேயே எறிபொருளின் இயக்கப்பாதை அமைவதாக இங்கு கருதப்படுகிறது. இரண்டாவதாக, தரைமட்டத்திற்கு மேல் காற்று மண்டலம் இருப்பதால் அம்மண்டலத்தில் எறியப்படும் பொருளின் இயக்கம் காற்றினுலேற்படும் தடையினுல் பாதிக்கப்படும். இவ்வாறு பொருட்களின் இயக்கத்திற் கெதிராகச் செயல்படும் காற்றுமண்டலத்தின் தடையானது பொருட்களின் வேகங்களுக் கேற்ப மாறுபடுமென்றும், வெவ்

வேறு வேகங்களில் வெவ்வேறு விதிகட்குட்பட்டிருக்கு மென்றும் காணப்பட்டுள்ளது. பொருட்களின் இயக்கத்திற் கெதிரான தடையை யுண்டுபண்ணக்கூடிய தடை ஊடகங்கள் வழியே செல்லும் பொருட்களின் இயக்கம் பற்றி பிறிதோர் அத்தியாயத்தில் (தடை ஊடகத்தில் இயக்கம்) விரிவாக விவரிக்கப்பட்டுள்ளது. எனவே, காற்றினாலேற்படும் தடையைப் புறக்கணித்துவிட்டு, மேலே எறியப்படும் பொருட்கள் யாவும் தங்கள் இயக்கத்திற்கெதிரான தடையேதுமில்லாத வெற்றிடத்தில் இயங்குவதாக இவ் வத்தியாயம் முழுவதும் ஏற்றுக் கொள்ளப்படுகிறது.

சில வரையறைகள்:



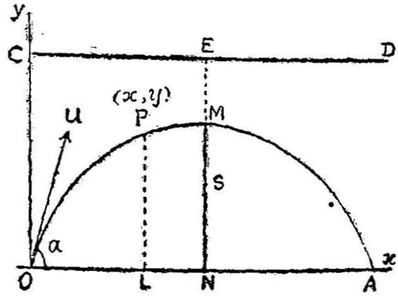
படம் 51

O என்னும் புள்ளியிலிருந்து கிடைத்தளத்துடன் α கோணச் சாய்வில் u திசைவேகத்துடன் ஒரு துகள் மேலே வீசி எறியப்படுவதாகக் கொள்வோம். மேலே எறியப்படும் அத் துகளுக்கு எறிபொருள் (Projectile) என்று பெயர், எந்தப்புள்ளியிலிருந்து அத்துகள் எறியப்படுகின்றதோ அந்தப் புள்ளி (O)க்கு ''எறிபுள்ளி'' (Point of Projection) என்று பெயர். எறிபொருள் எறியப்படும் திசைவேகமாகிய u-வுக்கு எறிவேகம் (velocity of Projection) என்று பெயர். பொருள் எறியப்படும் திசைக்கு ''எறிதிசை'' (direction of projection) என்று பெயர். எறிபொருளின் எறிதிசைக்கும், எறிபுள்ளி வழியே செல்லும் கிடைத்தளத்திற்கு மிடையேயுள்ள கோணம் ''எறிகோணம்'' (Angle of projection) எனப்படும். எறிபொருள் செல்லும் பாதைக்கு ''எறிபொருள் பாதை'' (trajectory) என்று பெயர். எறிபுள்ளிக்கும், எறிபுள்ளி வழியே செல்லும் ஏதேனுமொரு தளத்தை எறிபொருளின் பாதை சந்திக்கின்ற புள்ளிக்குமிடையேயுள்ள தூரத்திற்கு அத்தளத்தின் மேல் அப்பொருளின் வீச்சு (Range) என்று பெயர். குறிப்பாக, எறிபுள்ளிக்கும் எறிபுள்ளி வழிக் கிடைத்தளத்தை எறிபொருளின் பாதை சந்திக்கின்ற புள்ளிக்கு மிடையேயுள்ள தூரத்திற்கு ''கிடை வீச்சு'' (Horizontal Range) என்று பெயர். எறிபுள்ளியிலிருந்து, எறிபுள்ளி வழிக்கிடைத்தளத்தை மீண்டும் வந்தடைய எறிபொருள் எடுத்துக் கொள்ளும் நேரத்திற்கு ''பறப்பு நேரம்'' (Time of flight) என்று பெயர்,

எறிவேகம் u கிடைத்தளத்துடன் α கோணச் சாய்விலிருப்பதால் எறிவேகத்தின் கிடைத்தள, நிலைக்குத்துக் கூறுகள் முறையே $u \cos \alpha$, $u \sin \alpha$ ஆகும். காற்றின் தடையைப் புறக்கணித்துவிட்டால், எறிபொருளின் மீது செயல்படும் விசை அதன் எடையாகிய mg ஒன்றேயாகும். இது நிலைக்குத்தாகக் கீழ் நோக்கிச் செயல்படுவதால், எறிபொருளுக்கு g என்னும் கீழ் நோக்கிய முடுக்கத்தைக் கொடுக்கிறது. ஆகவே, எறிவேகத்தின் நிலைக்குத்துக் கூருகிய $u \sin \alpha$ என்பது g என்னும் எதிர் முடுக்கத்திற்குள்ளாகிறது. ஆனல், கிடைத்தளக் கூருகிய $u \cos \alpha$ என்பது எவ்வித முடுக்கம் அல்லது எதிர்முருக்கத்திற்கு முள்ளாகாமல் இயக்க முழுமையும் மாருமலிருக்கும். இவ்விரு கருத்துக்களும் வெற்றிடத்தில் எறியப்படும் ஒரு எறிபொருளின் இயக்கம் பற்றிய ஆய்விற்கு இன்றியமையாத அடிப்படைக் கொள்கைகளாகும்.

1. எறிபொருளின் பாதை ஒரு பரவளைவு

O என்னும் புள்ளியிலிருந்து, கிடைத்தளத்துடன் α கோணச் சாய்வில். u திசை வேகத்துடன் ஒரு எறிபொருள் வீசப்படுவதாகக் கொள்க. O ஐ ஆதியாகவும், O வழிக் கிடைத்தளத்தை x — அச்சாகவும், O வழி நிலைக்குத்தை y — அச்சாகவும் எடுத்துக்கொள்க.



படம் 52

எறிவேகம் u-வின் கிடைத்தளக் கூருகிய $u \cos \alpha$ என்பது இயக்கம் முழுவதும் மாறிலியாகயிருக்கும். ஆனல் நிலைக்குத்துக் கூருகிய $u \sin \alpha$ என்பது g என்னும் எதிர் முடுக்கத்திற்குள்ளாகிறது.

$P(x, y)$ என்பது t நேரத்தில் துகளின் நிலை என்று கொள்க. $PL \perp Ox$ வரைக.

$\therefore x = OL = u \cos \alpha$ எனும் மாரு வேகத்துடன் t நேரத்தில் துகள் சென்றுள்ள கிடைத்தளத் தூரம்

அதாவது, $x = u \cos \alpha \,.\, t$ ... ... (1)

$y = PL = u \sin \alpha$ எனும் தொடக்க நிலைக்குத்து வேகத்துடனும் g எதிர்முடுக்கத்துடனும் t நேரத்தில் துகள் சென்றுள்ள நிலைக்குத்துத் தூரம்

அதாவது, $y = (u \sin \alpha)\, t - \frac{1}{2} g t^2$ ... ... (2)

(1) இலிருந்து பெறும் $t = \dfrac{x}{u \cos \alpha}$-ஐ (2)-இல் பிரதியிடவும்.

$$y = u \sin \alpha \frac{x}{u \cos \alpha} - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{u^2 \cos^2 \alpha}$$

அதாவது, $y = x \tan \alpha - \dfrac{g x^2}{2u^2 \cos^2 \alpha}$ ... ... (3)

இச்சமன்பாட்டை $\dfrac{2u^2 \cos^2 \alpha}{g}$ ஆல் பெருக்குக.

$$\therefore \quad \frac{2u^2 \cos^2 \alpha}{g} y = x \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \frac{2u^2 \cos^2 \alpha}{g} - x^2$$

அல்லது, $x^2 - \dfrac{2u^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} x = - \dfrac{2u^2 \cos^2 \alpha}{g} y$

$$\therefore \left(x - \frac{u^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}\right)^2 = - \frac{2u^2 \cos^2 \alpha}{g}$$

$$y + \frac{u^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{g^2}$$

$$= - \frac{2u^2 \cos^2 \alpha}{g} \left(y - \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g}\right) \quad \ldots \quad (4)$$

இப்பொழுது $\left(\dfrac{u^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}, \dfrac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g}\right)$ என்ற புள்ளிக்கு ஆதியை மாற்றிப் புதிய அச்சுத் தூரங்களை X, Y என்று குறிப்பிடுக. $\dfrac{2u^2 \cos^2 \alpha}{g} = 4a$ என்று குறிப்பிடப்பட்டால், (4) பின்வருமாறு மாறுகிறது.

$$X^2 = -4aY$$

இச்சமன்பாடு, கீழ்நோக்கிய அச்சைக் கொண்ட ஓர் பரவளைவைக் குறிக்கும். இப்பரவளைவின் உச்சி $X = O$, $Y = O$ ஆகும்.

அதாவது பரவளைவின் உச்சி $\left(\frac{u^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}, \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g}\right)$ ஆகும்.

அதன் செவ்வகலம் (latus rectum) $\frac{2u^2 \cos^2 \alpha}{g}$ ஆகும்.

அதன் குவியம் (Focus) அதன் உச்சியிலிருந்து நிலைக்குத்தாகக் கீழே $a = \frac{u^2 \cos^2 \alpha}{2g}$ ஆழத்திலிருக்கும். ஆகவே,

$$\text{குவியம் } S = \left(\frac{u^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}, \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g} - \frac{u^2 \cos^2 \alpha}{2g}\right)$$

$$= \left(\frac{u^2 \sin 2\alpha}{2g}, -\frac{u^2 \cos 2\alpha}{2g}\right) \quad \dots \quad \dots \quad (5)$$

பரவளைவின் இயக்குவரை (Directrix) அதன் உச்சிமேலே a உயரத்திலுள்ள ஓர் கிடைக்கோடு. ஆகவே, எறிபுள்ளி O வழியே செல்லும் கிடைகோட்டிற்கு (x-அச்சுக்கு) மேலே இயக்கு வரையின் உயரம்

$$= \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g} + a$$

$$= \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g} + \frac{u^2 \cos^2 \alpha}{2g}$$

$$= \frac{u^2}{2g}$$

எனவே, இயக்கு வரையின் சமன்பாடு $y = \frac{u^2}{2g}$ ஆகும் ... (6)

இயக்குவரையானது எறிவேகம் u-ஐ மட்டுமே சார்ந்திருப் பதையும், எறிகோணம் α-ஐச் சார்ந்திருப்பதையும் கவனிக்க வும்.

எறிபொருளின் மீப்பெரு உயரம் (Greatest Height attained by the Projectile)

பரவளையின் உச்சியில்தான் கிடைத்தளத்திற்குமேல் எறி பொருளின் உயரம் மீப்பெரிதாகயிருக்குமாகையால், உச்சியின்

நிலைக்குத்துயரமே எறிபொருளடையும் மீப்பெரு உயரமாகும். எனவே, எறிபொருளடையும் மீப்பெரு உயரம்

$$= \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g} \quad \ldots \quad \ldots \quad (7)$$

எறிபொருளின் பறப்பு நேரம் (Time of Flight of the Projectile)

எறிபொருளின் பறப்பு நேரம் என்பது பொருள் எறியப்பட்ட கணத்திலிருந்து எறிபுள்ளி வழிக்கிடைக் கோட்டை அது மீண்டும் தந்தடையும் கணம் வரையுள்ள கால இடைவெளியாகும்.

இப்பொழுது, $y = (u \sin \alpha)\ t - \frac{1}{2} gt^2$ என்னும் சமன்பாடு (2)-இல் $y = O$ என்று பிரதியிட்டு இவ்விரு கணங்களையும் பெறலாம்.

$$\therefore \quad (u \sin \alpha)\ t - \tfrac{1}{2} gt^2 = O$$

$$t\ [\ u \sin \alpha - \tfrac{1}{2} gt] = O$$

$$\therefore \quad t = O \text{ அல்லது } t = \frac{2u \sin \alpha}{g}$$

$t = O$ என்பது பொருள் எறியப்பட்ட நேரம்.

$t = \frac{2u \sin \alpha}{g}$ என்பது பொருள் எறிபுள்ளி வழிக் கிடைக் கோட்டை மீண்டும் வந்தடையும் நேரம்.

எனவே, பறப்பு நேரம் $T \ \frac{2u \sin \alpha}{g}$ என்று காணலாம் ... (8)

எறிபொருளின் கிடைவீச்சு (Horizontal Range of the Projectile)

கிடைவீச்சு என்பது எறிபுள்ளியிலிருந்து எறிபொருள் எறிபுள்ளி வழிக்கிடைக் கோட்டை மீண்டும் வந்தடையும் புள்ளி வரையுள்ள கிடைத் தூரமாகும். இக் கிடைத்தூரமானது $u \cos \alpha$ எனும் மாறுக் கிடைவேகத்துடன் எறிபொருளானது $T = \frac{2u \sin \alpha}{g}$ எனும் பறப்பு நேரத்தில் செல்லும் தூரமாகுமாகையால்

$$கிடைவீச்சு\ R = (u \cos \alpha)\, T$$

$$= u \cos \alpha \frac{2u \sin \alpha}{g}$$

$$= \frac{2u^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$$

$$= \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (9)$$

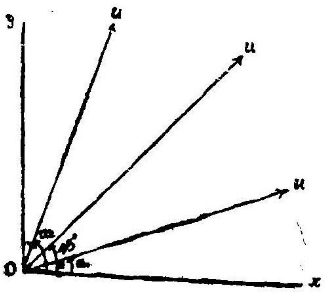
மீப்பெரு கிடைவீச்சு (Maximum Horizontal Range)

$R = \dfrac{u^2 \sin 2\alpha}{g}$ ஆகையால் ஒரு குறிப்பிட்ட திசைவேகத்துடன் எறியப்படும் ஒரு பொருள் எதிர் மீப்பெரு கிடைவீச்சில் போய்விழ வேண்டுமாயின் sin 2α-இன் மதிப்பு மீப்பெரிதாகயிருக்க வேண்டும்.

$$\therefore \quad \sin 2\alpha = 1 \quad அல்லது\ \alpha = \pi/4.$$

$$\therefore \quad மீப்பெரு\ கிடைவீச்சு = \frac{u^2}{g}$$

அதாவது கிடைத்தளத்துடன் 45° சாய்வில் எறியப்படும் ஒரு எறிபொருளின் கிடைவீச்சு மீப்பெரிதாயிருக்கும்.



படம் 53

ஒரு குறிப்பிட்ட கிடைவீச்சுக்குரிய எறிகோணம்

u எனும் எறிவேகத்துடன் எறியப்படும் ஒரு எறி பொருள் அடையும் கிடைவீச்சு R என்று கொள்க. எறிகோணம் α எனில்,

$$R = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g}$$

என்று அறிவோம்.

$$\therefore \quad \sin 2\alpha = \frac{gR}{u^2}$$

இச்சமன்பாட்டிலிருந்து எறிகோணம் α-இன் மதிப்பைப் பெறலாம்.

இப்பொழுது, $\sin 2\alpha = \sin (180° - 2\alpha)$ ஆகையால், $0 < \alpha < 90°$ எனில் மேற்கூறப்பட்ட சமன்பாட்டிலிருந்து

$$\sin 2\alpha_1 = \frac{gR}{u^2},$$

அல்லது, $\sin (180 - 2\alpha_1) = \frac{gR}{u^2}$

எனறவாறு α-க்கு இரு மதிப்புக்களைப் பெறலாம். அதாவது, $180° - 2\alpha_1 = 2\alpha_2$ எனில், α_1, α_2 என்பன u எனும் எறிவேகத்துடன் R எனும் கிடைவீச்சை அடையக்கூடிய இரு எறி கோணங்களாகும்.

$$180° - 2\alpha_1 = 2\alpha_2 \text{ ஆகையால்,}$$

$$2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 180°$$

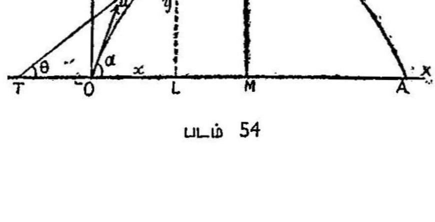
அல்லது, $\alpha^1 + \alpha_2 = 90°$

$\alpha_2 > \alpha_1$ எனில், $45° - \alpha_1 = \alpha_2 - 45°$ ஆகும்.

ஆனல் 45° எறிகோணமென்பது மீப்பெரு கிடை வீச்சை அளிக்கக்கூடிய எறிகோணமாகையால், ஒரு குறிப்பிட்ட எறி வேகத்துடன் எறியப்படும் எறிபொருளுக்கு ஒரு குறிப்பிட்ட கிடைவீச்சைத் தரவல்ல இரு எறிகோணங்கள் உள்ளன என்றும், அவற்றுள் ஒன்று 45°-ஐவிடக் குறைவாகவும், மற்றது 45°-ஐ அதிகமாகவுமிருக்மென்றறிகிரோம். மேலும், இவ்விரு எறிதிசைகளும் மீப்பெரு கிடைவீச்சைத் தரவல்ல எறிதிசையுடன் சம அளவில் சாய்ந்திருக்குமென்றும் காண்கிரோம்.

t நேரத்தில் எறிபொருளின் நிலையும், வேகமும்

O என்னும் எறிபுள்ளியிலிருந்து ஒரு எறிபொருள் u எனும் எறிவேகத்துடன் α எனும் எறிகோணத்தில் எறியப்படுவதாகக் கொள்க. t நேரத்தில் அதன் நிலை $P(x, y)$ என்றும் அதன் வேகம் V என்றும் கொள்க.



படம் 54

எறிபொருளின் தொடக்கக் கிடைவேகம் $u \cos \alpha$ என்றும், தொடக்க நிலைக்குத்துவேகம் $u \sin \alpha$ என்றும் நாமறிவோம். மேலும், தொடக்கக் கிடைவேகம் $u \cos \alpha$ இயக்கம் முழுவதும் மாறிலியாகயிருக்குமென்பதும், நிலைக்குத்துவேகம் $u \sin \alpha$ ஆனது g என்னும் எதிர்முடுக்கத்திற் குள்ளாகுமென்பதும் தெரிந்ததே. ஆகவே,

$x = t$ நேரத்தில் $u \cos \alpha$ என்னும் மாறாவேகத்துடன் சென்ற கிடைத்தூரம்

$= u \cos \alpha . t$

$y = t$ நேரத்தில் $u \sin \alpha$ எனும் தொடக்க நிலைக்குத்து வேகத்துடனும் g எனும் எதிர்முடுக்கத்துடனும் சென்ற நிலைக்குத்துத் தூரம்

$= u \sin \alpha . t - \frac{1}{2} gt_2$

$\therefore$ t நேரத்தில் எறிபொருளின் நிலை $= P \; [ut \cos \alpha, \; ut \sin \alpha \; \frac{1}{2} gt^2]$

இப்பொழுது, V என்பது t நேரத்தில் எறிபொருளின் திசைவேகமெனில், V-ஆனது எறிபொருளின் இயக்கப் பாதைக்கு அதன் நிலை P-யில் வரையப்படும் தொடுகோடு வழியே செயல்படும். இத்தொடு கிடைக்கோட்டுடன் θ கோணச் சாய்விலிருந்தால், இத் திசைவேகம் V-இன் கிடை, நிலைக்குத்துக் கூறுகள் முறையே $V \cos \theta$, $V \sin \theta$ ஆகும்.

கிடைவேகம் மாறாதிருக்குமாகையால்,

$$V \cos \theta = u \cos \alpha \qquad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

ஆனால் நிலைக்குத்துவேகம் $u \sin \alpha$ என்பது g எனும் எதிர்முடுக்கத்திற்குள்ளாவதால், $v = u + at$ எனும் சூத்திரத்திலிருந்து,

$$V \sin \theta = u \sin \alpha - gt \qquad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

(1), (2) ஆகிய சமன்பாடுகளின் வர்க்கங்களைக் கூட்டுக.

$$V^2 = u^2 \cos^2 \alpha + u^2 \sin^2 \alpha + g^2t^2 - 2ut \, g\sin \alpha$$

$$= u^2 + g^2t^2 - 2ugt \sin \alpha$$

$$\alpha \quad V = \sqrt{u^2 + g^2t^2 - 2ugt \sin \alpha} \qquad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

(2)-ஐ (1)ஆல் வகுக்கவும்

$$\frac{V \sin \theta}{V \cos \theta} = \frac{u \sin \alpha - gt}{u \cos \alpha}$$

அதாவது, $\tan \theta = \dfrac{u \sin \alpha - gt}{u \cos \alpha}$ ... ... (4)

(3), (4) ஆகிய தொடர்புகளிலிருந்து t நேரத்தில் எறிபொருளின் திசைவேகத்தின் அளவு, திசை ஆகியவற்றைப் பெறலாம்.

குறிப்பு 1. பறப்பு நேரம் $T = \dfrac{2u \sin \alpha}{g}$ ஆகையால், சமன்பாடு (4)-இல் $t = \dfrac{2u \sin \alpha}{g}$ என்று பிரதியிட

$$\tan \theta = \frac{u \sin \alpha - 2u \sin \alpha}{u \cos \alpha} = -\tan \alpha$$

அல்லது $\alpha = -\theta$

என்று காண்கிறோம். எனவே, எறிபொருளானது கிடைத்தளத்துடன் எந்த கோணத்தில் எறியப்பட்டதோ அதே கோணத்தில் கிடைத்தளத்தின்மீது வந்துவிழும்.

குறிப்பு 2. சமன்பாடு (3)-ஐ ஆற்றல் தத்துவத்தைப் பயன்படுத்தியும் பெறலாம். எவ்வாறெனில், பொருளின் பொருண்மை m எனில், t நேரத்தில் பொருளின் இயக்க ஆற்றலில் ஏற்பட்டுள்ள மாறுபாடு $\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mu^2$ ஆகும். இவ்வியக்க ஆற்றல் மாறுபாடானது புவியீர்ப்பை எதிர்த்துச் செய்யப்பட்ட வேலைக்குச் சமமாகும். ஆகவே, y என்பது t நேரத்தில் எறிபொருள் சென்றுள்ள நிலைக்குத்துயரமெனில், புவீயீர்ப்பை எதிர்த்து t நேரத்தில் செய்யப்பட்ட வேலை $-mgy$ ஆகும்.

ஆனால், $y = (u \sin \alpha) t - \frac{1}{2} gt^2$ ஆகும்.

$$\therefore \quad mg\,y = mg\,[ut \sin \alpha - \tfrac{1}{2} gt^2]$$

ஆற்றல் தத்துவத்தின்படி,

$$\tfrac{1}{2} m V^2 - \tfrac{1}{2} mu^2 = -mgy$$

$$= -mg\,(ut \sin \alpha - \tfrac{1}{2} gt^2)$$

$$\therefore \quad V^2 - u^2 = -2ugt \sin \alpha + g^2 t^2$$

அல்லது, $V^2 = u^2 + g^2t^2 - 2ugt \sin \alpha$.

குறிப்பு 3. இரு துகள்கள் ஒரே நேரத்தில் ஒரு புள்ளி வழியே அளவிலும் திசையிலும் சமமான வேகத்துடன் செல்லுமானல் அவை இரண்டும் இயக்கம் முழுவதும் ஒன்றுகவே செல்லும்.

குறிப்பு 4. ஒரு எறிபொருளானது O என்னும் எறி புள்ளியிலிருந்து u எனும் எறி வேகத்துடன் α எனும் எறிகோணத்தில் $t = O$ நேரத்தில் எறியப்பட்ட போதிலும், அக்கணத்திற்கு முன்னமேயே அதன் இயக்கப் பாதையில் எறி புள்ளிக்குக் கீழேயிருந்து அப்பொருள் வந்துகொண்டிருப்பதாகவும் $t = O$ நேரத்தில் எறிபுள்ளியை அதே திசை வேகத்துடன் அதே கோணத்தில் கடந்து செல்வதாகவும் கொள்ளலாம். எனவே t யின் எதிரடையாள மதிப்புக்கள் குறிப்பிடுகின்ற நேரங்கள் எறிபொருளானது அதன் இயக்கப் பாதையில் எறி புள்ளிக்குக் கீழேயிருந்த நிலைகளைக் குறிப்பிடுகின்ற நேரங்களாகக்கொள்ளப் படல் வேண்டும்.

மாதிரி 68. ஒரு எறிபொருளின் பரவளைவுப் பாதையில் எந்தப் புள்ளியிலும் அந்த எறிபொருளின் வேகமானது அப் பரவளையின் இயக்குவரையிலிருந்து அப்புள்ளிவரை அப் பொருள் விழுவதால் பெறக்கூடிய வேகத்திற்குச் சமமென்று காட்டு. (சென்னை பி. எஸ்ஸி. 1965 ஏப்.)

தீர்வு: (படம் 54 பார்க்கவும்)

O என்னும் புள்ளியிலிருந்து u திசைவேகத்துடன் கிடைத்தளத்துடன் α கோணத்றில் எறியப்படுவதாகக் கொள்க. எறிபொருளானது $P(x, y)$ என்னும் புள்ளியிலிருக்கும் போது அதன் திசைவேகம் V என்று கொள்க. இத்திசை வேகம் V-யின் கிடை, நிலைக்குத்துக் கூறுகள் முறையே X, Y என்க.

$$\therefore V = \sqrt{X^2 + Y^2}.$$

ஆனல் எறிபொருளின் வேகத்தின் கிடைக்கூறு மாறிலியாகையால்,

$$X = u \cos \alpha.$$

எறிபொருளானது $u \sin \alpha$ என்னும் நிலைக்குத்து வேகக் கூறுடன் g எனும் எதிர் முடுக்கத்தின் கீழ் y நிலைக்குத்துயரத்திற்குச் சென்றிருப்பதால்,

$$Y^2 = u^2 \sin^2 \alpha - 2gy.$$

$$\therefore V^2 = X^2 + Y^2$$

$$= u^2 \cos^2 \alpha + u^2 \sin^2 \alpha - 2gy$$
$$= u^2 - 2gy .$$

அல்லது $V = \sqrt{u^2 - 2gy}$ . ... (1)

O வழிக்கிடைத் தளத்திலிருந்து இயக்கு வரையின் உயரம் $\frac{u^2}{2g}$ என்று கண்டோம். எனவே, இயக்கு வரையின் கீழ் P-யின் ஆழம் $\left(\frac{u^2}{2g} - y\right)$ ஆகும்.

இயக்கு வரையிலிருந்து O தொடக்க வேகத்துடன் கீழே விழுகின்ற பொருள் g முடுக்கத்துடன் $\left(\frac{u^2}{2g} - y\right)$ தூரத்தைக் கடந்தபின் P-யை அடையும் போது பெறுகின்ற வேகம் V எனில்,

$$v^2 = u^2 + 2as$$

என்னும் இயக்கச் சமன்பாட்டிலிருந்து,

$$V_1^2 = O + 2g\left(\frac{u^2}{2g} - y\right)$$
$$= u^2 - 2g\,y$$

அல்லது, $V_1 = \sqrt{u^2 - 2gy}$ ... ... (2)

(1) , (2) ஆகியவற்றிலிருந்து $V = V_1$ என்று காண்கிறோம்.

மாதிரி 69. ஒரு புள்ளியிலிருந்து $128\sqrt{3}$ அடி தூரத்திலிருக்கும் 128 அடி உயரமான ஒரு கோபுரத்தின் உச்சியை அடையுமாறு ஒரு பந்து வீசப்பட வேண்டிய மிகக் குறைந்த திசைவேகம் யாது?

தீர்வு: பந்து எறியப்பட வேண்டிய திசைவேகம் u என்றும், எறிகோணம் α என்றும் கொள்க. பந்தின் இயக்கப்பாதை

$$y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2u^2 \cos \alpha}$$

ஆகும். $y = 128$, $x = 128\sqrt{3}$ என்று பிரதியிடவும்.

$$128 = 128\sqrt{3} \tan \alpha - \frac{32 \times 128^2 \times 3}{2u^2 \times \cos^2 \alpha}$$

$$\therefore 1 = \sqrt{3}\tan\alpha - \frac{48 \times 128}{u^2 \cos^2\alpha}$$

$$\frac{48 \times 128}{u^2 \cos^2\alpha} = \sqrt{3}\tan\alpha - 1$$

$$\therefore u^2 = \frac{48 \times 129}{\cos^2\alpha(\sqrt{3}\tan - 1)}$$

$$= \frac{48 \times 128}{\cos\alpha(\sqrt{3}\sin\alpha - \cos\alpha)}$$

$$= \frac{48 \times 128}{2\cos\alpha\left(\sin\alpha \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}\cos\alpha \cdot \frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{48 \times 128}{2\cos\alpha \cdot \sin(\alpha - 30^\circ)}$$

$$= \frac{48 \times 128}{\sin(2\alpha - 30'') - \sin 30^\circ}$$

$$= \frac{48 \times 128}{\sin(2\alpha - 30'') - \frac{1}{2}}$$

$\therefore$ u^2 மீச்சிறியதாகயிருக்க வேண்டுமாயின் $\sin(2 - 30^\circ)$ மீப்பெரிதாகயிருக்க வேண்டும். அதாவது, $\sin(2\alpha\ 30^\circ)$ மிகப் பெரிதாகயிருக்க வேண்டும்.

$\therefore$ $\sin(2\alpha - 30^\circ)$ இன் மீப்பெரிள மதிப்பு 1

$$\therefore u^2 \text{ இன் மீச்சிறு மதிப்பு} = \frac{48 \times 128}{1 - \frac{1}{2}}$$

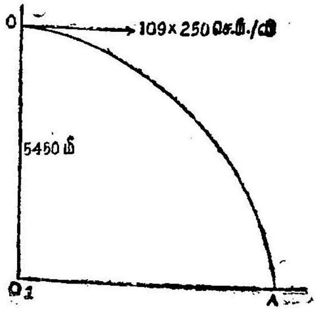
$$= \frac{48 \times 128}{\frac{1}{2}}$$

$$= 48 \times 256$$

$\therefore$ u இன் மீச்சிறு மதிப்பு $= \sqrt{48 \times 256} = 64\sqrt{3}$ அடி/வி.

மாதிரி 70. தரையிலிருந்து 5450 மீட்டர் உயரத்தில் ஒரு கிடைத்தள நேர்கோட்டின் வழியாக 981 கி.மீ. /மணி வேகத்தில் பறந்து கொண்டிருக்கும் ஒரு போர் விமானத்திலிருந்து ஒரு வெடிகுண்டு கீழே போடப்படுகிறது. வெடிகுண்டு தரையில்

விழும்போது குண்டு போடப்பட்ட இடத்திலிருந்து விமானம் எவ்வளவு தூரம் சென்றிருக்கும் ?



படம் 55

தீர்வு :

O என்பது குண்டு போடப் படும் போது விமானத்தின் நிலே. விமானம் கிடைத் திசையில் 981 கி.மீ./மணி வீதம் சென்று கொண்டிருப்பதால் குண்டின் தொடக்க வேகமும் கிடைத் திசையில் 981 கி.மீ./மணி யாகும்.

$$\therefore\ u = 981 \text{ கி.மீ./மணி} = 981 \times \frac{250}{9} \text{ செ.மீ./வி.}$$

$$= 109 \times 250 \text{ செ.மீ./வி.}$$

$\alpha = O$ ஏனெனில் குண்டின் தொடக்கவேகம் கிடைத் திசையிலுள்ளது. குண்டு தரையில் விழும்போது O விலிருந்து நிலக்குத்தாக 5450 மீட்டர் ஆழத்திலிருக்குமாகையால்,

$y = -5450$ மீட். $= -5450 \times 100 = -545000$ செ.மீ.

குண்டு தரையில் விழுவதற்குள் விமானம் சென்றதூரம் x எனில்

$A = (x, -545000)$ என்ற புள்ளி குண்டு விழும் பாதையி லிருக்கும்.

குண்டு விழும் பாதையின் பரவளேவுச் சமன்பாடு :

$$y = x \tan \alpha - \frac{8x^2}{2\,u^2 \cos^2 \alpha}$$

மேற்கண்ட மதிப்புக்களேப் பிரதியிடவும்.

$$-545000 = x \,.\, \tan O^\circ - \frac{981\,x^2}{2 \times (109 \times 250)^2 \cos^2 O}$$

$$= O - \frac{981\,x^2}{2 \times 109^2 \times 250^2}$$

$$= -\frac{9\,x^2}{109 \times 500 \times 250}$$

$$\therefore \quad x^2 = \frac{545000 \times 109 \times 500 \times 250}{9}$$

$$= \frac{109 \times 500 \times 10 \times 109 \times 500 \times 250}{9}$$

$$\therefore \quad x = \frac{109 \times 500 \times 50}{3} \text{ செ.மீ.}$$

$$= \frac{109 \times 25}{3} \text{ மீட்டர்}$$

$$= 908\tfrac{1}{3} \text{ மீட்டர்.}$$

குண்டு தரையில் விழும்போது விமானம் $908\frac{1}{3}$ மீட்டர் தூரம் சென்றிருக்கும்.

மாதிரி **71.** இரு இணையான சுவர்களின் உச்சிகளை உராய்ந்துச் செல்லுமாறு ஒரு பந்து எறியப்படுகிறது. முதல் சுவர் a அலகு உயரமுடையதாயும் எறிதானத்திலிருந்து b அலகு தொலைவிலுமுள்ளது. இரண்டாவது சுவர் b அலகு உயரமுடையதாகவும் ஏறிதானத்திலருந்து a அலகு தொலைவிலுமுள்ளது. பந்தின்பாதை இரு சுவர்களுக்கும் நேர்க்குத்தான தளத்தில் அமையுமாயின் கிடைத்தளத்தில் பந்தின் நெடுக்கத்தைக் (கிடைவீச்சு) கணக்கிடுக. எறிகோணம் $\tan^{-1}3$ ஐ விட அதிகமானது எனக் காட்டுக. (மதுரை பி. எஸ்ஸி 1973 ஏப்.)

தீர்வு: பந்தின் இயக்கப் பாதையின் சமன்பாடு வருமாறு :

$$y = x \tan\alpha - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha}.$$

இரு சுவர்களின் உச்சிகளின் அச்சுத் தூரங்கள் முறையே (b,a), (a,b) ஆகும். இவற்றை மேற்கண்ட சமன்பாட்டில் பிரதியிடவும்.

$$a = b\tan\alpha - \frac{gb^2}{2u^2\cos^2\alpha}$$

$$b = a\tan\alpha - \frac{ga^2}{2u^2\cos^2\alpha}$$

இப்பொழுது $\tan\alpha = X$, $\dfrac{g}{2u^2\cos^2\alpha} = Y$ என்றும் பிரதியிடுக.

$$a = b \times - b^2 Y,$$
$$b = a \times - a^2 Y$$

என்ற சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றன.

அதாவது, $X - bY = \dfrac{a}{b}$,

$$X - aY = \frac{b}{a}$$

கழிக்கவும் $(a-b)\,Y = \dfrac{a}{b} - \dfrac{b}{a} = \dfrac{a^2 - b^2}{ab}$

அல்லது $Y = \dfrac{a+b}{ab}$,

$$X = \frac{a}{b} + bY$$
$$= \frac{a}{b} + \frac{a+b}{a}$$
$$= \frac{a^2 + ab + b^2}{ab}$$

கிடைவீச்சு $R = \dfrac{u^2 \sin 2\alpha}{g}$

$$= \frac{2u^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$$
$$= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{2u^2 \cos^2\alpha}{g}$$
$$= X \cdot \frac{1}{Y}$$
$$= \frac{a^2 + ab + b^2}{ab} \cdot \frac{ab}{a+b}$$
$$= \frac{a^2 + ab + b^2}{a+b}$$

$$\tan\alpha = X = \frac{a^2 + ab + b^2}{ab}$$

$$= \frac{a^3 - b^3}{ab\,(a-b)}$$

$$= \frac{(a-b^3) + 3ab\,(a-b)}{ab\,(a-b)}$$

$$= \frac{(a-b)^2}{ab} + 3$$

= ஒரு நேரெண் $+ 3$, ஏனெனில் a, b என்பன நேரெண்கள்

$\therefore \tan \alpha > 3$

அல்லது, $\alpha > \tan^{-1} 3.$

மாதிரி **72.** ஒரு துகள் புவியீர்ப்பின்கீழ் u திசைவேகத்துடன் கிடைத்தளத்துடன் α கோணத்தில் எறியப்படுகிறது. t நேரத்தில் அதன் இயக்கத் திசையின் விலக்கம் (Deviation) D என்பது

$$\tan D = \frac{gt \cos \alpha}{ut - gt \sin \alpha}$$

என்று காட்டுக.

தீர்வு : t நேரத்தில் கிடைத்தளத்துடன் துகளின் இயக்கத் திசையின் சாய்வு θ எனில்,

$$D = (\alpha - \theta)$$

ஆகும்.

ஆனால், $\tan \theta = \dfrac{u \sin \alpha - gt}{u \cos \alpha}$ என்று அறிவோம்.

எனவே, $\tan D = \tan (\alpha - \theta)$

$$= \frac{\tan \alpha - \tan \theta}{1 + \tan \alpha \tan \theta}$$

$$= \frac{\dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \dfrac{u \sin \alpha - gt}{u \cos \alpha}}{1 + \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \dfrac{u \sin \alpha - gt}{u \cos \alpha}}$$

$$= \frac{(u \sin \alpha - u \sin \alpha + gt) \cos \alpha}{u \cos^2 \alpha + u \sin^2 \alpha - gt \sin \alpha}$$

$$= \frac{gt \cos \alpha}{u - gt \sin \alpha}$$

மாதிரி 73. இரு பொருட்கள் ஒரே புள்ளியிலிருந்து, ஒரே திசை வேகத்துடன், கிடைத்தளத்துடன் α, β கோணங்களில் எறிபுள்ளி வழிக் கிடைத்தளத்திலுள்ள ஒரு குறியை நோக்கி எறியப்படுகின்றன. முதல் பொருள் குறியிலிருந்து x அடி தூரம் முன்னாலும், இரண்டாவது பொருள் குறிக்கு அப்பால் y அடி தூரத்திலும் விழுகின்றன. அதே எறிவேகத்துடன் குறியில் சரியாக விழுமாறு எறிய வேண்டிய எறிகோணம் θ எனில்,

$$(x + y) \sin 2\theta = x \sin 2\beta = y \sin 2\alpha$$

என்று நிறுவுக. (சென்னை பி. எஸ்ஸி 1965 ஏப்.)

தீர்வு : எறிவேகம் u என்றும், எறிபுள்ளியிலிருந்து குறியின் தூரம் Z என்றும் கொள்க. எனவே, α, β, θ ஆகிய எறி கோணங்களில் எறியப்படும்போது தாண்டப்படுகின்ற வீச்சுகள் முறையே $(Z-x)$, $(Z+y)$, Z ஆகும்.

$$\therefore \quad Z - x = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g} \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$Z + y = \frac{u^2 \sin 2\beta}{g} \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$$Z = \frac{u^2 \sin 2\theta}{g} \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

(1), (3) ஆகியவற்றிலிருந்து,

$$x = \frac{u^2}{g} \sin 2\theta - \sin 2\alpha) \quad \ldots \quad (4)$$

(2), (3) ஆகியவற்றிலிருந்து,

$$y = \frac{u^2}{g} (\sin 2\beta - \sin 2\theta) \quad \ldots \quad (5)$$

$$\therefore \quad \frac{x}{y} = \frac{\sin 2\theta - \sin 2\alpha}{\sin 2\beta - \sin 2\theta}$$

குறுக்கே பெருக்கிச் சுருக்கவும்.

$$x \sin \beta + y \sin 2\alpha = (x + y) \sin 2\theta.$$

மாதிரி 74. ஒரே திசைவேகத்துடன் இரு வெவ்வேறு கோணங்களில் ஏறியப்படும் ஒரு பொருள் ஒரு கிடைவீச்சுத் தூரத்தைக் கடப்பதாகக் காணப்பட்டுள்ளது. சாத்தியமான இவ்விரு பாதைகளிலும், t, t^1 என்பன பறப்பு நேரங்கள், h, h^1 என்பன மீப்பெரு உயரங்களெனில்,

$R = \frac{1}{2} g\, t\, t^1 = 4\sqrt{hh^1}$ என்று காட்டுக.

தீர்வு : எறிவேகம் u என்றும், R என்னும் ஒரே கிடைவீச்சைக் கொடுக்கக்கூடிய இரு எறிகோணங்கள் α^1, α^1 என்றும் கொள்க.

$$R = \frac{u^2 \sin 2\alpha^1}{g} = \frac{u^2 \sin 2\alpha^1}{g}$$

$$t = \frac{2u \sin \alpha^1}{g} ; \quad t^1 = \frac{2u \sin \alpha^1}{g} = \frac{2u \sin (90^\circ - \alpha)}{g}$$

$$= \frac{2u \cos \alpha}{g}$$

$$\therefore \quad \tfrac{1}{2} g\, tt^1 = \tfrac{1}{2} g . \frac{2u \sin \alpha}{g} \cdot \frac{2u \cos \alpha}{g}$$

$$= \frac{2u^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$$

$$= \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g} = R$$

மேலும், $h = \dfrac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g}$; $h^1 = \dfrac{u^2 \sin^2 \alpha^1}{2g}$

$$= \frac{u^2 \sin^2 (90^\circ - \alpha)}{2g} = \frac{u^2 \cos^2 \alpha}{2g}$$

$$\therefore \quad hh^1 = \frac{u^4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{4g^2}$$

$$\sqrt{hh^1} = \frac{u^2 \sin \alpha \cos \alpha}{2g}$$

$$4\sqrt{hh^1} = \frac{2u^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g} = R.$$

மாதிரி **75.** ஒரு மரத்தின் உச்சியிலிருக்கும் ஒரு பறவையைத் தாக்கி, அதன் பின்னர் தரையிலிருந்து மரத்தின் உயரத்தைப்போல் இருமடங்கு உயரத்தை அடையுமாறு தரையிலிருந்து ஒரு கல் எறியப்படுகிறது. ஆனல் கல் எறியப்பட்ட கணத்திலேயே பறவை கிடைத்திசையில் பறந்து விடுகிறது. கல்லானது மேலே சென்று கீழே இறங்கும் பாதையில் பறவையைத் தாக்க வேண்டுமாஞல் கல், பறவை ஆகியவற்றின் கிடைவீசைகளின் விகிதம் $\sqrt{2}+1 : 2$ என்று காட்டுக.

தீர்வு: மரத்தின் உயரம் h என்க. கல்லின் எறிவேகம் u என்றும், எறிகோணம் α என்றும் கொள்க. எனவே, கல்லின் கிடைவேகம் $u \cos \alpha$ ஆகும்.

கல் செல்லும் மீப்பெரு உயரம் $2h$ ஆகும்.

$$\therefore \quad \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g} = 2h$$

அல்லது, $u^2 \sin^2\alpha = 4gh$,

$$u \sin \alpha = 2\sqrt{gh}.$$

கல் மரத்தின் உச்சியை அடையும்போது நேரம் t என்க.

$$\therefore \quad h = u \sin\alpha\, t - \tfrac{1}{2} g t^2$$

$$= 2\sqrt{gh}\, t - \tfrac{1}{2} g t^2$$

$$\therefore \quad g t^2 - 4\sqrt{gh}\, t + 2h = 0 \qquad \ldots \quad \ldots \qquad (1)$$

இது t-இல் ஒரு இருபடிச் சமன்பாடு ஆகையால், t_1, t_2 ஆகிய இரு மூலங்கள் உண்டு. $t_1 < t_2$ எனில், t_1 என்பது கல் உயரே செல்லும் பாதையில் மரத்தின் உச்சியை அடையும் நேரத்தையும் t_2 என்பது கல் கீழே இறங்கும்போது பறவையைத் தாக்கும் நேரத்தையும் குறிக்கும். பறவையின் கிடைவேகம் v எனில், t_2 நேரத்தில் பறவை செல்லும் கிடைத்தூரம் vt_2 ஆகும் ஆனல், இக்கிடைத் தூரமானது $(t_2 - t_1)$ நேரத்தில் கல் சென்றுள்ள கிடைத்தூரத்திற்குச் சமமாகும். கல்லின் கிடைவேகம் $u \cos \alpha$ ஆகையால்,

$$v\, t_2 = (u \cos \alpha)(t_2 - t_1)$$

அல்லது, $$\frac{u \cos \alpha}{v} = \frac{t_2}{t_2 - t_1}$$

சமன்பாடு (1) இலிருந்து,

$$t = \frac{4\sqrt{gh} \pm \sqrt{16\,gh - 8\,gh}}{2g}$$

$$= \frac{4\sqrt{gh} \pm 2\sqrt{2}\,\sqrt{gh}}{2g}$$

$$= \sqrt{\frac{g}{h}}\,(2 \pm \sqrt{2})$$

$$= \sqrt{2}\,\sqrt{\frac{h}{g}}\,(\sqrt{2} \pm 1)$$

$$\therefore\ t_1 = \sqrt{2}\,\sqrt{\frac{h}{g}}\,(\sqrt{2} - 1)$$

$$t_2 = \sqrt{2}\,\sqrt{\frac{h}{g}}\,(\sqrt{2} + 1)$$

$$\therefore\ t_2 - t_1 = \sqrt{2}\,\sqrt{\frac{h}{g}}\,(2)$$

$$\therefore\ \frac{t_2}{t_2 - t_1} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2}$$

அதாவது, $\dfrac{\text{கல்லின் கிடைவேகம்}}{\text{பறவையின் கிடைவேகம்}} = \dfrac{u\cos\alpha}{v}$

$$= \frac{t_2}{t_2 - t_1} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2}$$

மாதிரி 76. கடற்கரையில் நீர்மட்டத்திலிருந்து ஒரு துப்பாக்கி கடலை நோக்கிச் சுடப்படுகிறது. பின்னர் அது h அடி உயரமுள்ள ஒரு தாங்கியின்மேல் ஏற்றி வைக்கப்பட்டு அதே ஏற்றக்கோணம் α-இல் கடலை நோக்கிச் சுடப்படுகிறது. எறிவேகம் V எனில், இப்போதைய கிடைவீச்சு முந்திய கிடைவீச்சைப்போல் $\left\{\left(1 = \dfrac{2\,gh}{V^2\sin^2\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right\}$ மடங்கு அதிகமென்று காட்டுக.

தீர்வு:

முந்திய கிடைவீச்சு R_1 என்றும் பிந்திய கிடைவீச்சு R_2 என்றும் கொள்க.

$$\therefore \quad R_1 = \frac{V^2 \sin 2\alpha}{g}$$

பிந்திய வீச்சின்போது h உயரத்திலிருந்து துப்பாக்கி வெடிக்கப் படுகிறது. துப்பாக்கி முனையை ஆதியாகவும், அம்முனை வழிக் கிடைக்கோடு, நிலைக்குத்துக்கோடு ஆகியவற்றை x, y அச்சுக் களாகவும் கொண்டால், துப்பாக்கிக் குண்டின் பாதையின் சமன்பாடு

$$y = x \tan\alpha - \frac{gx^2}{2V^2\cos^2\alpha}$$

ஆகும். குண்டு கடலில் விழுமிடம் $(R_2, -h)$ ஆகும்.

$$\therefore \quad -h = R_2 \tan\alpha - \frac{g R_2^2}{2V^2\cos^2\alpha}$$

அல்லது, $g R_2^2 - 2V^2\sin\alpha\cos\alpha\, R_2 - 2V^2 h\cos^2\alpha = 0.$

$$\therefore \quad R_2 = \frac{2V^2\sin\alpha\cos\alpha \pm \sqrt{4V^4\sin^2\alpha\cos^2\alpha + 8V^2 gh\cos^2\alpha}}{2g}$$

நேரடையாளத்தை எடுத்துக் கொள்க.

$$\therefore R_2 = \frac{V^2\sin 2\alpha \pm \sqrt{4V^4\sin^2\alpha\cos^2\alpha\left(1 + \dfrac{2gh}{V^2\sin^2\alpha}\right)}}{2g}$$

$$= \frac{V^2\sin 2\alpha + 2V^2\sin\alpha\cos\alpha\sqrt{\left(1 + \dfrac{2gh}{V^2\sin^2\alpha}\right)}}{2g}$$

$$= \frac{V^2\sin 2\alpha}{2g}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{V^2\sin^2\alpha}}\right]$$

$$= \frac{R_1}{2}\left[1 + \sqrt{\left(1 + \frac{2gh}{V^2\sin^2\alpha}\right)}\right]$$

$$\therefore R_2 - R_1 = \frac{R_1}{2}\left[1 + \sqrt{\left(1 + \frac{2gh}{V^2\sin^2\alpha}\right)}\right] - R_1$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[\sqrt{\left(1 + \frac{2gh}{V^2\sin^2\alpha}\right)} - 1\right] R_1$$

மாதிரி 77. O எனும் புள்ளியிலிருந்து நிலைத்தளத்தில் எல்லாத் திசைகளிலும் u திசைவேகத்துடன் எறியப்படுகின்றன. அவற்றின்

(1) பரவளைவுப் பாதைகளின் குவியங்கள் எனும் ஆரமுடைய வட்டத்தில் அமையுமெனவும்

(2) அவற்றிற்குப் பொதுவாக இயக்குவரை உண்டெனவும், அது O-வுக்கு மேல் $\frac{u^2}{2g}$ உயரத்தில் உள்ள கிடைக்கோடெனவும் நிறுவுக.

(மதுரை பி.எஸ்ஸி. 1972 செப்.)

தீர்வு : ஒரு துகளின் எறிகோணம் α_1 என்க. இத்துகளின் பரவளைவுப் பாதையின் குவியம்

$$S = \left(\frac{u^2 \sin 2\alpha_1}{2g}, -\frac{u^2 \cos 2\alpha_1}{2g}\right)$$

ஆகும். எனவே, S-இலிருந்து O-வழிக் கிடைக்கோட்டிற்கு SM என்னும் செங்குத்துக்கோடு வரைந்தால்,

$$OM = \frac{u^2 \sin 2\alpha_1}{2g}, MS = = \frac{u^2 \cos 2\alpha_1}{2g}$$

ஆகும். OMS ஒரு நேர்கோண முக்கோணமாகையால்,

$$OS^2 = OM^2 + MS^2$$

$$= \frac{u^4 \sin^2 2\alpha_1}{4g^2} = \frac{u^4 \cos^2 2\alpha_1}{4g}$$

$$= \frac{u^4}{4g^2}$$

$$\therefore \ OS = \frac{u^2}{2g} = \text{ஒரு மாறிலி. ஏனெனில் } u \text{ ஒரு மாறிலி.}$$

∴ எல்லாப் பரவளைவுகளின் குவியங்களும் O-ஐ மையமாகவும், $OS = \frac{u^2}{2g}$ ஐ ஆரையாகவும் கொண்ட ஒரு வட்டத்தில் அமையும்.

மேற்கண்ட பரவளைவின் இயக்குவரையின் சமன்பாடு $y = \frac{u^2}{2g}$ ஆகும். இச்சமன்பாடு α-ஐச் சாராதிருப்பதால்,

எல்லாப் பரவளைவுப் பாதைகளுக்கும் இதுவே இயக்குவரை யாகும். மேலும் இப்போது இயக்குவரை $\frac{u^2}{2g}$ உயரத்திலுள்ள கிடைக்கோடு என்றும் காண்கிறோம்.

பயிற்சி 8

1. ஒருமனிதன் 25 அடி உயரமுள்ள ஒரு மரத்தின் அடியி லிருந்து 70 அடி தூரத்திலிருந்து அம்மரத்தின் உச்சியை உராய்ந்து கொண்டு செல்லுமாறு ஒரு கல்லை எறிகிறான். எறி திசை கிடைத்தளத்துடன் 45° கோணத்திலிருந்தால் கல்லின் வேகத்தைக் காண்க.

2. 18 அடி உயரத்தையுடைய ஒரு வெற்றித் தானத்திற்கு 4 கெஜங்களுக்கு முன்னாலிருந்து உதைக்கப்படும் ஒரு பந்து வெற்றித் தானத்தின் மேற்கம்பத்தைக் கீழ்ப்புறமாக உராய்ந்து கொண்டு சென்று வெற்றித் தானத்திற்கு 2 கெஜங்களுக்குப் பின்னால் போய்விழுகிறது. பந்தின் இயக்கப்பாதை வெற்றித் தானத்திற்கு நிலைக்குத்தாகயிருந்தால் பந்தின் எறிவேகத்தைக் காண்க.

3. கிடைத்தளத்தில் 200 அடி வீச்சு பெறவேண்டுமாயின் எறிபொருள் எறியப்பட வேண்டிய மீச்சிறு திசைவேகத்தைக் காண்க.

4. 50 கெஜத் தூரத்திலுள்ள 75அடி உயரச் சுவரின் உச்சியை உராய்ந்து கொண்டு கிடைத்திசையில் செல்லுமாறு எறியப்படவேண்டிய ஒரு குண்டின் திசைவேகம், திசை ஆகியவற்றைக் காண்க.

5. ஒரு வட்டமான தொட்டியின் நடுவிலுள்ள நீரூற்று 2.18 மீட்டர் உயரத்திலிருந்து எல்லாத் திசைகளிலும் 300 செ.மீ./வி. திசைவேகத்துடன் நீரைப் பாய்ச்சுகிறது. எல்லா நீரும் தொட்டியினுள்ளேயே விழவேண்டுமாயின் தொட்டியின் குறைந்த பட்ச விட்டம் எவ்வளவு இருக்க வேண்டும்?

6. ஒரு எறிபொருளின் மீப்பெருக் கிடை வீச்சு R எனில், எறிபொருள் செல்லக்கூடிய மீப்பெரு உயரம் $\frac{R}{4}$ என்று காட்டு.

ஒரு பையன் ஒரு கிரிக்கெட் பந்தை எறியக்கூடிய மிகப் பெரிய கிடைத்தூரம் 48 கெஜம். பந்து காற்று மண்டலத்திலிருந்த நேரம் எவ்வளவு? பந்து அடைந்த மிகப் பெரிய உயரம் என்ன?

7. மீப்பெரு உயரத்திலிருக்கும்போது ஓர் எறிபொருளின் திசைவேகம், அவ்வுயரத்தில் பாதியளவு உயரத்திலிருக்கும் போதுள்ள திசைவேகத்தைப்போல் $\sqrt{\frac{2}{5}}$ மடங்கு எனில், எறிகோணம் 60° என்று காட்டு.

8. ஒரு எறிபொருள் எறியப்பட்ட நேரத்திற்கு இரண்டு விநாடிகட்குப்பின் கிடைத்தளத்துடன் 30° சாய்வில் சென்று கொண்டிருக்கிறது; மேலும் ஒரு விநாடிகட்குப்பின் அது கிடைத் திசையில் சென்று கொண்டிருக்கிறது. அதன் எறிவேகத்தின் அளவு, திசை ஆகியவற்றைக் காண்க.

9. P என்னும் புள்ளியிலிருந்து கிடைத்தள, நிலைக்குத்துத் தூரங்கள் முறையே 24 அடி, 7 அடியுள்ள Q என்னும் புள்ளி வழியே செல்லுமாறு ஒரு பந்து எறியப்படக்கூடிய மிகக் குறைந்தபட்ட திசைவேகத்தையும், அந்த வேகத்துடன் Pயிலிருந்து Q வரை செல்வதற்காகும் நேரத்தையும் காண்க.

10. தரையிலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து 120 அடி தூரத்திலுள்ள 50 அடி. உயரச்சுவரின் மேலே செல்லுமாறு ஒரு பந்தை எறிய வேண்டிய மிகக் குறைந்த வேகமானது அப்பந்து 90அடி உயரத்திலிருந்து கீழே விழும்போது பெறக்கூடிய வேகத்திற்குச் சமமாயிருக்குமென்றும், அக் குறைந்தபட்ச வேகத்தின் எறிகோணம் $\tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)$ என்று காட்டு.

11. எறிபுள்ளியிலிருந்து 50 கெஜத் தூரத்திலுள்ள 75 அடி உயரச்சுவரின் உச்சியை உராய்ந்து கொண்டு செல்லுமாறு ஒரு குண்டு வீசப்படவேண்டுமாயின் அதன் எறிவேகம், எறிகோணம் ஆதியவற்றைக் காண்க.

12. 100 அடி/வி. திசைவேகத்துடன் கிடைத்தளத்துடன் $\tan^{-1}\frac{3}{4}$ சாய்வில் எறியப்படும் ஒருதுகள் எறிபுள்ளியிலிருந்து 240 அடி தூரத்திலுள்ள 36 அடி உயரச் சுவரை உராய்ந்து செல்லுமென்று காட்டு.

13. எறிபுள்ளியிலிருந்து 16 அடி தூரத்திலுள்ள 12 அடி உயரச் சுவரின் உச்சியை உராய்ந்து கொண்டு செல்லுமாறு ஒரு பந்து எறியப்படுகிறது. பந்தின் கிடைத்திசை வேகமானது எறிபுள்ளியிலிருந்து சுவரின் கிடைத் தூரத்திற்குச் சமமான தூரத்திற்கு ஓய்விலிருந்து கீழே விழும்போது அது பெறக்கூடிய வேகத்திற்குச் சமமாகுமெனில் அப்பந்து சுவருக்குப்பின்னால் 48அடி தூரத்திற்குச் சென்று விழுமென்று காட்டு.

14. ஒரு போர் விமானம் 1200 அடி உயரத்தில் 72மை/மணி திசைவேகத்துடன் ஒரு கிடைக்கோட்டின் வழியாகப் பறந்து கொண்டிருக்கிறது. தரையிலுள்ள ஓர் இடத்தில் விழுமாறு ஒரு குண்டு எவ்வளவு கிடைத் தூரத்திற்கு முன்னால் போடப்பட வேண்டுமென்று காண்க.

15. 200 அடி உயரமுள்ள ஒரு கோபுரத்தின் உச்சியிலிருந்து 45° ஏற்றக் கோணத்தில் 96 அடி/வி. வேகத்துடன் ஒரு பந்து வீசப்படுகிறது. கோபுரத்தின் அடியிலிருந்து எவ்வளவு தூரத்தில் பந்து தரையில் விழுமென்று காண்க.

16. ஒரு எறிபொருள் அதன் மீப்பெரு உயரத்தில் $\frac{1}{3}$ பாக உயரத்திலிருக்கும்போது அதன்வேகம் அது மீப்பெரு உயரத்திலிருக்கும்போது பெற்றுள்ள உயரத்தைப்போல் $\frac{2}{\sqrt{3}}$ மடங்கு எனில் எறிகோணம் $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ என்று காட்டு.

17. தரையிலுள்ள ஒரே புள்ளியிலிருந்து ஒரே சமயத்தில் இரு கற்கள் கிடைத்தளத்துடன் α, β கோணங்களில் ஒரு கோபுரத்தை நோக்கி வீசப்படுகின்றன. முதல் கல் கோபுரத்தின் உச்சியில் போய் விழும்போது இரண்டாவது கல் கோபுரத்தின் அடியில் போய் விழுகிறது. எறிபுள்ளியில் கோபுரம் தாங்கும் கோணம் θ எனில்,

$$\tan\theta = \tan\alpha - \tan\beta$$

என்று காட்டு.

18. u எறிவேகத்துடன் α எறிகோணத்தில் ஒரு எறிபொருள் வீசப்படுகிறது. கிடைவீச்சு R, பறப்பு நேரம் T எனில் $\tan\alpha = \frac{gT^2}{2R}$ என்று காட்டு.

19. ஒரு எறிபொருளின் கிடைவீச்சு R; அதன் மீப்பெரு உயரம் h. தொடக்கவேகம் u எனில், $\frac{u^2}{2g} = h + \frac{R^2}{16h}$ என்று காட்டு.

20. 12 அடி நீள அடிப்பக்கம் BC கிடையாகவும், தரையிலிருந்து 16 அடி உயரத்திலிருக்குமாறு நிலைக்குத்தாக வைக்கப்பட்டுள்ள ABC என்னும் ஒரு இருசமபக்க முக்கோணத்தின் மூன்று முனைகளையும் உராய்ந்துகொண்டு செல்லுமாறு தரையிலிருந்து ஒரு துகள் எறியப்படுகிறது. முனை A-யானது BC-க்கு மேலே 9 அடி உயரத்திலிருந்தால், தரையின்மேல் துகளின் வீச்சைக் காண்க.

21. அடிப்பக்கம் கிடையாகயிருக்குமாறு நிலைத்தளத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ள ஒரு முக்கோணத்தின் அடிபக்க முனைகளுள் ஒன்றிலிருந்து எறியப்படும் ஒரு துகள் முக்கோணத்தின் உச்சியை உராய்ந்து கொண்டு மறுமுனையில் போய் விழுகிறது. முக்கோணத்தின் அடிக் கோணங்கள் θ, ϕ ஆகும். எறிகோணம் α எனில்,

$$\tan \alpha = \tan\theta + \tan \phi$$

என்று காட்டு.

22. எறிபுள்ளி வழிக் கிடைத்தளத்தில் வீச்சு மிகப் பெரிதாகயிருக்குமாறு ஒரு துகள் புவியீர்ப்பின்கீழ் u திசைவேகத்துடன் எறியப்படுகிறது. எறிபுள்ளிக்குக் கீழே $\frac{h}{2}$ ஆழத்திலுள்ள கிடைத்தளத்தில் அதன் வீச்சு

$$\frac{u\left(u + \sqrt{u^2 + 2gh}\right)}{2g}$$

என்று காட்டுக. (மதுரை பி.எஸ்ஸி 1969 செப்.)

23. A, B ஆகிய இரு புள்ளிகளின் கிடைமட்டங்களுக்கிடையேயுள்ள நிலைத்தூரம் l எனில், A-யின் வீச்சுக்குள் சரியாக B-யுருக்குமாறு A-யிலிருந்து எறியப்படும் ஒரு பொருளின் எறிவேகம் B-யானது A-க்கு மேலே அல்லது கீழே இருப்பதற்கேற்ப $\sqrt{g\,(AB \pm l)}$ என்று காட்டுக.

(சென்னை பி. எஸ்ஸி. 1969 செப்.)

24. இரு துகள் ஒரே புள்ளியிலிருந்து ஒரே நேரத்தில் ஒரே நிலைத்தளத்தில் எறியப்படுகின்றன. அவற்றின் இயக்கத்தின் போது எந்த நேரத்திலும் அவற்றின் நிலைகளைச் சேர்க்கும் நேர்

கோடு கிடைத்திசையுடன் ஒரு மாறுக் கோணத்தையுண்டு பண்ணுமென்று காட்டு.

25. ஒரு துகள் u திசைவேகத்துடன் எறியப்படுகிறது. அது அடைந்துள்ள மீப்பெரு உயரம் H எனில், எறிபுள்ளி வழிக் கிடைத்தளத்தில் அதன் வீச்சு $4\sqrt{H\left(\frac{u^2}{2g}-H\right)}$ என்று காட்டு.

26. கிடைத்தளத்துடன் θ கோணத்திலுள்ள ஒரு திசையில் ஒரு துகள் எறியப்படுகின்றது. எறிபுள்ளி வழியே செல்லும் கிடைத்தள, நிலைக்குத்து அச்சுக்களைக் குறித்து (x_1, y_1), (x_2, y_2) என்னும் புள்ளிகள் வழியே அத்துகள் சென்றால்,

$\tan\theta = \frac{x_2^2 y_1 - x_1^2 y_2}{x_1 x_2 (x_2 - x_1)}$ என்று நிறுவுக.

27. ஒன்றுக்கொன்று $2a$ தூரத்திலுள்ள இரு சம உயரச் சுவர்களின் உச்சிகளை உராய்ந்து செல்லுமாறு $2\sqrt{ag}$ திசைவேகத்துடன் ஒரு துகள் எறியப்படுகிறது. துகளின் பாதையின் செவ்வகலம் $2a$ என்றும், இரு சுவர்களுக்குமிடையேயுள்ள தூரத்தைக் கடக்கும் நேரம் $2\sqrt{\frac{a}{g}}$ என்றும் காட்டுக.

28. ஒன்றுக்கொன்று $2a$ தூரத்திலுள்ள a உயரமுடைய இரு சம உயரச் சுவர்களை உராய்ந்து செல்லுமாறு கிடைத்தளத்துடன் α கோணத்தில் ஒரு பொருள் எறியப்படுகிறது. கிடைவீச்சு $2a\cot\frac{\alpha}{2}$ என்று காட்டு.

29. தரையிலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து எறியப்படும் ஒரு பொருள் எறி புள்ளியிலிருந்து a தூரத்திலுள்ள h உயரச் சுவரின் உச்சியை உராய்ந்து செல்கிறது. கிடைவீச்சு R எனில் எறி கோணம் α என்பது $\tan\alpha = \frac{Rh}{a(R-a)}$ என்னும் தொடர்பின் மூலம் தரப்படுமென்று காட்டு.

30. ஒரு சுவரின் அடியிலிருந்து x தூரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரு பொருள் $45°$ ஏற்றக் கோணத்தில் எறியப்படுகிறது. அது சுவரின் உச்சியை உராய்ந்து சென்று சுவருக்குப் பின்னால் y தூரத்தில் தரையில் விழுகிறது. சுவரின் உயரம் $\frac{xy}{x+y}$ என்று காட்டு.

31. சமதளத்திற்கு மேலே h உயரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரு துகள் புவியீர்ப்பின் கீழ் $\sqrt{2ag}$ திசை வேகத்துடன் எறியப்படுகிறது. சமதளத்தில் வீச்சு மீப்பெரிதாக யிருக்க வேண்டுமாயின் எறிகோணம் α என்பது $\tan^2 \alpha = \dfrac{a}{a+h}$ என்ற தொடர்பின் மூலம் தரப்படுமென்றும், சமதளத்தில் மீப்பெரு வீச்சு $2\sqrt{a(a+h)}$ என்று காட்டுக.

(சென்னை பி.எஸ்ஸி 1970 ஏப்.)

32. ஒரு பொருள் h உயரத்திலிருந்து கீழே விழும்போது பெறக்கூடிய திசைவேகத்துடன் H உயரமுள்ள ஒரு கோட்டையின் உச்சியிலிருந்து எறியப்படுகிறது. கோட்டையின் அடிவழியே செல்லும் கிடைத்தளத்தில் மீப்பெரு வீச்சு $\sqrt{4h(H+h)}$ என்றும், இவ்வீச்சைக் கொடுக்கக்கூடிய எறிகோணம் $\cos^{-1}\sqrt{\dfrac{H+h}{H+2h}}$ என்று காட்டுக.

33. 50 அடி உயரமான சுவரின் உச்சியிலிருந்து 30° ஏற்றக்கோணத்தில் எறியப்படும் ஒரு பொருள் சுவரின் அடிவழியே செல்லும் கிடைத்தளத்தில் 45° சாய்வில் விழுகிறது: எறிபுள்ளியிலிருந்து கிடைத்தளத்திலுள்ள விழு புள்ளியின் இறக்கக் கோணம் $\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}$ என்று காட்டுக.

34. ஒரே புள்ளியிலிருந்து பல பொருட்கள் நிலைத்தளத்தில் $\sqrt{2gh}$ திசைவேகத்துடன எறியப்படுகின்றன. அவற்றின் பாதைகளின் உச்சிகளின் நியமப்பாதை $x^2+4y(y-k)=0$ என்னும் நீள்வட்டமென்று காட்டு.

35. தரப்பட்டுள்ள இரு புள்ளிகள் வழியே செல்லும் எல்லா எறி பொருட்களின் பாதைகளின் குவியங்கள் ஓர் ஆதி பரவளைவில் (hyperbola) அமையுமென்று காட்டுக.

36. ஒரே புள்ளியிலிருந்து ஒரு நிலைத்தளத்தின்மேல் $\dfrac{\lambda}{\sqrt{\sin\theta}}$ (θ என்பது எறிகோணம்) என்பதற்கேற்ப மாறுபடுகின்ற திசைவேகத்துடன் பொருட்கள் எறியப்படுகின்றன. எறி பொருட்களின் பரவளைவுப் பாதைகளின் உச்சிகளின் நியமப்பாதை $\dfrac{x^2}{\left(\dfrac{\lambda^4}{g^2}\right)} + \dfrac{y^2}{\left(\dfrac{\lambda^4}{4g^2}\right)} = 1$ என்னும் நீள்வட்டமென்று காட்டு.

37. ஒரே புள்ளியிலிருந்து மூன்று பொருட்கள் ஒரே நிலைத் தளத்தில் u, v, w என்னும் திசைவேகங்களுடன் முறையே α, β, γ எறிக்கோணங்களில் எறியப்படுகின்றன.

$$\frac{\text{Sin } 2(\beta-\gamma)}{u^2}+\frac{\text{Sin } 2(\gamma-\alpha)}{v^2}+\frac{\text{Sin } 2(\alpha-\beta)}{w^2}=0$$

எனில், அவற்றின் பாதைகளின் குவியங்கள் ஒரு நேர் கோட்டிலமையுமென்று காட்டுக.

38. ஒரே புள்ளியிலிருந்து இரு பொருட்கள் ஒரே நேரத்தில் ஒரே நிலைத்தளத்தில் சமவேகங்களுடன் α, β எறிகோணங்களுடன் எறியப்படுகின்றன. அவையிரண்டும்

$$t=\frac{u\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{g\text{ Sin}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$$

நேரத்தில் இணையான திசைகளில் செல்லுமென்றும், இந்த இணைத்திசையான நிலைக்குத்துடன் $\frac{\alpha+\beta}{2}$ சாய்விலிருக்குமென்றும் காட்டுக.

39. ஒரு எறிபொருளின் பாதையின் உக்சி எறிபுள்ளி வழிக் கிடைத்தளத்திற்குக் மேலே எவ்வளவு உயரத்திலிருக்கிறதோ அவ்வளவு தூரத்திற்குக் கீழே அதன் குவியம் இருந்தால் எறிகோணம் $\alpha = \text{Sin}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ என்று காட்டு.

40. h உயரமுள்ள ஒரு குன்றின் உச்சியிலிருந்து v அடி/வி. திசை வேகத்துடன் வீசப்படும் ஒரு குண்டு, குன்றின் அடியிலிருந்து d அடி தூரத்தில் கடலில் போய் விழுகிறது. சாத்தியமான பறப்பு நேரங்கள்

$$\tfrac{1}{4}g^2t^4-(gh+v^2)t^2=d^2+h^2=0$$

என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலம் பெறப்படுமென்று காட்டுக.

41. இரு எறிபொருட்கள் V எனும் ஒரே திசை வேகத்துடன், α எனும் ஒரே எறிகோணத்தில் ஒரே புள்ளியிலிருந்து ஒன்றன் பின் ஒன்ருக ஒரு வினடி கால இடைவெளியில் எறியப்படுகின்றன. அவற்றிற் கிடையேயுள்ள கிடைத்தூர இடை

வெளி மாறிலியாக யிருக்குமென்றும், இரண்டாவது பொருள் எறியப்பட்டபின் t விஞடி நேரத்தில் அவற்றிற்கிடையேயுள்ள நிலைத்தூர இடைவெளி $V \sin \alpha - gt + \frac{1}{2} g$ என்றும் காட்டுக.

42. P, Q என்னுமிரு புள்ளிகள் a இடைவெளியிலிருக்கின்றன. தரையிலிருந்து அவற்றின் உயரங்கள் முறையே h_1, h_2 ஆகும். இவ்விரு புள்ளிகள் வழியே செல்லுமாறு தரையிலிருந்து எறியப்படக்கூடிய மிகக் குறைந்த திசைவேகம் $\sqrt{g(a + h_1 + h_2)}$ என்று காட்டு.

43. தரப்பட்டுள்ள ஒரு கிடைவீச்சுக்கு α, β என்பன சாத்தியமான எறிகோணங்கள் ; t_1, t_2 என்பன பறப்பு நேரங்கள் எனில்,

$$\frac{t_1^2 - t_2^2}{t_1^2 - t_2^2} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$$

என்று காட்டு.

44. அச்சு நிலைக்குத்தாகவுள்ள ஒரு நேர் வட்டக் கூம்பு வடிவத்திலுள்ள ஒரு குன்றின் அடியிலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து எறியப்பட்ட ஒரு பொருள் குன்றின் உச்சியை உராய்ந்து சென்று மறுபக்கத்தில் குன்றின் அடியில் சென்று விழுகிறது. α என்பது குன்றுக் கூம்பின் அரையுச்சிக்கோணம், h என்பது அதன் உயரம்' u என்பது எறிவேகம், θ என்பது எறிகோணம் எனில்,

$$\tan \theta = 2 \cot \alpha \text{ என்னும், } u^2 = gh\left(2 + \tfrac{1}{2} \tan^2 \alpha\right)$$

என்றும் காட்டுக.

45. தரையிலிருந்து ஒரு பொருள் u திசை வேகத்துடன் எறியப்படுகிறது. எறி புள்ளியிலிருந்து அதன் கிடைத்தூரங்கள் a, $2a$ ஆகயிருக்கும் போது அது h உயரத்திலிருக்கிறது.

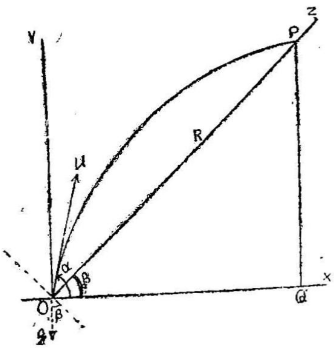
$u^2 = \dfrac{g}{4h}(4a^2 + 9h^2)$ என்று காட்டுக.

46. ஓர் எறி பொருளின் எறிவேகம் u என்பது kuக்கு அதிகரிக்கப்படுவதாலும், $\operatorname{cosec} \lambda = k(\cot \lambda - \cot \alpha)$ என்ற தொடர்பின் மூலம் பெறப்படுகின்ற λ இன் மதிப்பு அளவிற்கு எறிகோணம் α என்பது குறைக்கப்படுவதாலும் எறிபொருளின் மீப்பெரு உயரம் மாறுவதில்லை யென்று காட்டுக.

47. ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரே வேகத்துடன் பல்வேறு திசைகளில் பொருட்கள் வீசப்படுகின்றன. தரப்பட்டுள்ள ஒரு

கணத்தில் அவையெல்லாம் ஒரு வட்டத்திலிருக்குமென்று காட்டு.

ஒரு சாய்தளத்தின் மேல் வீச்சு (Range on an inclined plane)



படம் 56

O என்னும் புள்ளியிலிருந்து OX கிடைத்தளத்துடன் α கோணத்தில் u எறிவேகத்துடன் எறியப்படும் ஒரு துகள், கிடைத்தளத்துடன் β கோணச் சாய்விலுள்ள OZ என்னும் சாய்தளத்தின் மேல் P என்னும் புள்ளியில் போய் விழுகிறது. எனவே, $OP = R$ என்பது சாய்தளத்தின் மேல் எறி பொருளின் வீச்சு ஆகும்.

சாய்தளத்துடன் எறிவேகத்தின் சாய்வு $(\alpha - \beta)$ ஆகும். எனவே, சாய்தளத் திசையில், அதாவது, OP வழியே, எறிவேகக் கூறு $= u \cos (\alpha - \beta)$ சாய்தளத்திற்குச் செங்குத்துத் திசையில் எறிவேகக் கூறு $= u \text{ Sin } (\alpha - \beta)$. புவியீர்ப்பு முடுக்கம் g நிலைகுத்தாகக் கீழ் நோக்கிச் செயல்படுமாகையால், சாய்தளத்தின் வழியே எறிவேகத்திற்கு எதிர் திசையில் அதன் கூறு $g \text{ Sin } \beta$ ஆகும்; சாய்தளத்திற்குச் செங்குத்துத் திசையில் எறிவேகக் கூறுக்கு எதிர்த்திசையில் அதன் கூறு $g \cos \beta$ ஆகும்.

1. பரப்பு நேரம் (Time of Flight)

O-விலிருந்து P வரை துகளின் பரப்பு நேரம் T என்க. இந்த T நேரத்தில் சாய்தளத்திற்குச் செங்குத்துத் திசையில் துகள் சென்றுள்ள தூரம் பூச்சியமாகும். எனவே,

$$S = ut + \tfrac{1}{2} at^2$$

என்னும் சமன்பாட்டில், $S = 0$, $u = u \text{ Sin } (\alpha - \beta)$, $a = g \cos \beta$, $t = T$ என்று பிரதியிடவும்.

$$O = u \text{ Sin } (\alpha - \beta). \quad T - \tfrac{1}{2} g \cos \beta \,.\, T.$$

$$\text{அல்லது, } \quad T \; \frac{2u \text{ Sin } (\alpha - \beta)}{g \cos \beta} \qquad \ldots \qquad (1)$$

2. சாய்தளத்தின் மேல் வீச்சு (Range up the inclined plane)

சாய்தளத்தின் மேல் துகளின் வீச்சு $R = OP$. இவ்வீச்சானது சாய்தளத் திசையில் எறிபொருளானது T நேரத்தில் சென்றுள்ள தூரமாகும். எனவே,

$$S = ut + \frac{1}{2}at^2$$

என்னும் சமன்பாட்டில், $S = R$, $u = u\cos(\alpha - \beta)$, $a = -g\,\text{Sin}\,\beta$, $t = T$ என்று பிரதியிடவும்.

$$\therefore \quad R = u\cos(\alpha - \beta).\ T - \frac{1}{2}g\,\text{Sin}\,\beta.\ T^2$$

ஆனல், (1) இலிருந்து, $T = \dfrac{2u\,\text{Sin}(\alpha - \beta)}{g\cos\beta}$ என்றறிவோம்.

$$\therefore \quad R = u\cos(\alpha - \beta).\frac{2u\,\text{Sin}(\alpha = \beta)}{g\cos\beta} - \frac{1}{2}g\,\text{Sin}\,\beta.\ \frac{4u^2\,\text{Sin}^2(\alpha - \beta)}{g^2\cos^2\beta}$$

$$= \frac{2u^2\,\text{Sin}(\alpha - \beta)}{g\cos^2\beta}\,[\cos(\alpha - \beta).\cos\beta - \text{Sin}(\alpha - \beta)\,\text{Sin}\,\beta]$$

$$= \frac{2u^2\,\text{Sin}(\alpha - \beta)}{g\cos^2\beta}\,[\cos(\alpha - \beta + \beta)]$$

அதாவது, $R = \dfrac{2u^2\,\text{Sin}(\alpha - \beta)\cos\alpha}{g\cos^2\beta}$ ... (2)

3. சாய்தளத்தின் மேல் மீப்பெரு வீச்சு (Maximum Range upon inclined plane)

$$R = \frac{2u^2\,\text{Sin}(\alpha - \beta)\cos\alpha}{g\cos^2\beta}$$

$$= \frac{u^2\,[\text{Sin}(2\alpha - \beta) - \text{Sin}\,\beta]}{g\cos^2\beta}$$

தரப்பட்டுள்ள ஒரு சாய்தளத்திற்கு β மாறிலியாகையால், R மீப்பெரிதாக யிருக்கவேண்டுமாயின் $\text{Sin}(2\alpha - \beta)$ மீப் பெரிதாக யிருக்கவேண்டும்.

$$\therefore \quad \text{Sin}(2\alpha - \beta) = 1\ \text{Sin}\,\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \quad \text{மீப்பெருவீச்சு} = \frac{u^2}{g\cos\beta}\,[1 - \text{Sin}\,\beta]$$

$$= \frac{u^2 (1 - \text{Sin } \beta)}{g (1 - \text{Sin}^2 \beta)}$$

$$= \frac{u^2}{g (1 + \text{Sin } \beta)} \qquad \ldots \qquad (3)$$

குறிப்பு : சாய்தளத்தின் மேல் மீப்பெருவீச்சைத் தருகின்ற எறிதிசையானது நிலைக்குத்துக்கும் சாய்தளத்திற்கு மிடையே யுள்ள கோணத்தை இருசமக்கூறிடும் :

சாய்தளத்தின் மேல்வீச்சு மீப்பெரிதாகயிருக்கும்போது $\text{Sin } (2\alpha - \beta) = 1$ என்று கண்டோம்.

$$\therefore \quad 2\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \quad \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}$$

எறிதிசைக்கும் சாய்தளத்திற்குமிடையேயுள்ள கோணம்

$$= \alpha - \beta$$

$$= \pi + \frac{\beta}{2} - \beta$$

$$= \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2} \right)$$

∴ எறிதிசையானது நிலைக்குத்துக்கும், சாய்தளத்திற்கு மிடையேயுள்ள கோணத்தின் இருசமவெட்டியாகும்.

4. சாய்தளத்திலிருந்து எறிபொருளின் மீப்பெருதூரம்

எறிபொருளானது சாய்தளத்திலிருந்து மீப்பெரு தூரத்திலிருக்கும்போது, சாய்தளத்திற்குச் செங்குத்துத் திசையில் அதன் வேகம் பூச்சியமாகிறது.

சாய்தளத்திற்குச் செங்குத்துத் திசையில் இயக்கத்தைக் கருதுக.

தொடக்க வேகம் $= u \text{ Sin } (\alpha - \beta)$

எதிர் முடுக்கம் $= g \cos \beta$

தூரம் = செங்குத்துத் திசையில் மீப்பெரு தூரம் $= S$ என்க.

இறுதிவேகம் $= 0$

$\therefore$ $v^2 = u^2 + 2as$ என்னும் சமன்பாட்டிலிருந்து,

$$0 = u^2 \sin^2(\alpha - \beta) - 2g\cos\beta \cdot S$$

$$\therefore \text{ மீப்பெருதூரம் } S = \frac{u^2 \sin^2(\alpha - \beta)}{2g\cos\beta} \quad \ldots \quad (4)$$

5. சாய்தளத்தில் கீழ்முக இயக்கம் (Motion down the inclined plane)

எறிபொருள் கீழ்முகமாக எறியப்படுவதால், ஈர்ப்பு முடுக்கத்தின் கூறுகள் எறிவேகத்தின் கூறுகளின் திசையிலேயே செயல்படும். ஆகவே, (1), (2), (3) ஆகிய தொடர்புகளில் g க்குப் பதிலாக $-g$ என்று பிரதியிட்டு முறையே பறப்பு நேரம், வீச்சு, மீப்பெரு வீச்சு ஆகியவற்றைப் பெறலாம்.

$$\text{சாய்தளத்தில் கீழ்முகப் பறப்பு நேரம்} = \frac{2u\sin(\alpha + \beta)}{g\cos\beta}$$

$$\text{சாய்தளத்தில் கீழ்முக வீச்சு} = \frac{2u^2\sin(\alpha + \beta)\cos\alpha}{g\cos^2\beta}$$

$$\text{சாய்தளத்தில் கீழ்முக மீப்பெரு வீச்சு} = \frac{u^2}{g(1 - \sin\beta)}$$

மாதிரி 78. தரப்பட்டுள்ள ஒரு திசைவேகத்துடன் ஒரு கிடைத்தின்மேல் மீப்பெரு வீச்சு 3000 மீட்டர்கள். கிடைத்தளத்துடன் 30° சாய்விலுள்ள ஒரு சாய்தளத்தில் மேல்முக, கீழ்முக மீப்பெரு வீச்சுக்களைக் காண்க.

தீர்வு: மீப்பெரு கிடைவீச்சு $\frac{u^2}{g} = 3000$ மீட்டர்கள்

$\beta = 30°$ சாய்தளத்தில் மேல்முக மீப்பெரு வீச்சு $= g\,\dfrac{u^2}{(1+\sin\beta)}$

$$= \frac{30000}{1 + \sin 30°}$$

$$= 3000 \times \tfrac{2}{3}$$

$= 2000$ மீட்டர்கள்

$$\text{சாய்தளத்தில் கீழ்முக மீப்பெரு வீச்சு} = \frac{u^2}{g(1 - \sin\beta)}$$

$$= \frac{3000}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= 3000 \times \tfrac{2}{1}$$

$= 6000$ மீட்டர்கள்.

மாதிரி 79. தரப்பட்டுள்ள ஒரு திசைவேகத்திற்கு α சாய்வுடைய ஒரு சாய்தளத்தில் கீழ்முக மீப்பெரு வீச்சுக்கும், கீழ்முக மீப்பெருவீச்சுக்கு மிடையேயுள்ள விகிதம் $1 + \text{Sin}\ \alpha : 1 - \text{Sin}\ \alpha$ என்று காட்டுக. (மதுரை பி.எஸ்ஸி. 1969 ஏப்.)

தீர்வு: எறிவேகம் $= u$ என்க.

சாய்தளத்தில் கீழ்முக மீப்பெரு வீச்சு $\dfrac{u^2}{g\,(1 - \text{Sin}\ \beta)}$

சாய்தளத்தில் மேல்முக மீப்பெரு வீச்சு $= \dfrac{u^2}{g\,(1 + \text{Sin}\ \beta)}$

$$\therefore \quad \frac{\text{கீழ்முக மீப்பெரு வீச்சு}}{\text{மேல்முக மீப்பெரு வீச்சு}} = \frac{1 + \text{Sin}\ \beta}{1 - \text{Sin}\ \beta}$$

மாதிரி 80. h உயரமுள்ள ஒரு குன்றின் மேல் நிற்கும் ஓர் எதிரியின் நிலையின் ஏற்றக்கோணம் குன்றின் அடியிலிருந்து β ஆகும். எதிரியைச் சுட்டு வீழ்த்த வேண்டுமானுல் துப்பாக்கிக் குண்டின் தொடக்க வேகம் $\sqrt{gh\,(1 + \text{cosec}\ \beta)}$ ஐ விடக் குறையக் கூடாதென்று காட்டுக.

தீர்வு: எதிரியின் நிலை β சாய்வுள்ள ஒரு சாய்தளத்தில் மேலிருப்பதாகக் கொள்ளலாம். எனவே, எறிபுள்ளியிலிருந்து எதிரியின் நிலைக்குள்ள தூரமானது சாய்தளத்தின் மீதுள்ள வீச்சு ஆகும். சாய்தள உயரம் h ஆகையால்,

$$\text{சாய்தள வீச்சு} = h\ \text{cosec}\ \beta.$$

குண்டின் தொடக்க வேகம் u என்றும், எறிகோணம் α என்றும் கொள்க.

$$\therefore \quad \text{சாய்தள வீச்சு} = \frac{2\,u^2\ \text{Sin}\ (\alpha - \beta)\cos\alpha}{g\cos^2\beta}$$

$$\therefore \quad \frac{2\,u\ \text{Sin}\ (\alpha - \beta)\cos\alpha}{g\cos^2\beta} = h\ \text{cosec}\ \beta$$

$$\therefore \quad u^2 = \frac{gh\ \text{cosec}\ \beta.\cos^2\beta}{2\ \text{Sin}\ (\alpha - \beta).\cos\alpha}$$

$$= \frac{gh\ \text{cosec}\ \beta.\cos^2\beta}{\text{Sin}\ (2\alpha - \beta) - \text{Sin}\ \beta}$$

h, β ஆகியவை மாறிலியாகையால் u மீச்சிறிதாக யிருக்க வேண்டுமானுல் $\text{Sin}\ (2\alpha - \beta)$ மீப்பெரிதாக யிருக்கவேண்டும்.

$$\therefore \quad \text{Sin}\ (2\alpha - \beta) = 1$$

$\therefore$ u^2 இன் மீச்சிறு மதிப்பு $= \dfrac{gh \operatorname{cosec}\beta \cdot \cos^2\beta}{1 - \operatorname{Sin}\beta}$

$$= \frac{gh \operatorname{cosec}\beta\,(1 - \operatorname{Sin}^2\beta)}{1 - \operatorname{Sin}\beta}$$

$$= gh \operatorname{cosec}\beta\,(1 + \operatorname{Sin}\beta)$$

$$= gh\,(\operatorname{cosec}\beta + 1)$$

$\therefore$ u இன் மீச்சிறு மதிப்பு $= \sqrt{gh\,(1 + \operatorname{cosec}\beta)}$

மாதிரி 81. β சாய்விலுள்ள ஒரு சால்தளத்தின் அடியிலிருந்து u திசைவேகத்துடன் கிடைத்தளத்துடன் α கோணச் சாய்வில் ஒரு துகள் எறியப்படுகிறது. அத்துகள் சாய்தளத்தில் செங்குத்தாக மோதினுல், $\cot\beta = 2\tan(\alpha - \beta)$ என்று நிறுவுக.

தீர்வு: எறிவேகம் u-வின் சாய்தளக் கூறு $u\cos(\alpha - \beta)$.

ஈர்ப்பு முடுக்கம் g யின் சாய்தளக் கூறு $= -g\operatorname{Sin}\beta$. பறப்பு நேரம் T என்க. எறிபொருளானது சாய்தளத்தின் மீது செங்குத்தாக மோதுவதால் மோதும்போது அதன் சாய்தள வேகக் கூறு பூச்சியமாகிறது.

$\therefore$ $v = u + at$ சமன்பாட்டிலிருந்து,

$$0 = u\cos(\alpha - \beta) - g\operatorname{Sin}\beta \cdot T.$$

அல்லது, $T = \dfrac{u\cos(\alpha - \beta)}{g\operatorname{Sin}\beta}$

ஆனுல், $T = \dfrac{2u\operatorname{Sin}(\alpha - \beta)}{g\cos\beta}$

$$\therefore \frac{2u\operatorname{Sin}(\alpha - \beta)}{g\cos\beta} = \frac{u\cos(\alpha - \beta)}{g\operatorname{Sin}\beta}$$

$$\therefore \frac{2\operatorname{Sin}(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\cos\beta}{\operatorname{Sin}\beta}$$

அல்லது, $2\tan(\alpha - \beta) = \cot\beta$

மாதிரி 82. கிடைத்தளத்துடன் β ஏற்றக் கோணத்திலுள்ள ஒரு குன்றின்மேல் ஒரு குண்டு α கோணத்தில் சுடப்படுகிறது. அக்குண்டு குன்றினைக் கிடைத்தளமாகத் தாக்கினுல் $\tan\alpha = 2\tan\beta$ என்றும், செங்குத்தாகத் தாக்கினுல் $\tan\alpha = 2\tan\beta + \cot\beta$ என்றும் நிறுவுக.

தீர்வு: குண்டு குன்றைக் கிடைத்திசையில் தாக்குவதால் நிலைக்குத்து விசை பூச்சியமாகிவிடுகிறது. எனவே, பறப்பு நேரம் T எனில், T நேரத்தில் நிலைக்குத்து வேகம் மறைந்து விடுகிறது. தொடக்கத் திசைவேகம் u எனில், தொடக்க நிலைகுத்து வேகம் $u \text{ Sin } \alpha$ ஆகும்.

$$\therefore \quad O = u \text{ Sin } \alpha - g . T$$

அல்லது, $$T = \frac{u \text{ Sin } \alpha}{g}$$

ஆனால், T என்பது β சாய்தளத்தின் மீதுள்ள வீச்சு. ஆகையால்,

$$T = \frac{2 u \text{ Sin } (\alpha - \beta)}{g \cos \beta}$$

$$\therefore \quad \frac{2 u \text{ Sin } (\alpha - \beta)}{g \cos \beta} = \frac{u \text{ Sin } \alpha}{g}$$

அல்லது, $$2 (\text{Sin } \alpha \cos \beta - \cos \alpha \text{ Sin } \beta) = \text{Sin } \alpha \cos \beta .$$

$$\therefore \quad \text{Sin } \alpha \cos \beta = 2 \cos \alpha . \text{ Sin } \beta$$

அல்லது, $$\tan \alpha = 2 \tan \beta .$$

இரண்டாவதாக, குண்டு சாய்தளத்தைச் செங்குத்தாகத் தாக்க வேண்டுமானால் நிபந்தனை $\cot \beta = 2 \tan (\alpha - \beta)$ என்று கண்டோம்.

அதாவது, $$\cot \beta = 2 . \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha . \tan \beta}$$

$$\therefore \quad \cot \beta + \tan \alpha = 2 (\tan \alpha - \tan \beta)$$

$$\therefore \quad \tan \alpha = 2 \tan \beta + \cot \beta .$$

மாதிரி 83. எறிபுள்ளி வழியே செல்லும் ஒரு சாய்தளத்தின்மேல் ஒரு எறிபொருளின் மீப்பெரு வீச்சு அதன் பறப்பு நேரத்தில் ஒரு துகள் ஓய்விலிருந்து கீழே விழும் தூரத்திற்குச் சமம் என்று காட்டுக.

தீர்வு: சாய்தளத்தின் சாய்வு β என்றும், எறிகோணம் α என்று கொண்டால்,

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2} \text{ என்று நாமறிவோம்.}$$

துகளின் பறப்பு நேரம் $T - \dfrac{2u \operatorname{Sin}(\alpha - \beta)}{g \cos \beta}$

ஒய்விலிருந்து கீழே விழும் பொருள் T நேரத்தில் செல்லும் தூரம்

$$S = ut + \tfrac{1}{2} at^2$$
$$= O + \tfrac{1}{2} g T^2$$
$$= \tfrac{1}{2} g \cdot \frac{4u^2 \operatorname{Sin}^2(\alpha - \beta)}{g^2 \cos^2 \beta}$$

$$= \frac{u^2}{g \cos \beta} [2 \operatorname{Sin}(\alpha - \beta)$$

$$= \frac{u^2}{g \cos^2 \beta} [1 - \cos 2(\alpha - \beta)], \quad \left(\text{ஆனால் } \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right)$$

$$= \frac{u^2}{g \cos \beta} \left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta \mid 2\beta\right)\right]$$

$$= \frac{u^2}{g \cos^2 \beta} \left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)\right]$$

$$= \frac{u^2 (1 - \operatorname{Sin} \beta)}{g (1 - \operatorname{Sin}^2 \beta)}$$

$$= \frac{u^2}{g (1 + \operatorname{Sin} \beta)}$$

= சாய்தளத்தின்மேல் மீப்பெரு வீச்சு.

மாதிரி 84. கிடைத்தளத்துடன் β சாய்விலுள்ள ஒரு சாய் தளத்தின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து கிடைத்தளத்துடன் α கோணத்தில் ஒரு கல் எறியப்படுகிறது. கல்லின் எறிபாதை சாய்தளத்தின் மீப்பெரு சரிவுக் கோட்டைக் கொண்டுள்ள நிலைத்தளத்திலமைந்துள்ளது. சாய்தளத்திலிருந்து மீப்பெரு தூரத்தில் கல்லின் பாதையிலுள்ள புள்ளியின் சாய்வுக் கோணம் γ எனில்,

$$2 \tan \gamma = \tan \alpha + \tan \beta$$

என்று காட்டுக.

தீர்வு: P என்பது சாய்தளத்திலிருந்து மீப்பெரு தூரத்தி லுள்ள புள்ளியெனில், P-யில் கல்லின் திசை வேகம் சாய்தளத் திற்கு இணையான திசையில் இருக்கும். எறிபுள்ளி வழிக் கிடை,

நிலை அச்சுக்களைக் குறித்து P-யின் அச்சுத் தூரங்கள் (h, k) என்க. P-யின் ஏற்றக்கோணம் γ ஆதலின்,

$$\tan \gamma = \frac{k}{h} \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

எறிபாதையின் சமன்பாடு,

$$y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2\,u^2 \cos^2 \alpha} \quad \ldots \quad (2)$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \tan \alpha - \frac{gx}{u^2 \cos^2 \alpha} \quad \ldots \quad (3)$$

ஆனால் $\frac{dy}{dx}$ என்பது பாதையிலுள்ள எந்த புள்ளியிலும் வரையப்படும் தொடுகோட்டின் சரிவு என்று நாமறிவோம். P-யில் கல்லின் திசைவேகம் சாய்தளத்திற்கு இணையாக இருப்பதால் Pயில் வரையப்படும் தொடுகோட்டின் சரிவு $\tan \beta$ ஆகும்.

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \tan \beta,\ x = h,\ y = k$ என்று பிரதியிடவும்

$$\tan \beta = \tan \alpha - \frac{gh}{u^2 \cos^2 \alpha} \quad \ldots \quad (4)$$

மேலும் $P\,(h, k)$ கல்லின் பாதையிலிருப்பதால் (2) இலிருந்து,

$$k = h \tan \alpha - \frac{gh^2}{2\,u^2 \cos^2 \alpha}$$

அல்லது, $$\frac{k}{h} = \tan \alpha - \frac{gh}{2\,u^2 \cos^2 \alpha}$$

ஆனால் $$\frac{k}{h} = \tan \gamma$$

$$\therefore \quad \tan \gamma = \tan \alpha - \frac{gh}{2\,u^2 \cos^2 \alpha}$$

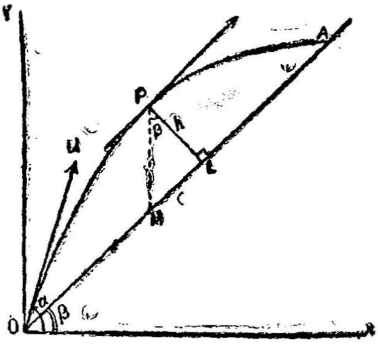
(4) இலிருந்து $\frac{gh}{u^2 \cos^2 \alpha} = \tan \alpha - \tan \beta$ என்று பெறப்படுகிறது.

$$\therefore \quad \tan \gamma = \tan \alpha - \tfrac{1}{2} (\tan \alpha - \tan \beta)$$
$$= \tfrac{1}{2} \tan \alpha + \tfrac{1}{2} \tan \beta$$

அல்லது, $$2 \tan \gamma = \tan \alpha + \tan \beta.$$

மாதிரி 85. தரப்பட்டுள்ள ஒரு திசை வேகத்துடன் எறியப் படும் ஓர் எறிபொருளின் சாய்தள மீப்பெரு வீச்சு, சாய்தளத் தின் மேல், பாதையின் மீப்பெரு நிலைக்குத்து உயரத்தைப் போல் நான்கு மடங்கு என்று காட்டுக.

தீர்வு: கிடைத்தளத்துடன் சாய்தளத்தின் சாய்வுக் கோணம் β என்றும், எறிவேகம் u, எறிகோணம் α என்றும் கொள்க. எறிபொருளின் பாதையில் P என்னும் புள்ளியைக் கருதுக. P-யிலிருந்து சாய்தளத்திற்குச் செங்குத்தாக PL என்னும் செங்குத்துக் கோடும், சாய்தளத்தை M இல் வெட்டுமாறு PM என்னும் நிலைக்குத்துக் கோடும் வரைக.



படம் 57

$\therefore$ PL = சாய்தளத்திலிருந்து P யின் தூரம் = h என்க.

PM = சாய்தளத்திலிருந்து P யின் நிலைக்குத்துத் தூரம்.

$L\hat{P}M = \beta$ என்று எளிதில் காணலாம்.

$\therefore PM = h \operatorname{Sec} \beta$.

நிலைக்குத்துயரம் PM மீப்பெரிதாக யிருக்க வேண்டுமாயின் h மீப்பெரிதாக யிருக்கவேண்டும்; ஆனால், h மீப்பெரிதாயிருக்கும்போது P யில் வரையப்படும் தொடுகோடு சாய்தளத்திற்கு இணையாகயிருக்கும். ஆகவே, h மீப்பெரிதாகயிருக்கும்போது, சாய்தளத்திற்குச் செங்குத்துத் திசையில் எறிபொருளின் திசை வேகக் கூறு பூச்சியமாகும்.

சாய்தளத்தில் வீச்சு மீப்பெரிதாயிருக்கும்போது $\alpha = \frac{\pi}{4} = \frac{\beta}{2}$ என்றும், சாய்தளத்திற்குச் செங்குத்துத் திசைவேகக் கூறு $u \operatorname{Sin} (\alpha - \beta)$ என்றும் நாமறிவோம். சாய்தளத்திலிருந்து செங்குத்துத் தூரம் h ஆக யிருக்கும் போது, செங்குத்துத் திசை வேகக் கூறு பூச்சியமாகும்.

$$\therefore \quad v^2 = u^2 + 2\,as$$

என்னும் சூத்திரத்திலிருந்து,

$$O = u^2 \operatorname{Sin}^2 (\alpha - \beta) - 2\,g \cos \beta\, h$$

அல்லது,

$$h = \frac{u^2 \operatorname{Sin}^2 (\alpha - \beta)}{2\,g \cos \beta}$$

$$= \frac{u^2}{4\,g \cos \beta} \,.\, 2 \operatorname{Sin}^2 (\alpha - \beta)$$

$$= \frac{u^2}{4\,g \cos \beta} [1 - \cos 2\,(\alpha - \beta)]$$

$$= \frac{u^2}{4\,g \cos \beta} \left[1 - \cos \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)\right]$$

ஏனெனில் $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}$

$$= \frac{u^2}{4\,g \cos \beta}\,(1 - \operatorname{Sin} \beta)$$

$$\therefore \quad h \operatorname{See} \beta = \frac{u^2 (1 - \operatorname{Sin} \beta}{4\,g \cos^2 \beta}$$

$$= \frac{x^2 (1 - \operatorname{Sin} \beta)}{4\,g\,(1 - \operatorname{Sin}^2 \beta)}$$

$$= \frac{1}{4}\;\frac{u^2}{g\,(1 + \operatorname{Sin}^2 \beta)}$$

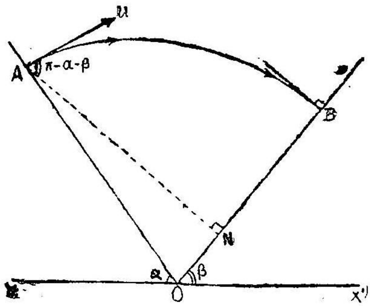
$= \frac{1}{4}$. சாய்தளத்தின் மீப்பெரு வீச்சு

$\therefore$ (சாய்தளத்தின் மேல் மீப்பெரு வீச்சு நிலைக்குத்துயரம்)
= சாய்தளத்தில் மீப்பெரு வீச்சு

மாதிரி 86. கிடைத்தளத்துடன் α, β சாய்வுகளிலுள்ள இரு சாய்தளங்கள் ஒரு கிடைத்தில் வெட்டுகின்றன. அவற்றின் வெட்டுக் கோட்டிலிருந்து a தூரத்தில் முதல் தளத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து அத்தளத்திற்குச் செங்குத்தாக எறியப்படும் ஒரு துகள் இரண்டாவது தளத்தில் செங்குத்தாக மோதுகிறது. துகளின் எறிவேகம்

$$\operatorname{Sin} \beta \left[\frac{2\,ag}{\operatorname{Sin} \alpha - \operatorname{Sin} \beta \cos (\alpha + \beta)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

என்று காட்டுக.



படம் 58

தீர்வு: OA, OB என்பன XOX^1 எனும் கிடைத் தளத்துடன் α, β கோணங்களில் சாய்ந்துள்ள இரு சாய் தளங்கள் A என்பது OA தளத்தில் O-விலிருந்து a தூரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளி. A-யிலிருந்து OA-க்குச் செங்குத்தாக u திசை வேகத்துடன் எறியப்படும் துகள் OB தளத்தைச் செங்குத்தாகத் தாக்குகிறது.

$AN \perp OB$ வரைக

$$A\hat{O}N = \pi - \alpha - \beta.$$

$$\therefore \quad AN = a \operatorname{Sin}(\pi - \alpha - \beta) = a \operatorname{Sin}(\alpha + \beta)$$

AN உடன் u இன் சாய்வு $= A\hat{O}N = \pi - \alpha - \beta$.

AN என்பது OB க்குச் செங்குத்தாக யிருப்பதால்,

OB திசையில் u-வின் கூறு

$$= u \operatorname{Sin}(\pi - \alpha - \beta)$$

$$= u \operatorname{Sin}(\alpha + \beta)$$

OBக்குச் செங்குத்துத் திசையில் u-வின் கூறு

$$= u \cos(\pi - \alpha - \beta)$$

துகளானது OB தளத்தில் செங்குத்தாக மோதுவதால், மோதுகின்ற கணத்தில் OBக்கு இணையான திசையில் வேகக்கூறு பூச்சியமாகும்.

ஈர்ப்பு முடுக்கம் நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கிச் செயல்படுவதால், OB திசையில் g யின் கூறு $-$ Sin β ஆகும்.

$\therefore$ $v = u + at$ என்னும் சமன்பாட்டிலிருந்து,

$$O = u \operatorname{Sin}(\alpha + \beta) - g \operatorname{Sin}\beta \;\; t$$

அல்லது, $$t = \frac{u \operatorname{Sin}(\alpha + \beta)}{g \operatorname{Sin}\beta}$$

t நேரத்தில் துகள் A யிலிருந்து OB க்குச் செங்குத்துத் திசையில் சென்ற தூரம் $= AN = a \sin(\alpha + \beta)$; A யிலிருந்து OB க்குச் செங்குத்துத் திசையில் g யின் கூறு $= g \cos \beta$;

OB க்குச் செங்குத்துத் திசையில் தொடக்க வேகம்

$$= -\cos(\alpha + \beta).$$

$$\therefore \quad S = ut + \tfrac{1}{2} at^2$$

என்னும் சமன்பாட்டிலிருந்து,

$$a \sin(\alpha + \beta) = -u \cos(\alpha + \beta).\, t + \tfrac{1}{2} g \cos \beta.\, t^2$$

ஆனால், $t = \dfrac{u \sin(\alpha + \beta)}{g \sin \beta}$

$$\therefore \quad a \sin(\alpha + \beta) = -u \cos(\alpha + \beta).\, \frac{u \sin(\alpha + \beta)}{g \sin \beta}$$

$$+ \tfrac{1}{2} g \cos \beta.\, \frac{u^2 \sin^2(\alpha + \beta)}{g^2 \sin^2 \beta}$$

அல்லது, $a = \dfrac{-u^2 \cos(\alpha + \beta)}{g \sin \beta} + \dfrac{u^2 \cos \beta.\, \sin(\alpha + \beta)}{2 g \sin^2 \beta}$

$$= \frac{u^2}{2 g \sin^2 \beta} [-2 \cos(\alpha + \beta).\, \sin \beta + \sin(\alpha + \beta).\, \cos \beta]$$

$$= \frac{u^2}{2 g \sin^2 \beta} [\sin(\alpha + \beta).\, \cos \beta - \cos(\alpha + \beta).\, \sin \beta$$

$$- \cos(\alpha + \beta) \sin \beta]$$

$$= \frac{u^2}{2 g \sin^2 \beta} [\sin(\alpha + \beta - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$$

$$= \frac{u^2}{2 g \sin^2 \beta} [\sin \alpha \sin \beta.\, \cos(\alpha + \beta)$$

$$\therefore \quad u^2 = \frac{2 ag.\, \sin^2 \beta}{\sin \alpha - \sin \beta \cos(\alpha + \beta)}$$

அல்லது, $u = \sin \beta \left[\dfrac{2 ag}{\sin \alpha - \sin \beta \cos(\alpha + \beta)}\right]^{\frac{1}{2}}$

பயிற்சி 9

1. R_1, R_2 என்பன ஒரு சாய்தளத்தின் மேல்முக, கீழ்முக மீப்பெரு வீச்சுகளெனில் $\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$ என்பது சாய்தளத்தின் சாய்வைச் சாரா மாறி என்று நிறுவுக.

2. தரப்பட்ட ஒரு திசைவேகத்திற்கு, ஒரு சாய்தளத்தில் கீழ்முக மீப்பெரு வீச்சு மேல்முக வீச்சைப்போல் மூன்று மடங்கு எனில், கிடைத்தளத்துடன் தளத்தின் சாய்வு 30° என்று காட்டு.

3. 2 இல் 1 சாய்வில் 5400 அடி தூரத்திலுள்ள ஒரு குன்றின் உச்சியிலிருக்கும் எதிரியைக் குன்றின் அடியிலிருக்கும் ஒரு போர்வீரன் தன் துப்பாக்கியால் சுடுகிருன். துப்பாக்கிக் குண்டு கிடைத்தளத்துடன் 60° சாய்வில் சுடப்பட்டால், எதிரி சுடப்பட வேண்டுமாளுல் குண்டின் வேகம் என்னவாக யிருக்கவேண்டுமென்று காண்க (விடை : $360\sqrt{2}$ அடி/வி.)

4. கிடைத்தளத்துடன் 60° சாய்விலுள்ள ஒரு சாய்தளத்தின் உச்சியிலிருந்து ஒரு பொருள் எறியபபடுகிறது. 30° ஏற்றக் கோணத்தில் எறியும்போது கிடைக்கின்ற கீழ்முக வீச்சு அதே வேகத்துடன் 30° இறக்கக் கோணத்தில் எறியும்போது கிடைக்கின்ற கீழ்முக வீச்சைப்போல் இரு மடங்கு என்று காட்டுக.

5. u திசைவேகத்டன் எறியப்படும் ஒரு பொருள் எறிபுள்ளி வழியே கிடைத்தளத்துடன் β சாய்வில் செல்லும் ஒரு சாய்தளத்தில் செங்குத்தாக மோதுகிறது. பறப்பு நேரம் $\dfrac{2u}{g\sqrt{1+3\,\mathrm{Sin}^2\beta}}$ என்றும், சாய்தளத்தில் வீச்சு $\dfrac{2u^2\,\mathrm{Sin}\,\beta}{g(1+3\,\mathrm{Sin}^2\beta)}$ என்றும், எறிபுள்ளிக்குமேல் மோதுபுள்ளியின் நிலைக்குத்துயரம் $\dfrac{2x^2\,\mathrm{Sin}^2\beta}{g(1+3\,\mathrm{Sin}^2\beta)}$ என்றும் காட்டுக.

6. ஒரு குன்று கிடைத்தளத்துடன் 30° சாய்விலுள்ளது. குன்றின்மேல் ஒரு புள்ளியிலிருந்து இரண்டு துகள் எறியப்படுகின்றன; ஒன்று 45° ஏற்றக்கோணத்திலும், மற்றது அதே வேகத்துடன் 45° இறக்கக் கோணத்திலும் எறியப்பட்டால் அவற்றின் வீச்சுக்கள் 15 : 4 என்ற விகிதத்திலிருக்குமென்று காட்டு.

7. கிடைத்தளத்துடன் 60° சாய்விலுள்ள ஒரு சாய்தளத்திலிருந்து d செங்குத்துத் தூரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரு பொருள் எறியப்படுகிறது. அதன் திசை வேகத்தின் வர்க்கம் $\frac{1}{2}gd(\sqrt{13}-1)$ஐ விடக் குறைவாகயிருந்தால் அது அத்தளத்தில் செங்குத்தாக விழ முடியாதென்று காட்டு.

8. O என்னும் புள்ளியிலிருந்து எறியப்படும் ஒரு துகள், கிடைத்தளத்துடன் α சாய்வில் O வழியே செல்லும் ஒரு சாய்தளத்தில் O-விலிருந்து α தூரத்தில் செங்குத்தாக மோதுகிறது. பயணத்தின்போது அந்த இடத்திலிருந்து அப்பொருளின் மீப்பெரு தூரம் $\frac{1}{4}\, d \cot \alpha$ என்று காட்டு.

9. ஒரே நிலைத்தளத்திலுள்ள இரு இணை கோடுகள் ஒவ்வொன்றும் கிடைக்தளத்துடன் α கோணச் சாய்விலுள்ளது. இரு கோடுகளுக்கும் நடுவிலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரு துகள் ஒரு கோட்டை உராய்ந்து சென்று அடுத்த கோட்டில் செங்குத்தாக விழுமாறு எறியப்படுகிறது. அதன் எறிதிசை ஒவ்வொரு நேர்கோட்டுடனும் $\tan^{-1} [(\sqrt{2} - 1) \cot \alpha]$ சாய்விலுள்ளது என்று காட்டுக.

கவசப் பரவளைவு (Enveloping parabola)

O என்னும் ஒரே புள்ளியிலிருந்து u என்னும் ஒரே வேகத்துடன் பல்வேறு எறிகோணங்களில் ஒரே நிலைத்தளத்தில் எண்ணற்ற துகள்கள் எறியப்படுகின்றன. இத்துகள்களின் எறிபாதைகள் யாவும் ஒரே நிலைத்தளத்திலுள்ள பரவளைவுகளாகும். இவற்றுள் ஒரு துகளின் எறிகோணம் α எனில், எறிபுள்ளியை ஆதியாகவும், எறிபுள்ளி வழிக் கிடைத்தளத்தை x அச்சாகவும் கொண்டு அதன் பரவளைவுச் சமன்பாடு

$$y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2u^2 \cos^2 \alpha}$$

$$= x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2u^2} \cdot \operatorname{Sec}^2 \alpha \qquad \ldots \quad (1)$$

இச்சமன்பாட்டில் α என்பது எறிபொருளுக்கேற்ப மாறுபடுகின்ற துணையலகு ஆகும். எனவே, இச்சமன்பாட்டை α குறித்து வகையீடு செய்க.

$$O = x \operatorname{Sec}^2 \alpha - \frac{gx^2}{2u^2} \cdot 2 \operatorname{Sec}^2 \alpha \cdot \tan \alpha$$

$\operatorname{Sec} \alpha \neq 0$ ஆகையால், அதை நீக்கிவிடலாம்.

$$\therefore \quad O = x - \frac{gx^2}{u^2} \cdot \tan \alpha$$

அல்லது, $$\tan \alpha = \frac{u^2}{gx}. \qquad \ldots \quad (2)$$

சமன்பாடு (1) இலிருந்து,

$$y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2u^2}(1 + \tan^2 \alpha)$$

என்று பெறுகிறோம். இதில் $\tan \alpha = \frac{u^2}{gx}$ என்று பிரதியிடவும்.

$$y = x.\ \frac{u^2}{gx} - \frac{gx^2}{2u^2}\left(1 + \frac{u}{g^2 x^2}\right)$$

$$= \frac{u^2}{g} - \frac{gx^2}{2u^2} - \frac{u^2}{2g}$$

$$= \frac{u^2}{2g} - \frac{gx^2}{2u^2}$$

$$\therefore \quad \frac{gx^2}{2u^2} = -y = \frac{u^2}{2g}$$

அல்லது, $x^2 = \frac{2u^2}{g}\left(-y + \frac{u^2}{2g}\right)$

$$= -\frac{2u^2}{g}\left(y - \frac{u^2}{2g}\right)$$

எறிபுள்ளிக்கு மேலே இயக்கு வரையின் உயரம் h எனில்,

$h = \frac{u^2}{2g}$ ஆகும்.

$$\therefore \quad x^2 = -4h(y - h)$$

இச்சமன்பாடு எல்லாத் துகள்களின் பரவளைவுப் பாதைகளின் கவச வளைவு ஆகும். ஆனால் இச்சமன்பாடு ஒரு பரவளைவின் சமன்பாடாகையால், பரவளைவுப் பாதைகளின் கவச வளைவு ஆகும். இக்கவசப் பரவளைவின் அச்சு நிலைக்குத்தாகவும், உச்சி (O, h) என்ற புள்ளியிலும் உள்ளன. எனவே, இக்கவசப் பரவளைவின் உச்சி எல்லாப் பரவளைவிற்கும் பொதுவான இயக்கு வரையின் மேலிருக்கும். கவசப் பரவளைவின் குவியமானது எல்லாப் பொருள்களின் எறிபுள்ளியாகும்.

இக்கவசப் பரவளைவு மற்ற எல்லாப் பரவளைவுகளையும் வெளிப்புறமாகத் தொடுமாகையால், எந்த எறிபொருளும் இக் கவசப் பரவளைவிற்கு அப்பால் செல்லமுடியாது. எனவே, ஒரு குறிப்பிட்ட திசையில் மீப்பெரு வீச்சு என்பது எறிபுள்ளியி

லிருந்து மேற்கண்ட திசை இக்கவசப் பரவளைவினைச் சந்திக்கும் புள்ளிவரையுள்ள தூரமேயாகும்.

மாதிரி 87. நிலைக்குத்தாக மேல் நோக்கி ஏவப்பட்ட ஒரு ராக்கெட் (Rocket) தரையிலிருந்து மேலே அதன் மீப்பெரு உயரமாகிய h அடி உயரத்திற்குச் சென்றதும் வெடித்துச் சிதறுகிறது. சிதறுண்ட ஒவ்வொரு துகளும் u எனும் ஒரே வேதத்துடன் புறப்பட்டால், எல்லாத் துண்டுகளும் தரையை அடையும்போது $\frac{u\,(x^2 + 2\,gh)^{\frac{1}{2}}}{g}$ ஆரையுள்ள ஒரு வட்டத்திற் குள்ளமையுமென்று காட்டுக.

தீர்வு : கவசப் பரவளைவின் சமன்பாடு $x^2 = -\frac{2u^2}{g}\left(y \quad \frac{u^2}{2\,g}\right)$ ஆகும். தரை h அடி ஆழத்திலிருப்பதால், $y = -h$ ஆகும். எனவே, துகள் தரையைச் சந்திக்கும் புள்ளிகளின் அதிகபட்ச

$$x^2 = -\frac{2\,u^2}{g}\left(y - \frac{u^2}{2\,g}\right)$$

என்னும் சமன்பாட்டின் மூலம் தரப்படும்.

$$\text{அதாவது, } x^2 = \frac{u^2}{g^2}\,(2\,gh + u^2)$$

$$\text{அல்லது, } \quad x = \frac{u\,(u^2 + 2\,gh)^{\frac{1}{2}}}{g}$$

எனவே, எல்லாத்துகள்களும் $\frac{u\,(u^2 + 2\,gh)^{\frac{1}{2}}}{g}$ ஐ ஆரையாகக் கொண்ட ஒரு வட்டத்திற்குள்ளமையும்.

மாதிரி 88. ஒரு துப்பாக்கியிலிருந்து சுடப்பட்ட ஒரு குண்டு அதன் முனையிலிருந்து u வேகத்துடன் கிளம்புகிறது. h உயரத்தில் பறந்து கொண்டிருக்கும் ஒரு ஆகாய விமானம் சுடப்படக்கூடிய அதிகபட்ச கிடைத்தூரம் $\frac{u}{g}\sqrt{u^2 - 2\,gh}$ என்றும், அப்போது துப்பாக்கியின் ஏற்றக்கோணம் $\tan^{-1}\frac{u}{\sqrt{u^2-2gh}}$ என்றும் காட்டுக.

தீர்வு: துப்பாக்கி வெளிக் கிளம்பக்கூடிய எல்லாக் குண்டு களின் பாதைகளின் கவசப் பரவளைவுச் சமன்பாடு

$$x^2 = -\frac{2u^2}{g}\left(y - \frac{u^2}{2g}\right) \text{ ஆகும்.}$$

ஆகாய விமானம் h உயரத்தில் பறப்பதால், $y = h$ ஆகும்.

$$\therefore \quad x^2 = -\frac{2u^2}{g}\left(h - \frac{u^2}{2g}\right) = \frac{u^2}{g^2}(u^2 - 2gh)$$

$$\therefore \quad x = \frac{u}{g}\sqrt{u^2 - 2gh}$$

எனவே, ஆகாய விமானம் சுடப்படுவதற்குச் சாத்தியமான அதிகபட்ச கிடைத் தூரம் $\frac{u}{g}\sqrt{u^2 - 2gh}$ ஆகும்.

மேலும், ஆகாய விமானம் சுடப்படும்போது, அதன் அச்சுத் தூரங்கள் $\left[\frac{u}{g}\sqrt{u^2 - 2gh},\ h\right]$ ஆகும். இந்தப் புள்ளி

$$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2u^2}(1 + \tan^2\alpha)$$

என்னும் பரவளைவுச் சமன்பாட்டிலிருக்கும்.

$$\therefore \quad h = \frac{u}{g}\sqrt{u^2 - 2gh}\,.\tan\alpha - \frac{g}{2u^2}\cdot\frac{u^2}{g^2}(u^2 - 2gh)(1 + \tan^2\alpha)$$

அல்லது, $(u^2 - 2gh)\tan^2\alpha - 2u\sqrt{u^2 - 2gh}\tan\alpha + u^2 = 0.$

அதாவது, $\{\sqrt{u^2 - 2gh}\tan\alpha - u\}^2 = 0$;

அல்லது, $\tan\alpha = \dfrac{u}{\sqrt{u^2 - 2gh}}$

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{u}{\sqrt{u^2 - 2gh}}$$

ஆகவே, விமானம் சுடப்படும்போது துப்பாக்கியின் ஏற்றக் கோணம் $\tan^{-1}\left(\dfrac{u}{\sqrt{u^2 - 2gh}}\right)$ ஆகும்.

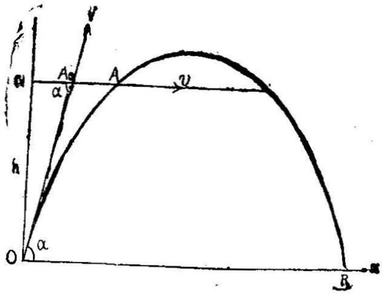
நகர்ந்து கொண்டிருக்கும் பொருளைத் தாக்கும் எறிபொருள்

மாதிரி 89. ஒரு விமானம் h எனும் மாறு உயரத்தில் v எனும் மாறு வேகத்துடன் பறந்து கொண்டிருக்கிறது. கிடைத்தளத்துடன் α கோணத்தில் பிடிக்கப்பட்டுள்ள ஒரு துப்பாக்கிக்கு நேராக விமானம் கடந்து செல்லும்போது துப்பாக்கி வெடிக்கப்பட்டு, குண்டு அதன் முனையிலிருந்து V வேகத்துடன் புறப்பட்டால்,

$$2\,(V\cos\alpha - v)\,v\tan^2\alpha = gh$$

எனில், விமானத்தைக் குண்டு தாக்குமென்று காட்டு.

தீர்வு: O என்பது துப்பாக்கி முனை. OA_0 என்பது துப்பாக்கி வெடிக்கும்போது விமானம் இருந்த நிலை. விமானம் A_0A என்ற கிடைத் திசையில் பறந்து கொண்டிருக்கிது. இக்கிடைத் திசையின் உயரம் h. A என்பது விமானத்தின் பாதையும், குண்டின் பாதையும் சந்திக்கும் புள்ளி. துப்பாக்கிக் குண்டும், விமானமும் ஒரே நேரத்தில் இத்தப் புள்ளிக்கு வந்தால் குண்டு விமானத்தைத் தாக்கும். விமானமும் குண்டும் துப்பாக்கி வெடித்தபின் t நேரத்தில் A என்ற புள்ளியில் ஒருங்கே வந்து சேருவதாகக் கொள்வோம்.



படம் 59

துப்பாக்கிக் குண்டின் கிடைவேகம் $= V\cos\alpha$.

குண்டு t நேரத்தில் சென்ற கிடைத்தூரம் $NA = V\cos\alpha \cdot t$.

விமானம் v வேகத்துடன் t நேரத்தில் சென்ற தூரம் $= A_0A = vt$

இப்பொழுது, $NA = NA_0 + A_0A$

$$\therefore \quad V\cos\alpha \cdot t = h\cot\alpha + vt$$

$$\therefore \quad (V\cos\alpha - v)\,t = h\cot\alpha$$

அல்லது, $$t = \frac{h\cot\alpha}{V\cos\alpha - v}$$

ஆனல், குண்டு t நேரத்தில் $V\sin\alpha$ வேகத்துடன் நிலைக்குத்தாகச் சென்றுள்ள தூரம் h ஆகையால், $S = ut + \frac{1}{2}at^2$ சூத்திரத்திலிருந்து,

$$h = V \sin \alpha \cdot t - \tfrac{1}{2} gt^2$$
$$= (V \sin \alpha - \tfrac{1}{2} gt)\, t$$
$$= \left(V \sin \alpha - \tfrac{1}{2}g \cdot \frac{h \cot \alpha}{V \cos \alpha - v}\right) \frac{h \cot \alpha}{V \cos \alpha - v}$$
$$h = \left[\frac{2 V \sin \alpha . (V \cos \alpha - v) - gh \cot \alpha}{2 (V \cos \alpha - v)}\right] \frac{h \cot \alpha}{V \cos \alpha - v}$$

அல்லது, $2 (V \cos \alpha\ v)^2 = [2 V \sin \alpha (V \cos \alpha - v) - gh \cot \alpha] \cot \alpha$.

$$= 2 V \cos \alpha (V \cos \alpha - v) - gh \cot^2 \alpha$$

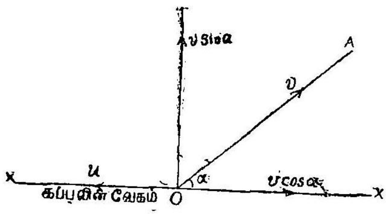
$\therefore\ 2 (V \cos \alpha - v) [V \cos \alpha - v - V \cos \alpha] = -gh \cot^2 \alpha$

அல்லது, $2 (V \cos \alpha - v)\, v = gh \cot^2 \alpha$

அல்லது, $2 (V \cos \alpha - v)\, v \tan^2 \alpha = gh.$

சார்வீச்சு (Relative Projection)

மாதிரி 90. ஒரு போர்க்கப்பல் u திசை வேகத்துடன் முன்னேக்கிச் சென்று கொண்டிருக்கிறது. கப்பலின் மேல் பின்புறமாக ஒரு துப்பாக்கி α ஏற்றக்கோணத்தில் பொருத்தப்பட்டுள்ளது. துப்பாக்கியிலிருந்து ஒரு குண்டு துப்பாக்கியைப் பொறுத்து v திசை வேகத்துடன் சுடப்பட்டால் அதன் வீச்சு $\frac{2v}{g} \sin \alpha (v \cos \alpha - u)$ என்றும், மீப்பெரு வீச்சுக்குரிய ஏற்றக்கோணம் $\cos^{-1} \left[\frac{u + \sqrt{u^2 + 8 v^2}}{4 v}\right]$ என்றும் நிறுவுக.



படம் 60

தீர்வு: O என்பது துப்பாக்கி முனை. OX திசையில் கப்பல் u வேகத்துடன் சென்று கொண்டிருக்கிறது. OA என்பது துப்பாக்கி நீட்டிக் கொண்டிருக்கும் திசை. கிடைத்திசையும் இதன் சாய்வு α. OA திசையில் துப்பாக்கிக் குண்டின் வேகம் v. எனவே, OX^1 திசையில் குண்டின் வேகக் கூறு $v \cos \alpha$ ஆகும். எனவே, கப்பலைப் பொறுத்து OX^1 திசையில் துப்பாக்கிக் குண்டின் வேகக் கூறு $(v \cos \alpha - u)$ ஆகும் குண்டின் செங்குத்துத் திசை வேகக் கூறு $v \sin \alpha$ ஆகும்

குண்டின் கிடைவீச்சு $= \dfrac{2u^2 \text{Sin} \propto \cos \propto}{g}$ (சூத்திரம்)

$$\therefore \qquad R = \frac{2(u \text{ Sin} \propto)(\cos \propto)}{g}$$

$$= \frac{2 \text{ (நிலைக்குத்துக் கூறு) (கிடைக் கூறு)}}{g}$$

$$= \frac{2v \text{ Sin} \propto (v \cos \propto - u)}{g}$$

$$= \frac{2v}{g}(v \cos \propto - u) \text{ Sin} \propto.$$

R மீப்பெரிதாகவேண்டுமானுல், $\dfrac{dR}{d\propto} = 0.$

$$\therefore \quad \frac{2v}{g}(v \cos^2 \propto - v \text{ Sin}^2 \propto - u \cos \propto) = 0$$

$$\therefore \quad \frac{2v}{g}[v \cos^2 \propto - v(1 - \cos^2 \propto) - u \cos \propto] = 0$$

அதாவது, $\quad 2v \cos^2 \propto - u \cos \propto - v = 0.$

அல்லது, $\quad \cos \propto = \dfrac{u \pm \sqrt{u^2 + 8v^2}}{4v}$

எதிரடையாளம் ஏற்றுக் கொள்ளத் தக்கதன்று எனவே, மீப்பெரு வீச்சுக்கு ஏற்றக்கோணம் $\cos^{-1}\left[\dfrac{u + \sqrt{u^2 + 8v^2}}{4v}\right]$.

பயிற்சி 10

1. தரையுடன் தொடுகையிலுள்ள ஒரு குண்டு வெடித்து, துகள்கள் எல்லாத் திசைகளில் 80 அடி/விஞடி வரையுள்ள வேகங்களில் சிதறுகின்றன. 100 அடிக்கு அப்பாலிருக்கும் ஒரு மனிதன் $\frac{5}{2}\sqrt{2}$ விஞடிகட்கு ஆபத்திலிருக்கிருனென்று காட்டுக.

2. சமதரையிலிருந்து 225 அடி உயரத்தில் ஒரு வெடிகுண்டு வெடித்து, அதன் துகள் 160 அடி/விஞடி வேகத்தில் எல்லாத் திசைகளிலும் சிதறுகின்றன. தரையிலுள்ள ஆபத்து வட்டத்தின் ஆரை 1000 அடிகள் என்று காட்டு.

3. ஒரு வட்டமான தொட்டியின் நடுவிலுள்ள ஒரு நீரூற்றிலிருந்து 12 அடி/வினாடி வேகத்தில் எல்லாத் திசைகளிலும் சிதறுகின்ற எல்லா நீர்த்துளிகளையும் பிடிக்க வேண்டுமாயின் தொட்டியின் ஆரை எவ்வளவு நீளமிருக்கவேண்டும். (விடை: 4·5 அடி)

4. a ஆரையுள்ள ஆரைக்கோள வடிவத்திலமைந்துள்ள ஒரு மலையின் உச்சியிலிருந்து $\sqrt{2gh}$ திசைவேகத்துடன் ஒரு குண்டு சுடப்படுகிறது. குண்டு போய் விழக் கூடிய மிகத் தொலைவிலுள்ள புள்ளிகள் எறிபுள்ளியிலிருந்து நேர் கோட்டளவில் $a - \sqrt{a^2 - 4ah}$ தூரத்திலிருக்குமென்று காட்டுக. மேலும், குண்டு a ஆரையுள்ள அக்கோளத்திற்கு அப்பால் விழவேண்டுமாயின் கோளத்தின் மிக அதிக உயரத்திலிருந்து எறியப்படும் அதன் வேகம் $\sqrt{\frac{1}{2}ag}$ ஐ விடக் குறையக் கூடாதென்று நிறுவுக.

5. ஒரு கோட்டையின் மேலும் ஒரு கப்பலிலும் போர் வீரர்கள் துப்பாக்கிகள் ஏந்திச் சுடுவதற்குத் தயாராக வுள்ளனர். துப்பாக்கிகளிலுருந்து வெளிவரும்போது குண்டுகளின் வேகம் $\sqrt{2gh}$ ஆகயிருக்கும். கோட்டை மேலிருக்கும் துப்பாக்கிகள் கப்பலுக்கு மேலே k உயரத்திலுள்ளன. கோட்டைத் துப்பாக்கிகளின் மீப்பெரு கிடைவீச்சுகளும், கப்பல் துப்பாக்கிகளின் மீப்பெரு கிடைவீச்சுகளும் முறையே d_1, d_2 எனில்,

$$\frac{d_1}{d_2} = \sqrt{\frac{h+k}{h-k}}$$

என்று காட்டுக.

6. ஒரு நிலைக்குத்தான சுவரிலிருந்து a தூரத்தில் தரையில் நிறுத்தி வைக்கப்பட்டுள்ள ஒரு தீயணைக்கும் கருவியிலிருந்து ரப்பர்க் குழாயின் மூலம் தண்ணீர் சுவரின் மேற்பரப்பின் மீது எல்லாத் திசைகளிலும் பீறிட்டு அடிக்கப்படுகிறது. அக்குழாயின் மூலம் கிடைத்தளத்தில் பீறிட்டுப் பாய்ச்சக்கூடிய மீப்பெரு கிடைவீச்சு b எனில், சுவரின்மேல் தண்ணீர் அடிக்கப்பட்ட பகுதியின் பரப்பு $\frac{b^2 - a^2}{2}$ உயரமும், $2\sqrt{b^2 - a^2}$ அகலமும் கொண்ட ஒரு பரவளைவு என்று காட்டுக.

7. h உயரமுள்ள ஒரு கம்பத்தின் உச்சியிலுள்ள ஒரு பறவையின் மீது தாக்குமாறு ஒரு குண்டு V திசைவேகத்துடன் α ஏற்றக்கோணத்தில் சுடப்படுகிறது. இருப்பினும், துப்பாக்கி

வெடித்ததும் துப்பாக்கிக்கு அப்பால் கிடைத் திசையில் v திசை வேகத்துடன் பறந்துவிடுகிறது. $(2V\cos\alpha - v)(V^2\sin^2\alpha - gh)^{\frac{1}{2}} = vV\sin\alpha$ எனில், பறவையானது குண்டால் அடி படுவதிலிருந்து தப்ப முடியாதென்று காட்டுக.

8. V திசைவேகத்துடன் α ஏற்றக் கோணத்தில் சுடப் படும் ஒரு குண்டு எறிபுள்ளி வழிக் கிடைத்தளத்திலுள்ள P என் னும புள்ளியில் போய் விழும். ஆனால் புள்ளி P ஆனது துப் பாக்கியிலிருந்து v திசை வேகத்துடன் பின்னேக்கிச் சென்று கொண்டிருந்தால் துப்பாக்கியின் ஏற்றக்கோணம்

$$\sin 2\theta = \sin 2\alpha + \frac{2v}{V}\sin\theta$$

என்ற தொடர்பிலிருந்து பெறப்படும் θ என்னும் கோணத்திற்கு மாற்றப்படவேண்டுமென்று காட்டுக.

5. கணத்தாக்கு விசைகள்

(Impulsive Forces)

ஒரு பொருளின் மீது செயல்படும் விசையின் விளைவு அவ் விசையின் அளவை மட்டுமல்லாது, அப்பொருளின் மீது அவ் விசை செயல்படும் நேரத்தையும் பொருத்ததாகு மென்பது யாவருமறிந்த அனுபவ' உண்மையாகும். ஆகவே, ஒரு விசை யின் தாக்கத்தினுல் ஏற்படும் விளைவினை அளவிட அவ்விசை செயல்படும் நேரத்தையும் கருத்திற் கொள்ளவேண்டும். இவ் வாறு ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில் ஒரு விசையின் தாக்கத்தினு லேற்படுகின்ற விளைவை அளவிடுதலுக்குத் தாக்களவை (Impulse) என்று பெயர்.

தாக்களவை (Impulse)

P என்னும் ஒரு மாரு விசை ஒரு பொருளின்மீது t நேரத் திற்குச் செயல்பட்டுக் கொண்டிருந்தால், அவ்விசை, அது செயல்படும் காலம் ஆகியவற்றின் பெருக்கமாகிய Pt என்பது விசை P யின் t காலத்தின் தாக்களவை எனப்படும். இத்தாக் களவை பொதுவாக I என்னும் ஆங்கில எழுத்தின் மூலம் குறிப் பிடப்படுகின்றது. ஆகவே,

$$I = Pt.$$

ஆகும். விசையானது ஒரு மாறியாக யிருப்பின் தாக்களவை யைப் பின்வருமாறு கணக்கிடவேண்டும்.

ஒரு துகளின் மீது நேரம் t யின்போது F எனும் ஒரு விசை செயல்பட்டுக் கொண்டிருப்பதாகக் கொள்க. δt என்பது அந்தக் கணத்தை அடுத்துள்ள ஒரு மிகக் குறுகிய கால இடை வெளியெனில், இக்குறுகிய காலத்தில் விசை Fஐ மாரு விசை யாகக் கொண்டு, அதன் தாக்களவையை $F.\,\delta t$ என்று கொள்ள லாம். எனவே, t_1 நேரத்திலிருந்து t_2 நேரம் வரை விசை F செயல்மாயின், அக்கால இடைவெளியில் அதன் தாக்கள வையை δt போன்ற எண்ணற்ற குறுகிய கால இடைவெளி களின் தாக்களவைகளின் மொத்தமாகக் கணக்கிடலாம். தொகையீட்டுக் கணித முறையில் இந்த நுண்ணிய தாக்

களவைகளின் மொத்தங்களைக் காணின், t_1 நேரத்திலிருந்து t_2 நேரம் வரை செயல்படும் விசை F இன் தாக்களவை

$$I = \int_{t_2}^{t_1} F\,dt$$

ஆகும். ஆனால் நியூட்டனின் இரண்டாவது விதிப்படி, $F = m \times a =$ பொருண்மை $\times$ முடுக்கம் என்று அறிவோம். ஆனால், $a =$ முடுக்கம் $= \dfrac{dv}{dt}$ ஆகையால்,

$$I = \int_{t_1}^{t_2} m.\ \frac{dv}{dt}\ .\ dt = \int_{t_1}^{t_2} m\,dv$$

ஆகும். u, v என்பது t_1, t_2 ஆகிய நேரங்களில் துகளின் திசை வேகங்களெனில்,

$$I = \Big[\, m\,v \,\Big]_{t_1}^{t_2}$$

$$= m\,v_{t_2} - m\,v_{t_1}$$

$$= mv - mu.$$

ஆனால், பொருண்மை $\times$ திசைவேகம் $=$ பொருளின் உந்தமாகையால், mv, mu என்பன முறையே t_2, t_1 ஆகிய நேரங்களில் பொருளின் உந்தங்களாகும். எனவே, $mv - mu$ என்பது அப்பொருளின் உந்தமாறுபாடு ஆகும். அதாவது, ஒரு பொருளின் மீது ஒரு குறிப்பிட்ட கால இடைவெளியில் செயல்படுகின்ற ஒரு விசையின் தாக்களவை யென்பது அவ்விசைத் தாக்கத்தின் காரணமாக அப்பொருளில் ஏற்பட்டுள்ள உந்தமாறுபாட்டிற்குச் சமம். இதன் காரணமாக, நியூட்டனின் இரண்டாவது விதியைப் பின்வருமாறு மாற்றிக் கூறலாம்.

ஒரு துகளின் மீது ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்திற்குச் செயல்படும் ஒரு விசையின் உந்தமாறுபாடு அவ்விசையின் தாக்களவைக்கு விகித சமத்திலிருப்பதோடு, அவ்விசை செயல்படும் திசையிலேயே ஏற்படும்.

தாக்களவை அலகுகள்

விசை, காலம் முதலியன அ-ரா-வி முறையில் முறையே ராத்தலி அல்லது ராத்தல் எடை, வினாடி ஆகிய அலகுகளால்

அளவிடப்படுவதால் இதே முறையில் ராத்தலி-விநாடி (poundal-Second) அல்லது ராத்தல் எடை-விநாடி (pound weight-Second) என்ற அலகினால் தாக்களவை அளவிடப்படுகின்றது. இதே போன்று செ-கி-வி முறையில் தாக்களவையின் அலகு டைன்-விநாடி (dyne-Second) அல்லது கிராம் எடை-விநாடி (Gramme weight-Second) ஆகும்.

கணத்தாக்கு விசை (Impulsive Force)

விசை, காலம் ஆகியவற்றின் பெருக்கம் ($F \times t$) ஒரு முடிவுள்ள தொகையாக யிருக்கவேண்டுமென்ற கோட்பாட்டிற்கேற்ப ஒரு பொருளின் மீது மிகமிகக் குறுகிய காலத்திற்குச் செயல்படுகின்ற ஒரு வரையறையற்ற மிகப் பெரிய விசைக்குக் ''கணத்தாக்கு விசை'' என்று பெயர்.

ஒரு கணத்தாக்கு விசையின் தாக்குதலினால் ஒரு பொருள் பெறுகின்ற முடுக்கத்தை அளவிட முடியாது. ஆனால் அக்கணத்தாக்கு விசை செயல்படும் முன்னரும் பின்னரும் அப்பொருளின் திசைவேகத்தை அளவிட முடியுமாகையால், அக்கணத்தாக்கு விசையின் தாக்குதலினால் பொருளில் ஏற்படும் விளைவினை அதன் உந்த மாறுபாட்டின் மூலம், அதாவது அதன் தாக்களவை மூலம் கணக்கிடலாம். இவ்வாறு, தாக்களவைகளின் மூலம் மட்டுமே விளைவுகள் அளவிடப்படக்கூடிய விசைகள் கணத்தாக்கு விசைகளாகும். ஒரு கணத்தாக்கு விசை பின்வரும் நான்கு சிறப்பியல்புகளைப் பெற்றிருக்கும் :

1. அதன் அளவு (magnitude) மிகமிகப் பெரியது.
2. அதன் செயல்படும் காலம் மிகமிகக் குறுகியது.
3. அதனால் தாக்கப்படும் பொருளின் இடப்பெயர்ச்சி புறக்கணிக்கத்தக்க அளவில் மிகச் சிறியது,
4. தாக்கப்படும் பொருளில் அக்குறுகிய காலத்தில் ஒரு வரம்புக்குட்பட்ட திசைவேக மாறுபாடு ஏற்படும்.

கணத்தாக்கு விசைகளுக்குச் சில உதாரணங்கள் :

1. ''துப்பாக்கி வெடித்துக் குண்டு வெளித் தள்ளப்படுதல்''

துப்பாக்கி வெடிக்கும்போது உற்பத்தியாகின்ற ஏராளமான வாயுக்களின் மிக உயர்ந்த வெப்பம், அழுத்தம் ஆகியவை காரணமாகத் துப்பாக்கிக் குண்டு மிகுந்த வேகத்துடன் வெளித்

தள்ளப்படுகிறது. இது நடைபெறும் காலம் மிகமிகக் குறுகியது என்பது யாவரும் அறிந்ததே.

2. ''ஒரு இரும்புத் துண்டைச் சம்மட்டியால் அடித்தல்''.

பழுக்கக் காய்ச்சப்பட்ட இரும்புத் துண்டை கொல்லன் சம்மட்டியால் அடிப்பதை நாம் பார்த்திருக்கிறோம். சம்மட்டி இரும்புத் துண்டின் மீது எந்த வேகத்துடன் மோதுகிறது. இரும்புத் துண்டு தாக்கம்படும் நேரம் மிகக் குறுகிய தென்பதும் அக்குறுகிய காலத்தில் இரும்புத் துண்டின் இடப்பெயர்ச்சி புறக்கணிக்கத்தக்க அளவில் மிகச் சிறிய தென்பதும் நாமறிந்ததே.

3. ''வேகமாகச் சென்றுகொண்டிருக்கும் இரு உந்து வண்டிகளின் மோதுகை.''

மிக அதிக வேகமாக எதிரெதிரே வந்து கொண்டிருக்கும் இரு உந்து வண்டிகள் ஒன்றின் மீதொன்று மோதும்போது அவற்றின் மோதுகைக் காலம் மிகமிகக் குறுகியதாகவும், அவை மோதுகின்ற விசை மிகமிகப் பெரிய அளவினதாகவுமிருக்கும்.

கணத்தாக்கு விசையின் வரையறை :

ஒரு பொருளின் மீது மிகமிகக் குறுகிய காலந்திற்குச் செயல்பட்டு, அக்குறுகிய காலத்தில் அப்பொருளில் ஒரு முடிவுள்ள திசைவேக மாறுபாட்டைத் திடீரென தனது செயற்கோட்டுத் திசையிலேயே ஏற்படுத்தக் கூடியதும், அதே நேரத்தில் தனது செயல்படுபுள்ளி அதே திசையில் புறக்கணிக்கத் தக்க அளவு இடப்பெயர்ச்சியே ஏற்படக் கூடியதுமான ஒரு மிகப் பெரிய விசையே கணத்தாக்கு விசை எனப்படும்.

ஒரு கணத்தாக்கு விசையின் அளவு, அது செயல்படும் காலம் ஆகியவற்றைத் தனித் தனியே அளவிட இயலாது. எனவேதான், கணத்தாக்கு விசைகள் அவற்றின் தாக்களவைகளின் மூலம் அளவிடப்படுகின்றன.

நேர்கோட்டு உந்தக் காப்புத் தத்துவம் (Principle of Conservation of Linear Momentum)

தரப்பட்டுள்ள ஒரு திசையில் ஒரு பொருளின் உந்த மாறுபாட்டு வீதம் அதே திசையில் அப்பொருளின் மீது செயல்படும் புறவிசைகளுக்கு விகித சமமாயிருக்குமென்பது நியூட்டனின் இரண்டாவது விதியாகும். எனவே, தரப்பட்டுள்ள ஒரு திசையில், ஒரு பொருளின் மீது செயல்படும் புறவிசைகளின் கூறு

களின் இயற்கணித மொத்தம் பூச்சியமெனில், அத்திசையில் அப்பொருளின் உந்த மாறுபாட்டு வீதம் பூச்சியமாவதால், அதே திசையில் அப்பொருளின் உந்தம் ஒரு மாறிலியாயிருக்கும். இதுவே ஒரு தனிப் பொருளின் உந்தக் காப்புத் தத்துவமாகும்.

ஆனால் பல பொருட்களடங்கிய ஒரு தொகுதியில், பொருட்களுக்கிடையே செயல்படும் விசைகளும் எதிர் விசைகளும் சமமாகவும் எதிராகவு மிருந்து ஒன்றையொன்று விளைவு நீக்கம் செய்துவிடுமாகையால், மேற்கண்ட தத்துவத்தை பல பொருட்களடங்கிய ஒரு தொகுதிக்குப் பின்வருமாறு விரிவு படுத்தலாம்.

''பல பொருட்களடங்கிய ஒரு தொகுதியின் மீது செயல்படும் புறவிசைகளின் ஏதேனுமொரு திசையில் பிரிக்கப்பட்ட பகுதிகளின் இயற்கணிக மொத்தம் பூச்சியமானால் அதே திசையில் அத்தொகுதியின் உந்தம் ஒரு மாறிலியாக இருக்கும்''.

எடுத்துக்காட்டுகள்

1. துப்பாக்கி வெடியின் இயக்கம் :

ஒரு துப்பாக்கி வெடிக்கும்போது உற்பத்தியாகின்ற வாயுக்களின் அழுத்தம் காரணமாகக் குண்டு மிகுந்த வேகத்துடன் வெளித்தள்ளப்படுகிறது. துப்பாக்கி வெடிக்கும்போது ஏற்படும் விசைகள் உள் விசைகளாகக் கருதப்பட வேண்டுமாதலால், உந்தக் காப்புத் தத்துவத்தின்படி, துப்பாக்கி, குண்டு ஆகியவற்றின் மொத்த உந்தம் துப்பாக்கி வெடிப்பதற்கு முன்னரும், வெடித்த பின்னரும் சிமமாயிருக்க வேண்டும். வெடிப்பதற்கு முன்னர், துப்பாக்கியும் குண்டும் ஓய்விலிருப்பதான் அவற்றின் மொத்த உந்தம் பூச்சியமாகும். ஆகவே, வெடித்த பின்னரும் அவற்றின் மொத்த உந்தம் பூச்சியமாயிருக்க வேண்டும்.

துப்பாக்கி, குண்டு ஆகியவற்றின் பொருண்மைகள் முறையே M, m என்றும், வெடித்த பின்னர் அவற்றின் திசை வேகங்கள் முறையே $\vec{V}$, $\vec{v}$ என்றும் கொள்க. எனவே, உந்தக் காப்புத் தத்துவத்தின்படி,

$$M\vec{V} + m\vec{v} = 0$$

அல்லது, $$\vec{V} = -\frac{m}{M}\vec{v}$$

ஆகவே, துப்பாக்கியானது $\frac{m}{M}\vec{v}$ என்ற வேகத்துடன் பின்னோக்கி நகருமென்று காண்கிறோம். இதுவே, துப்பாக்கியின் ''பின் நகர்வு'' எனப்படுகிறது.

மேலும், $M\vec{V} = -m\vec{v}$ ஆகையால், துப்பாக்கியின் உந்தம், எதிர்த் திசையில் துப்பாக்கிக் குண்டின் உந்துக்குச் சமமென்றறிக.

2. "இரு பொருட்களின் மோதுகை"

m_1, m_2 என்னும் பொருண்மைகளுடைய A, B என்னும் இரு பொருட்கள் ஒரு நேர்கோட்டில் ஒன்றின் மீதொன்று மோதுவதாகக் கொள்வோம். இரு பொருட்களும் ஒன்றின் மீதொன்று தாக்குமாகையால், B-யின் மீது A-யின் தாக்கமும், A-யின் மீது B-யின் எதிர்த் தாக்கமும் சமமாகும், எதிராகவுமிருக்கும். இச் சம எதிர்த் தாக்கப் பிரிவுகளை P_1, P_2 என்க.

ஆகவே, $P_1 = -P_2$ ஆகும்.

இரு பொருட்களும் மோதுவதற்கு முன்னர் அவற்றின் திசைவேகங்கள் முறையே u_1, u_2 என்றும், மோதிய பின்னர் அவற்றின் திசைவேகங்கள் முறையே v_1, v_2 என்றும் கொள்க. இத் திசைவேக மாறுபாடுகள் ஏற்படும் காலம் t என்க.

எனவே, P_1 என்னும் விசை B-யின் மீது t நேரத்திற்குச் செயல்பட்டு அதன் திசை வேகத்தை u_2-இலிருந்து v_2-க்கு மாற்றுகிறது. எனவே, இக்காலத்தில் P_1-இன் தாக்களவை $P_1 t$ ஆகும். இவ்விசையின் காரணமாக B-யில் ஏற்பட்டுள்ள உந்த மாறுபாடு $m_2 v_2 - m_2 u_2 = m_2 (v_2 - u_2)$ ஆகும்.

$$\therefore \quad P_1 t = m_2 (v_2 - u_2)$$

இவ்வாறே, P_2 என்பதும் விசையினால் t நேரத்தில் A-யின் மீது ஏற்பட்டுள்ள உந்த மாறுபாடு அவ்விசையின் தாக்களவைக்கும் சமமாகுமாதலால்,

$$P_2 t = m_1 (v_1 - u_1)$$

ஆனால், $P_1 = -P_2$ ஆகுமாகையால், $P_1 t = -P_2 t$ அல்லது, $P_1 t + P_2 t = 0$.

$$\therefore \quad m_2 (v_2 - u_2) + m_1 (v_1 - u_1) = 0$$

அல்லது, $$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$$

மோதலுக்கு பின்னர் இரு பொருட்களின் உந்தங்களின் மொத்தத்துக்குச் சமமென்று காண்கிறோம்.

மாதிரி 91. 100 கிராம் பொருண்மையுள்ள ஒரு பொருள் 8 மீட்டர் உயரத்திலிருந்து தரையில் விழுந்து பின் 4·5 மீட்டர் உயரத்திற்குத் துள்ளுகிறது. இம்மோதுகையின் தாக்களவையைக் காண்க. பந்து தரையுடன் $\frac{1}{100}$ விநாடி நேரத்திற்குத் தொடுகையிலிருந்தால் கணத்தாக்கு விசையின் அளவைக் காண்க.

தீர்வு: பந்து தரையில் மோதும் வேகம் v எனில், $v^2 = u^2 + 2\,as$ என்னும் சூத்திரத்திலிருந்து,

$$v^2 = 0 = 2g \times 8$$

அல்லது, $v = 4\sqrt{g}$ மீட்டர்/வி.

மோதலுக்கு பின் பந்து துள்ளும் வேகம் u எனில், மேற்கண்ட சூத்திரத்தில், $a = -g$; $s = 4{\cdot}5$, $v = 0$ என்று பிரதியிட,

$$O = u^2 - 2g \times 4{\cdot}5 = u^2 - 9g$$

அல்லது, $u = 3\sqrt{g}$ மீட்டர்/வி. (எதிர் திசையில்)

$= -3\sqrt{g}$ மீட்டர்/வி. (கீழ் நோக்கி)

∴ மோதலுக்குப்பின் கீழ் நோக்கிய உந்தம்

$= mu = 100 \times (-3\sqrt{g})$

$= -300\sqrt{g}$ கிராம்-மீட்டர்/விநாடி

மோதலுக்கு முன் கீழ்நோக்கிய உந்தம்

$= mv = 100 \times (4\sqrt{g})$

$= 400\sqrt{g}$ கிராம்-மீட்டர்/விநாடி.

கீழ்நோக்கிய திசையில் உந்த மாறுபாடு

$= (-300\sqrt{g} - 400\sqrt{g})$ கிராம்-மீட்./வி.

$= -700\sqrt{g}$ கிராம்-மீட்டர்/வி.

ஆகவே, மோதுகையின் தாக்களவு I

$= 700\sqrt{g}$ கிராம்-மீட்டர்/வி. (அளவில்)

$= 70000\sqrt{g}$ கிராம்-செ.மீ./வி. (அளவில்)

கணத்தாக்கு விசை P எனில்,

$$P \times t = I$$

என்னும் தொடரிலிருந்து,

$$P \times \tfrac{1}{100} = 70000\sqrt{g}$$

$$\therefore\ P = 100 \times 70000\sqrt{g} \text{ டைன்கள்}$$

$$= 100 \times 70000 \times \sqrt{981} \text{ டைன்கள்}$$

$$= 21 \times 10^6 \times \sqrt{109} \text{ டைன்கள்.}$$

மாதிரி 92. அரை டன் பொருண்மையுள்ள ஒரு துப்பாக்கியிலிருந்து 12 ராத்தல் பொருண்மையுள்ள ஒரு குண்டு 1400 அடி/விநாடி வேகத்தில் சுடப்படுகிறது. துப்பாக்கியின் பின் நகர்வு வேகம் துப்பாக்கியை 2-இல் 1 என்ற சாய்தளத்தின் மேல் எவ்வளவு தூரத்திற்கு இழுத்துச் செல்லும்?

தீர்வு:

M = துப்பாக்கியின் பொருண்மை = $\frac{1}{2}$ டன் = 1120 ராத்தல்.

V = துப்பாக்கியின் பின் நகர்வு வேகம்.

m = துப்பாக்கிக் குண்டின் பொருண்மை = 12 ராத்தல்.

v = குண்டின் வேகம் = 1400 அடி/வி.

உந்தக் காப்புத் தத்துவப்படி, $MV = mv$ (அளவில்)

$$\therefore\ 1120\,V = 12 \times 1400$$

அல்லது,

$$V = \frac{12 \times 1400}{1120}$$

$$= 15 \text{ அடி/வி.}$$

சாய்தளத்தின் மேல் துப்பாக்கியின்

பின் நகர்வுத் தொடக்க வேகம் = 15 அ./வி.

இறுதிவேகம் = 0

எதிர் முடுக்கம் = $g \sin \alpha$

$$= 32 \times \tfrac{1}{2} = 16 \text{ அ/வி}^2$$

சாய்தளத்தின் துப்பாக்கி

பின்நகரும் தூரம் = s என்க.

$$v^2 = u^2 + 2as$$

$$O = 15^2 + 2(-16)S$$

$$\therefore \quad S = \frac{225}{32}$$

$$= 7 \text{ அடி (தோராயமாக)}$$

மாதிரி 93. 250 கிலோகிராம் பொருண்மையுள்ள ஒரு குண்டு 500 மீட்டர்/விநாடி வேகத்துடன் 50 டன் பொருண்மையுள்ள ஒரு துப்பாக்கியிலிருந்து சுடப்படுகிறது. துப்பாக்கியின் பின் நகர்வு 15 டன் எடையுள்ள ஒரு மாறு விசையுடன் தடுக்கப்பட்டால், துப்பாக்கி பின் நகரக்கூடிய தூரமென்ன?

தீர்வு: துப்பாக்கியின் பின் நகர்வு வேகம் V என்க.

M = துப்பாக்கியின் பொருண்மை = 50 டன் (மெட்ரிக்)
= 50×10^6 கிராம்.

m = குண்டின் பொருண்மை = 250 கி.கி.
= $250\ 10^3$ கிராம்.

v = குண்டின் வேகம் = 500 மீட்./வி.
= 500×10^2 செ.மீ./வி.

$$MV = mv$$

$$\therefore \quad 50 \times 10^6 \times V = 250 \times 10^3 \times 500 \times 10^2$$

அல்லது, $V = 250$ செ.மீ./வி.

துப்பாக்கியின் பின் நகர்வு வேகத்தைத் தடை செய்யும் விசையினால் ஏற்படும் எதிர்முடுக்கம் f என்க.

$$\therefore \quad M \times f = \text{தடைவிசை}$$

$$50 \times 10^6 \times f = 15 \text{ டன் எடை}$$

$$= 15 \times 10^6 \text{ கிராம் எடை}$$

$$= 15 \times 10^6\, g \text{ டைன்கள்}$$

$$\therefore \quad f = \frac{15 \times 10^6 \times g}{50 \times 10^6}$$

$$= \frac{3}{10}\, g \text{ செ.மீ./வி.}^2.$$

துப்பாக்கியின் பின் நகர்வு தூரம் s எனில்,

$$v^2 = u^2 + 2\,as,$$

$$O = (250)^2 + 2\left(\frac{-3}{10}\,g\right)s$$

அல்லது,
$$s = \frac{250 \times 250}{\frac{6\,g}{10}}$$

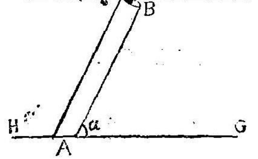
$$= \frac{250 \times 250 \times 10}{6 \times 981} \text{ செ.மீ.}$$

$$= 1{\cdot}06 \text{ மீட்டர். (தோராயமாக)}$$

மாதிரி 94. ஒரு வழவழப்பான கிடைத்தளத்தின் மீது நகரக் கூடிய ஒரு வண்டியில் ஒரு துப்பாக்கி, கிடைத்தளத்துடன் α கோணச் சாய்வில் பொருத்தப்பட்டுள்ளது. துப்பாக்கியிலிருந்து சுடப்பட்ட ஒரு குண்டு கிடைத்தளத்துடன் θ கோணச் சாய்வில் வெளிப்படுகிறது. வண்டியுடன் துப்பாக்கியின் எடை குண்டின் எடையைப் போல் n மடங்கு எனில்,

$$\tan\theta = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\tan\alpha$$

என்று நிறுவுக.



படம் 61

தீர்வு : AB என்பது துப்பாக்கி. EF என்பது துப்பாக்கி முனை வழியே செல்லும் கிடைமட்டம். துப்பாக்கி பின் நகராமலிருக்குமானால், குண்டு BC வழியே, அதாவது கிடைத்தளத்துடன் α கோணச் சாய்வில், செல்லும். ஆனால் துப்பாக்கியின் பின் நகர்வு வேகத்தின் காரணமாகக் குண்டு B என்னும் திசையில் கிடைத்தளத்துடன் θ கோணச் சாய்வில் செல்கிறது. u என்பது BC திசையில் குண்டின் உண்மையான வேகமென்றும், V என்பது துப்பாக்கியின் கிடைத்திசைப் பின் நகர்வு வேகமென்றும், கொள்க. u, V ஆகியவற்றின் விளைவு வேகம் v எனில், v ஆனது BD திசையில் கிடைத்தளத்துடன் θ கோணச் சாய்விலுள்ள குண்டின் வேகமாகும்.

கிடையாகவும், நிலைக்குத்தாகவும் திசைவேகப் பிரிப்பு செய்.

$$v \cos\theta = u \cos\alpha - V$$

$$v \operatorname{Sin}\theta = u \operatorname{Sin}\alpha$$

$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{u \operatorname{Sin}\alpha}{u\cos\alpha - V} \qquad \ldots \quad (1)$$

ஆனால், கிடைத் திசையில் குண்டின் உந்தம் $mv\cos\theta$ ஆகும்; துப்பாக்கியின் உந்தம் MV ஆகும். உந்தக் காப்புத் தத்துவப் படி,

$$MV = mv\cos\theta$$

$M = nm$ ஆகையால், $\quad nmV = m(u\cos\alpha - V)$

$$nV = u\cos\alpha - V$$

அல்லது, $\quad (n+1)V = u\cos\alpha$

$$\therefore \quad V = \frac{u\cos\alpha}{n-1}$$

(1) இலிருந்து, $\quad \tan\theta = \dfrac{u\operatorname{Sin}\alpha}{u\cos\alpha - \dfrac{u\cos\alpha}{n+1}}$

$$= \frac{(n+1)\operatorname{Sin}\alpha}{n\cos\alpha}$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)\tan\alpha$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right)\tan\alpha$$

மாதிரி 95. m பொருண்மையுள்ள ஒரு குண்டு M பொருண்மையுள்ள ஒரு தகட்டில் t ஆழத்திற்குத் துளைத்துச் செல்கிறது. தகடானது தாராளமாக நகரக்கூடியதாகவும், சீரான தடையுண்டுபண்ணக் கூடியதாகவுமிருந்தால் குண்டு துளைக்கக்கூடிய ஆழம் $\dfrac{Mt}{M+m}$ என்று காட்டு.

தீர்வு: குண்டின் வேகம் u என்றும், தகட்டின் தடை R என்றும் கொள்க. தகடு நகர முடியாமல் நிலையாக யிருந்தால்,

t ஆழத்திற்குத் துளைக்கும்போது தடையினால் செய்யப்படும் வேலை $= R \times t$ ஆனால் செய்யப்படுகின்ற வேலை இயக்க ஆற்றலுக்குச் சமமாகுமாகையால்,

$$R\,t = \tfrac{1}{2}\,mu^2 \qquad \ldots \qquad (2)$$

தகடு நகரக்கூடியதா யிருக்கும்போது குண்டும் தகடும் ஒரே வேகத்துடன் நகரும். இப்போது வேகம் v என்க. எனவே, உந்தக் காப்புத் தத்துவப்படி,

$$mu = (M + m)\,v \qquad (2)$$

அல்லது,
$$v = \frac{mu}{M+m} \qquad \ldots \qquad (2)$$

இப்போது குண்டு துளைக்கக்கூடிய ஆழம் x என்க.

இப்போது தடையினால் செய்யப்படும் வேலை $= Rx$.

குண்டின் இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2}\,mu^2$ (தகட்டைத் துளைப்பதற்கு முன்)

தகட்டைத் துளைக்கும்போது தகடு, குண்டு ஆகியவற்றின் இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2}\,(M + m)\,v^2$.

இயக்க ஆற்றல் மாறுபாடு $= \frac{1}{2}\,mu^2 - \frac{1}{2}\,(M + m)\,v^2$

ஆற்றல் தத்துவப்படி,

$$\begin{aligned}
Rx &= \tfrac{1}{2}\,mu^2 - \tfrac{1}{2}\,(M + m)\,v^2 \\
&= \tfrac{1}{2}\,mu^2 - \tfrac{1}{2}\,(M + m)\,\frac{m^2 u^2}{(M+m)^2} \\
&= \tfrac{1}{2}\,mu^2 - \tfrac{1}{2}\,\frac{m^2 u^2}{M+m} \\
&= \tfrac{1}{2}\,mu^2 \left[1 - \frac{M}{M+m}\right] \\
&= \tfrac{1}{2}\,mu^2 \left[\frac{m}{M+m}\right] \\
&= \tfrac{1}{2}\,\frac{M\,m\,u^2}{M+m} \qquad \ldots \qquad (3)
\end{aligned}$$

(3)ஐ (1) ஆல் வகுக்கவும்.

$$\frac{R\,x}{Rt} = \frac{\tfrac{1}{2}\,\dfrac{M\,m\,u^2}{M+m}}{\tfrac{1}{2}\,mu^2}$$

அதாவது, $$\frac{x}{t} = \frac{M}{M+m}$$

அல்லது, $$x = \frac{Mt}{M+m}$$

மாதிரி 96. தரையில் நடப்பட்டிருக்கும் m பொருண்மை யுள்ள ஒரு கம்பத்தின் உச்சியின்மீது அதற்குமேல் h அடி உய ரத்திலிருந்து விழுந்து கொண்டிருக்கும் M பொருண்மையுள்ள சம்மட்டி மோதுகிறது. இதன் காரணமாகக் கம்பமானது a ஆழத்திற்குத் தரையினுள் செல்லுகிறது. தரையின் தடை மாறிலியெனக் கொண்டு, கம்பம் தரையினுள் நகர்ந்து கொண் டிருந்த நேரம் $\frac{M+m}{M} \cdot \left(\frac{2a^2}{gh}\right)^{\frac{1}{2}}$ என்று காட்டுக. இயக்க ஆற்றலிழைப்பையும் காண்க.

தீர்வு : சம்மட்டி h உயரத்திலிருந்து கம்பத்தில் மோதுவ தால், மோதும்போது அதன் வேகம் $\sqrt{3gh}$ ஆகும்.

கம்பம் சம்மட்டியால் அடிப்பட்டபின் கம்பமும், சம்மட்டி யும் சேர்ந்து தரையினுள் செல்லும் வேகம் v என்க.

மோது முன் உந்தம் = மோதிய பின் உந்தம்.

$$M\sqrt{2gh} = (M+m)v$$

அல்லது, $$v = \frac{M}{M+m}\sqrt{2gh} \qquad \ldots (1)$$

தரையின் தடை காரணமாகச் சம்மட்டியின் வேகத்திற் கேற் படும் எதிர் முடுக்கம் f என்க.

கம்பமானது v திசைவேகத்துடனும், f எதிர் முடுக்கத்துட னும் தரையினுள் a தூரம் சென்று நின்று விடுவதால்,

$$v^2 = u^2 + 2as$$

என்னும் சூத்திரத்திலிருந்து,

$$O = v^2 - 2fa$$

அல்லது, $$f = \frac{v^2}{2a}$$

$$= \left(\frac{M}{M+m}\right)^2 \cdot \frac{2gh}{2a} \qquad (1) \text{ இலிருந்து}$$

$$= \left(\frac{M}{M+m}\right)^2 \frac{gh}{a}.$$

கம்பம் தரையினுள் இறங்குவதற்கு எடுத்துக் கொண்ட நேரம் t எனில்,

$$v = u + at$$

என்னும் சூத்திரத்திலிருந்து, $O = v - ft$

அல்லது, $$t = \frac{v}{f}$$

ஆனால், $f = \frac{v^2}{2a}$ ஆகையால், $t = \frac{v}{\left(\frac{v^2}{2a}\right)}$

$$= \frac{2a}{v}$$

$$= 2a . \frac{M + m}{M} . \frac{1}{\sqrt{2gh}}$$ (1) இலிருந்து

$$= \frac{M + m}{M} . \frac{2a}{\sqrt{2gh}}$$

$$= \frac{M + m}{M} . \sqrt{\frac{4a^2}{2gh}}$$

$$= \frac{M + m}{M} \sqrt{\frac{2a^2}{gh}}$$

மோதுகைக்கு முன் இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2} . M . (2gh = Mgh$
அடி/ராத்திலிகள்

மோதுகைக்கு பின் இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2} M . v^2$

$$= \frac{1}{2} M \frac{M^2}{(M + m)^2} . 2gh$$

$$= Mgh \frac{M^2}{(M + m)^2} .$$
அடி-ராத்திலிகள்

∴ சம்மட்டியின் இயக்க ஆற்றல் இழப்பு

$$= Mgh - Mgh \frac{M^2}{(M + m)^2}$$ (அளவில்)

$$= Mgh \left[1 - \frac{M^2}{(M+m)^2} \right]$$

$$= \frac{Mgh \cdot (2\,Mm + m^2)}{(M+m)^2}$$ அடி/ராத்திலிகள்.

மாதிரி **97.** 17 ராத்தல், 15 ராத்தல் பொருண்மைகளுள்ள இரு பொருட்கள் ஒரு வழவழப்பான கப்பியின் மூலம் செல்லும் ஒரு கயிற்றின் மூலம் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. பொருட்களிரண்டும் 16 அடி/வி. வேகத்துடன் நகர்ந்து கொண்டிருக்கும்போது கனமான பொருள் திடீரென நிறுத்தப்பட்டு உடனே விடப்படுகிறது. அரை விஞடிக்குப் பின் கயிறு மீண்டும் விறைப்பாகுமென்று காட்டு. (சென்னை பி.எஸ்ஸி. 1965 ஏப்.)

தீர்வு: 17 ராத்தல் பொருள் நிறுத்தப்படும்போது 15 ராத்தல் பொருளின் வேகம் = 16 அடி/வி. கயிறு விறைப்பாகுமுன் 15 ராத்தல் பொருள் ஈர்ப்பு முடுக்கத்தை எதிர்த்து மேல் நோக்கிச் செல்லும். கயிறு மீண்டும் விறைப்பாகும் நேரம் t எனில்,

$$s = ut + \tfrac{1}{2} at^2$$

என்னும் சூத்திரத்தில், $u = 16,\ a = -32$ என்று பிரதியிட

$$s = 16t - 16t^2$$

என்று காணலாம்.

அதே நேரத்தில் 17 ராத்தல் பொருள் பூச்சியத்தை தொடக்க வேகத்துடன், ஈர்ப்பு முடுக்கத்துடன் கீழ் நோக்கிச் செல்லுமாகையால்,

$$s = 0 + \tfrac{1}{2}(32)\,t^2 = 16t^2$$

என்று காணலாம். கயிறு விறைப்பாக ஆக வேண்டுமெனில் இவ்விரு தூரங்களும் சமமாயிருக்க வேண்டுமாகையால்,

$$16t^2 = 16t - 16t^2$$

$$32t^2 - 16t = 0$$

$$16t\ (2t - 1) = 0$$

$$\therefore \qquad t = \tfrac{1}{2}$$

அரை விஞடிக்குப் பின் கயிறு மீண்டும் விறைப்பாகும்.

மாதிரி **98.** m, m^1 பொருண்மைகளுள்ள இரு பொருட்கள் $(m > m^1)$ ஒரு வழவழப்பான கப்பியின் வழியே செல்லும் ஒரு

நீளியல் அற்ற கயிற்றினால் இணைக்கப்பட்டு, m தரையில் தொடுகையிலிருக்குமாறு, m^1 தொங்கிக் கொண்டிருக்குமாறும், வைக்கப்பட்டுள்ளன. இப்போது, m^1 ஆனது h உயரத்திற்கு உயர்த்தப்பட்டுக் கீழே விடப்பட்டால், m-ஆனது $\frac{m_1{}^2 h}{m^2 - m^{12}}$ உயரத்திற்கு மேலே எழும்புமென்று காட்டுக.

தீர்வு: m^1 ஆனது h உயரத்திற்குக் கீழே விழும்போது பெறுகின்ற வேகம் $= \sqrt{2gh}$. கயிறு விறைப்பானதும். இரு பொருட்களும் ஒரு பொதுவான வேகத்துடன் நகரும். இப்பொது வேகம் V எனில், உந்தக் காப்புத் தத்துவப்படி,

$$m^1 \sqrt{2\,gh} = (m + m^1)\,V$$

அல்லது,
$$V = \frac{m^1}{m + m^1}\sqrt{2\,gh}$$

இரு பொருட்களுக்கும் பொதுவான முடுக்கம் $a = \frac{m - m^1}{m + m_1}\,g$ என்று அறிவோம். பொருண்மை m-இன் மேல் நோக்கிய இயக்கத்தைக் கருதுக:

u = தொடக்க வேகம் $= V$

a = எதிர் முடுக்கம் $= \left(\frac{m - m^1}{m + m^1}\right) g$

v = இறுதிவேகம் $= 0$

s = செல்லும் தூரம்.

$$v^2 = u^2 + 2\,as$$
$$0 = V^2 - 2\,as$$

அல்லது,
$$s = \frac{V^2}{2\,a}$$
$$= \frac{m^{12}}{(m + m^1)^2}\cdot 2\,gh\,\frac{m + m^1}{2\,(m - m^1)\,g}$$
$$= \frac{m^{12}\,h}{m^2 - m^{12}}$$

மாதிரி 99. கால்மணி நேரத்தில் ஓர் அங்குல மழை பெய்கிறது. மழை நிலையாகவும், சீராகவும், சீரானப் பரவலாகவும் பெய்வதாகக் கருதி, தரையில் மழை துளிகள் விழுகின்ற வேகம்

16 அடி/வி. எனில் தரையின் மீது மழைத் துளிகளின் கணத் தாக்கு அழுத்தத்தை சதுர மைலுக்கு டன்களில் காண்க.

தீர்வு: ஒரு சதுர அடிப்பரப்பில் கால் மணியில் பெய்யும் மழையளவு = 1 அங். உயரம்

$$= \frac{1}{12} \text{ அடி உயரம்}$$

அதாவது, கால் மணியில் பெய்யும் மழையளவு = $\frac{1}{12}$ கன அடி.

∴ ஒரு விநாடியில் பெய்யும் மழையளவு

$$= \frac{1}{12} \times \frac{1}{15} \times \frac{1}{60} \text{ க. அடி}$$

$$= \frac{1}{12} \times \frac{1}{15} \times \frac{1}{60} \times \frac{125}{2} \text{ ராத்.}$$

$$= \frac{5}{6 \times 144} \text{ ராத்.}$$

தரையில் விழும்போது மழைத் துளியின் வேகம் = 16 அடி/வி. ஒரு சதுர அடிப் பரப்பில் ஒரு விநாடியில் மழைத்துளிகளின் உந்தம் $= \frac{5}{6 \times 144} \times 16 = \frac{5}{54}$ ராத்திலிகள்.

ஒரு சதுர அடி பரப்பில் ஒரு விநாடியில் மழையில் கணத்தாக்கு அழுத்தம் = $\frac{5}{54}$ ராத்திலிகள்.

∴ ஒரு சதுர மைல் பரப்பில் கணத்தாக்கு அழுத்தம்

$$= \frac{5}{54} \times 5280 \times 5280 \text{ ராத்தலிகள்.}$$

$$= \frac{5}{54} \times \frac{5280 \times 5280}{32} \text{ ராத்தல் எடைகள்}$$

$$= \frac{5}{54} \times \frac{5280 \times 5280}{32 \times 2240} \text{ டன் எடை.}$$

$$= 36\frac{1}{84} \text{ டன் எடை,}$$

மாதிரி 100. E எனும் இயக்க ஆற்றலை உற்பத்தி செய்கின்ற வெடியின் மூலம் M பொருண்மையுள்ள ஒரு துப்பாக்கியிலிருந்து m பொருண்மையுள்ள குண்டு ஒன்று வீசப்படுகிறது. துப்பாக்கியின் பின் நகர்வு வேகம்

$\sqrt{\dfrac{2\,mE}{M\,(M+m)}}$ என்று காட்டு.

தீர்வு : துப்பாக்கி முனையிலிருந்து வெளிப்படும்போது குண்டின் வேகம் v என்றும், துப்பாக்கியின் பின் நகர்வு வேகம் V என்றும் கொள்க. எனவே, உந்தக் காப்புத் தத்துவப்படி,

$$M\,V = mv \qquad \dots \qquad (1)$$

ஆகும்.

குண்டு, துப்பாக்கி ஆகியவற்றின் மொத்த இயக்க ஆற்றல்

$$\tfrac{1}{2}\,mv^2 + \tfrac{1}{2}\,MV^2$$

ஆனால், மொத்த உற்பத்தி செய்யப்படும் இயக்க ஆற்றல் E

ஆகையால், $E = \frac{1}{2}\,mv^2 + MV^2$

அல்லது, $2\,E = mv^2 + M\,V^2$ ஆகும்.

(1) இலிருந்து, $v = \dfrac{M\,V}{m}$ ஆகையால்,

$$2E = m.\ \frac{M^2}{m^2}\,V^2 + MmV^2$$

$$\therefore \quad 2\,m\,E = M^2\,V^2 + MmV^2$$

$$= M\,V^2\,(M+m)$$

$$\therefore \quad V^2 = \frac{2\,m\,E}{M\,(M+m)}$$

அல்லது, $V = \sqrt{\dfrac{2\,m\,E}{M\,(M+m)}}$

பல துண்டுகளாக வெடிக்கும் பொருளின் உந்த, ஆற்றல் சமன்பாடுகள்

V எனும் திசைவேகத்துடன் சென்று கொண்டிருக்கும் $(m_1 + m_2)$ பொருண்மையுள்ள ஒரு பொருள் E ஆற்றலுள்ள ஒரு வெடியின் காரணமாக m_1, m_2 ஆகிய பொருண்மைகளுள்ள இரு துண்டுகளாகப் பிளக்கப்படுகின்றன வென்று கொள்க. இவ்

விரு பிளவுபட்ட துண்டுகளும் முறையே v_1, v_2 ஆகிய திசை வேகங்களுடன் வெடிப்பிற்கு பின் அதே திசையில் நகர்த்து கொண்டிருக்குமெனில், அவற்றின்

உந்தச் சமன்பாடு $(m_1 + m_2) V = m_1 v_1 + m_2 v_2$ என்றும்,

ஆற்றல் சமன்பாடு $\frac{1}{2}(m_1 + m_2) V^2 + E = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$ என்றும் கொள்க.

ஒரு பொருளாக இணையும் இரு பொருட்களின் உந்த, ஆற்றல் சமன்பாடுகள்

முறையே v_1, v_2 ஆகிய திசை வேகங்களுடன் ஒரே நேர்கோட்டில் ஒரே திசையில் சென்று கொண்டிருக்கும் m_1, m_2 ஆகிய இரு பொருண்மைகள் ஒன்ருக இணைந்து $(m_1 + m_2)$ பொருண்மையுடைய ஒரே பொருளாக V எனும் திசை வேகத்துடன் அதே நேர்கோட்டின் மேல் செல்வதாகக் கொள்க.

அவற்றின் உந்தச் சமன்பாடு

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) V$$

ஆகும். இரண்டும் ஒன்ருக இணைந்ததன் காரணமாக இயக்க ஆற்றல் இழப்பு E எனில், ஆற்றல் சமன்பாடு

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = E + \frac{1}{2}(m_1 + m_2) V^2$$

ஆகும். இணைப்பின் காரணமாக ஆற்றலில் எவ்வித இலாபமோ இழப்போ இல்லையெனில், $E = 0$ என்றும் பிரதியிடவும்.

மாதிரி 101. M பொருண்மையுள்ள ஒரு குண்டு V எனும் திசைவேகத்துடன் நகர்ந்து கொண்டிருக்கிறது. E எனும் ஆற்றலுடன் குண்டு வெடித்து $m_1 : m_2$ என்னும் விகிதத்தில் பொருண்மைகளைக் கொண்டுள்ள இரு துண்டுகளாகப் பிளந்து, இரு துண்டுகளும் முந்திய இயக்க நேர்கோட்டின் மேலேயே தொடர்ந்து செல்கின்றன. அவற்றின் திசைவேகங்கள்

$$V + \sqrt{\frac{2 m_2 E}{m_1 M}}, \quad V - \sqrt{\frac{2 m_1 E}{m_2 M}}$$

என்று காட்டு.

தீர்வு: இரு துண்டுகளின் பொருண்மைகள் M_1, M_2 என்றும், அவற்றின் வேகங்கள் v_1, v_2 என்றும் கொள்க.

$$\therefore \quad \frac{M_1}{M_2} = \frac{m_1}{m_2}$$

அல்லது, $$\frac{M_1}{m_1} = \frac{M_2}{m_2} = \frac{M_1 + M_2}{m_1 + m_2} = \frac{M}{m_1 + m_2}$$

$$\therefore \quad M_1 = \frac{M\,m_1}{m_1 + m_2}, \quad M_2 \; \frac{M\,m_1}{m_1 + m_2}$$

உந்தச் சமன்பாடு : $M_1 v_1 + M_2 v_2 = MV$ ... (1)

ஆற்றல் சமன்பாடு : $\frac{1}{2} M_1 v_1^2 + \frac{1}{2} M_2 v_2^2 = \frac{1}{2} MV^2 + E$

அல்லது, $M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2 \; MV^2 + 2\,E$ ... (2)

சமன்பாடு (2)ஐ $M = (M_1 + M_2)$ ஆல் பெருக்கவும்.

$$M_1 (M_1 + M_2) v_1^2 + M_2 (M_1 + M_2) v_2^2 = M^2 V^2 + 2\,ME$$

$$\therefore \quad 2\,ME = M_1^2 v_1^2 + M_1 M_2 v_1^2 + M_1 M_2 v_2^2 + M_2^2 v_2^2 - (MV)^2$$

$$= M_1^2 v_1^2 + M_1 M_2 v_1^2 + M_1 M_2 v_2^2 \; M_2^2 v_2^2 - (M_1 v_1 + M_2 v_2)^2,$$ (1) இலிருந்து.

$$= M_1 M_2 v_1^2 + M_1 M_2 v_2^2 - 2\,M_1 M_2 v_1 v_2$$

$$= M_1 M_2 (v_1^2 + v_2^2 - 2\,v_1 v_2)$$

$$= M_1 M_2 (v_1 - v_2)^2$$

அல்லது, $$(v_1 - v_2)^2 = \frac{2\,M\,E}{M_1 M_2}$$

$$\therefore \quad v_1 - v_2 = \sqrt{\frac{2\,ME}{M_1 M_2}} \quad \ldots \quad (3)$$

$$(3) \times M_1 = M_1 v_1 - M_1 v_2 = M_1 \sqrt{\frac{2\,M\,E}{M_1 M_2}}$$

தவிர, $M_1 v_1 + M_2 v_2 = MV$ [சமன்பாடு (1)]

கழிக்கவும். $$(M_1 + M_2) v_2 = MV - M_1 \sqrt{\frac{2\,M\,E}{M_1 M_2}}$$

அதாவது, $$Mv_2 = MV - \sqrt{\frac{2\,M_1\,ME}{M_2}}$$

அல்லது, $$v_2 = V - \frac{1}{M} \sqrt{\frac{2\,M_1\,M\,E}{M_2}}$$

$$= V - \sqrt{\frac{2\,M_1\,E}{M\,M_2}}$$

ஆனல், $\dfrac{M_1}{M_2} = \dfrac{m_1}{m_2}$ $\quad\therefore\quad v_2 = V - \sqrt{\dfrac{2\,m_1\,E}{M\,m_2}}$

இதுபோல், $v_1 = V + \sqrt{\dfrac{2\,m_2\,E}{m_2\,M}}$ என்று காணலாம்.

மாதிரி 102. வேகமாகச் சென்று கொண்டிருக்கும் ஒரு குண்டு வெடித்து m_1, m_2 பொருண்மைகளுள்ள இது துண்டு களாகப் பிளவு படுகின்றது. பிளவுபட்ட இவ்விரு துண்டுகளும் முறையே u_1, u_2 ஆகிய திசைவேகங்களுடன் எதிர்த் திசை களில் செல்கின்றன. இயக்க ஆற்றலில் $\frac{1}{2}\,\dfrac{m_1\,m_2}{m_1 + m_2}\,(u_1 + u_2)^2$ அளவுள்ள ஆற்றல் அதிகரிக்கிறதென்று காட்டுக.

(சென்னை பி.எஸ்ஸி. 1967 ஏப்.)

தீர்வு: m_2 பொருண்மையுள்ள துண்டு u_2 வேகத்துடன் எதிர்த் திசையில் செல்வதாகக் கொள்க.

வெடிப்பதற்கு முன் குண்டின் வேகம் V என்க.

குண்டின் பொருண்மை M எனில், $M = (m_1 + m_2)$

உந்தச் சமன்பாடு: $MV = m_1 u_1 - m_2 u_2$ ... (1)

இயக்க ஆற்றல் அதிகரிப்பு E எனில்,

$$\tfrac{1}{2} m_1 u_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 u_2^2 = \tfrac{1}{2} MV^2 + E \text{ ஆகும்.}$$

அதாவது, $m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 = MV^2 + 2\,E$

இச்சமன்பாட்டை $M = (m_1 + m_2)$ ஆல் பெருக்கவும்.

$$m_1 (m_1 + m_2)\, u_1^2 + m_2 (m_1 + m_2)\, u_2^2 = M^2 u^2 + 2\,ME$$

அல்லது, $2\,ME = m_1^2 u_1^2 + m_1 m_2 u_1^2 + m_1 m_2 u_2^2 - (MV)^2$

$$= m_1^2 u_1^2 + m_1 m_2 u_1^2 + m_2^2 u_2^2 + m_1 m_2 u_2^2 - m_1 u_1 - m_2 u_2)^2$$

$$= m_1 m_2 u_1^2 + m_1 m^2 u_2^2 + 2\,m_1 m_2 u_1 u_2$$

$$= m_1 m_2 (u_1^2 + u_2^2 + 2\,u_1 u_2)$$

$$= m_1 m_2 (u_1 + u_2)^2$$

அல்லது, $$E = \frac{1}{2}\,\frac{m_1 m_2}{M}(u_1 + u_2)^2$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(u_1 + u_2)^2$$

மாதிரி 103. M, m பொருண்மைகளுடைய இரு பொருட்கள் ஒரே நேர்கோட்டில் ஒரே திசையில் முறையே V, v திசை வேகங்களுடன் சென்று கொண்டிருக்கின்றன. அவை இரண்டும் ஒரு பொருளாகக் கருதப்படின், அவற்றின் திணிவு மையத்தின் வேகம்

$$U = \frac{MV + mv}{M + m}$$

என்றும், அவற்றின் இணைந்த இயக்க ஆற்றல் $\frac{1}{2}(M+m)U^2 + \frac{1}{2}\,\frac{Mm}{M+m}u^2$ என்றும் காட்டுக. u என்பது அவற்றின் சார் வேகம்.

தீர்வு: t நேரத்தில் (x_1, y_1), (x_2, y_2) என்பன இரு பொருட்களின் அச்சுத் தூரங்களென்றும் $(\bar{x}, \bar{y})$ என்பன இணைந்த பொருளின் திணிவு மையத்தின் அச்சுத் தூரங்களென்றும் கொள்க.

$$\therefore\quad \bar{x} = \frac{M x_1 + m x_2}{M + m}, \quad \bar{y} = \frac{M y_1 + m y_2}{M + m}$$

t.ஐப் பொறுத்த வகையீடு காண்க.

$$\dot{\bar{x}} = \frac{M\dot{x}_1 + m\dot{x}_2}{M + m}, \quad \dot{\bar{y}} = \frac{M\dot{y}_1 + m\dot{y}_2}{M + m}$$

ஆனால், V, v என்பன M, m ஆகிய பொருண்மைகளின் வேகங்களாதலின், x அச்சுடன் அவற்றின் இயக்கக் கோட்டின் சாய்வு θ எனில்,

$$\dot{x}_1 = V\cos\theta, \quad \dot{y}_1 = V\,\mathrm{Sin}\,\theta\,;$$

$$\dot{x}_2 = v\cos\theta, \quad \dot{y}_2 = v\,\mathrm{Sin}\,\theta$$

ஆகும். இணைந்த பொருளின் திசை வேகம் U-வின் சாய்வு α எனில்

$$\dot{\bar{x}} = U\cos\alpha\,; \quad \dot{\bar{y}} = U\,\mathrm{Sin}\,\alpha.$$

$$\therefore \quad U \cos \alpha = \frac{MV \cos \theta + mv \cos \theta}{M + m} = \left(\frac{MV + mv}{M + m}\right) \cos \theta,$$

$$U \operatorname{Sin} \alpha = \frac{MV \operatorname{Sin} \theta + mv \operatorname{Sin} \theta}{M + m} = \left(\frac{MV + mv}{M + m}\right) \operatorname{Sin} \theta.$$

இவற்றின் வர்க்கங்களைக் கூட்டவும்.

$$U^2 = \left(\frac{MV + mv}{M + m}\right)^2 (\cos^2 \theta + \operatorname{Sin}^2 \theta)$$

$$= \left(\frac{MV + mv}{M + m}\right)^2$$

அல்லது, $U = \dfrac{MV + mv}{M + m}$

உந்தக்காப்புத் தத்துவப்படி,

$MV + mv = (M + m)\, U = M_1\, U$ என்று கொள்க.

இணைப்பின் காரணமாக ஏற்பட்ட ஆற்றல் இழப்பு E என்க.

$\therefore$ ஆற்றல் சமன்பாடு : $\frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} M_1\, U^2 + E$

அல்லது, $MV^2 + mv^2 = M_1\, U^2 + 2E.$

$(M + m) = M_1$ ஆல் இச்சமன்பாட்டைப் பெருக்கவும்.

$(M + m)\, MV^2 + (M + m)\, mv^2 = M_1^2\, U^2 + 2\, M_1 + E$

$$\begin{aligned} \therefore \quad 2\, M_1\, E &= M^2 V^2 + M\, mV^2 + M\, mv^2 + m^2 v^2 - (M_1\, U)^2 \\ &= M^2 V^2 + M\, mV^2 + Mmv^2 + m^2v^2 - (MV + mv)^2 \\ &= Mm\, V^2 + Mmv^2 - 2\, Mm\, Vv \\ &= Mm\, (V^2 + v^2 - 2\, Vv) \\ &= Mm\, (V - v)^2 \end{aligned}$$ ஆனால் $V - v =$ சார்வேகம் $= u$

$$= Mm\, u^2$$

$$\therefore \quad E = \frac{1}{2} \frac{Mm}{M_1} u^2 = \frac{1}{2} \frac{Mm}{M + m} u^2$$

$\therefore$ இணைந்த இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2}\, MV^2 + \frac{1}{2}\, mv^2$

$$= \frac{1}{2} M_1\, U^2 + E$$

$$= \frac{1}{2} (M + m)\, U^2 + \frac{1}{2} \frac{Mm}{M = m} u^2.$$

பயிற்சி 11

1. 12 அடி/விநாடி வேகத்தில் சென்று கொண்டிருக்கும் 2 ராத்தல் பொருண்மையுள்ள ஒரு பொருள் தாக்குதலை அடைந்து அதே திசையில் 20 அடி/விநாடி வேகத்துடன் செல்லத் தொடங்குகிறது. தாக்குதலின் தாக்களவையையும், தாக்குதல் $\frac{1}{100}$ விநாடிக்கு நடைபெற்றால் தாக்கு விசையின் சராசரி மதிப்பையும் காண்க.

2. 5 ராத்தல் பொருண்மையுள்ள ஒரு பொருளின் மீது செயல்படும் ஒரு விசை அதன் திசை வேகத்தை 30 மை/மணியிலிருந்து 45 மை/மணிக்கு மாற்றுகிறது. விசையின் தாக்களவையைக் காண்க.

3. 1000 அடி/விநாடி வேகத்தில் சென்று கொண்டிருக்கும் 2 அவுன்சு பொருண்மையுள்ள ஒரு குண்டு ஒரு நிலையான குறியைச் செங்குத்தாகத் தாக்கிக் கீழே விழுகிறது. குண்டின் தாக்குதல் $\frac{1}{100}$ விநாடி நேரம் நீடித்ததாகக் கருதி குண்டுக்கும் குறிக்குமிடையே ஏற்பட்ட விசைத் தாக்குதலின் சராசரி அளவைக் காண்க.

4. 4 ராத்தல் பொருண்மையுள்ள ஒரு பொருள் 3 அடி உயரத்திலிருந்து ஒரு அடைகல்லின் மேல் விழுந்து, 4 அங்குல உயரத்திற்கு எழும்புகிறது. பொருளும் அடைகல்லும் தொடுகையிலிருந்த நேரம் $\frac{1}{50}$ விநாடி யெனில், பொருளுக்கும் அடைகல்லுக்கு மிடையேயுள்ள விசையின் சராசரி அளவினைக் காண்க.

5. 8 கிராம் எடையுள்ள ஒரு பொருள் 10 மீட்டர் உயரத்திலிருந்து தரையில் விழுந்து 10 செ.மீ. உயரத்திற்கு எழும்புகிறது. தரையுடன் பொருள் தொடுகையிலிருந்த நேரம் $\frac{1}{60}$ விநாடியெனில் பொருளுக்கும் தரைக்குமிடையேயுள்ள சராசரி விசையைக் காண்க.

6. 2 அவுன்சு பொருண்மையுள்ள ஒரு பந்து 36 அடி உயரத்திலிருந்து தரையில் விழுந்து எழும்புகிறது. பந்தும் தரையும் தொடுகையிலிருந்த நேரம் $\frac{1}{20}$ விநாடியெனில், தரைக்கும் பந்துக்குமிடையேயுள்ள சராசரி விசையைக் காண்க.

7. 2 அவுன்சு பொருண்மையுள்ள ஒரு பந்து 36 அடி உயரத்திலிருந்து தரையில் விழுந்து 25 அடி உயரத்திற்கு எழும்புகிறது. பந்து தரையுடன் தொடுகையிலிருந்த நேரம் $\frac{1}{60}$

விநாடியென்று ஏற்றுக் கொள்ளப்பட்டால், தாக்களவையும், பந்துக்கும் தரைக்கு மிடையேயுள்ள சராசரி விசையைக் காண்க.

8. 3 ராத்தல் பொருண்மையுள்ள ஒரு பொருள் ஒரு கயிற்றின் மூலம் இணைக்கப்பட்டு ஓய்விலுள்ளது. கயிற்றைக் திடீரென்று சுண்டி இழுத்தால் பொருள் 10 அடி/விநாடி வேகத்தைப் பெற்றதெனில், சுண்டி இழுப்பின் தாக்களவையைக் காண்க.

9. 40 அவுன்சு பொருண்மையுள்ள ஒரு கிரிக்கட் பந்து 20 மைல்/மணி வேகத்தில் சென்று கொண்டிருக்கிறது. கிரிக்கட் மட்டையின் மூலம் இவ்வேகம் எதிர்த் திசையில் 30 மை/மணியாக மாற்றப்படுகிறது. பந்து மட்டையுடன் தொடுகையிலிருந்த நேரம் $\frac{1}{9}$ விநாடி யெனில் பந்துக்கும் மட்டைக்குமிடையே செயல்பட்ட சராசரி விசையைக் காண்க.

10. 3 அடி/விநாடி வேகத்தில் சென்று கொண்டிருக்கும் 12 ராத்தல் எடையுள்ள ஒரு பந்து எதிர்த் திசையில் 2 அடி/விநாடி வேகத்தில் சென்று கொண்டிருக்கும் 6 ராத்தலி எடையுள்ள ஒரு பந்துடன் மோதி இரண்டும் ஒன்றாகக் கோர்த்துக் கொண்டு செல்கின்றன. இரண்டுக்கும் பொதுவான வேகத்தைக் காண்க.

11. ஓய்விலிருக்கும் ஓர் இரயில் வாகன் வண்டி பின்புறமாக 4 டன் எடையுள்ள மற்றொரு வாகன் வண்டியினால் 3 மைல்/மணி வேகத்துடன் மோதப்படுகிறது. மோததுக்குப் பின்னர் இரு வண்டிகளும் ஒன்றாக இணைந்து 2 மைல்/மணி வேகத்துடன் செல்கிறதெனில் முதல் வண்டியின் எடையைக் காண்க.

12. 8 கி.மீ./மணி வேகத்தில் சென்று கொண்டிருக்கும் 6 டன் எடையுள்ள பார வண்டி யொன்று ஓய்விலிருக்கும் மற்றொரு வண்டியின் மீது மோதி, இரண்டும் ஒன்றாகச் சேர்ந்து 5 கி மீ./மணி வேகத்துடன் செல்கிறதெனில் இரண்டாவது வண்டியின் எடையைக் காண்க.

13. 10 டன் பொருண்மையுள்ள ஒரு துப்பாக்கியிலிருந்து 100 ராத்தல் பொருண்மையுள்ள குண்டு ஒன்று 1120 அடி/விநாடி வேகத்தில் வீசப்படுகிறது. துப்பாக்கியின் பின்நகர்வை 5 அடி தூரத்தில் நிறுத்தக்கூடிய மாறு விசையினைக் காண்க.

14. 5 டன் எடையுள்ள ஒரு துப்பாக்கியிலிருந்து 2200 அடி/வினடி கிடைவேகத்தில் 60 ராத்தல் எடையுள்ள குண்டு ஒன்று வெளிக் கிளம்புகிறது. துப்பாக்கி ஒரு அடி பின் நகர்வில் ஒரு தடுப்பின் மூலம் நிறுத்தப்பட்டால், தடுப்பின் எதிரழுத் தத்தை டன் எடையில் கூறுக.

15. 81 டன் எடையுள்ள ஒரு துப்பாக்கியிலிருந்து 5000 மீட்டர்/வினடி வேகத்தில் 300 கிலோ கிராம் எடையுள்ள குண்டு வெளிப்பாய்கிறது. துப்பாக்கியை 2 மீட்டர் பின் நகர்வு தூரத்தில் தடுத்து நிறுத்தக் கூடிய விசையினைக் காண்க.

16. 50 கிராம் பொருண்மையுள்ள ஒரு குண்டு 6 கிலோ கிராம் பொருண்மையுள்ள ஒரு துப்பாக்கியிலிருந்து 300 மீட்டர்/ விநாடி வேகத்தில் வெளிக்கிளம்புகிறது. துப்பாக்கியின் பின் நகர்வு வேகத்தினைக் காண்க.

17. 100 கிலோ கிராம் பொருண்மையுள்ள ஒரு குண்டு 5 டன் பொருண்மையுள்ள ஒரு துப்பாக்கியிலிருந்து சுடப்படுகிறது. துப்பாக்கியின் பின் நகர்வை $1\frac{1}{4}$ விநாடியில் நிறுத்த 2 டன் எடையுள்ள விசை தேவைப்படுமெனில் குண்டின் வேகம் 245·25 மீட்டர்/விநாடி என்று காட்டுக.

18. 28 ராத்தல் பொருண்மையுள்ள ஒரு குண்டு 800 அடி/ விநாடி வேகத்துடன் ஒரு டன் துப்பாக்கியிலிருந்து வெளிப்படு கிறது. துப்பாக்கி அதன் பின் நகர்வு வேகத்துடன் 16 இல் 1 என்ற சாய்வு தளத்தில் எவ்வளவு தூரத்திற்குச் செல்லுமென்று காண்க.

19. 2 அந்தர் பொருண்மையுள்ள குண்டு ஒன்று 25 டன் துப்பாக்கி ஒன்றிலிருந்து வெளிக் கிளம்புகிறது. பின் நகர்வு வேகத்துடன் துப்பாக்கி 8-இல் 1 என்ற சாய்தளத்தில் 8 அடி தூரத்திற்குச் செல்லுமெனில், குண்டின் முனை வேகமென்ன? (1 அந்தர் = 112 ராத்தல்)

20. 250 கிராம் எடையுள்ள ஒரு சுத்தியல் ஒரு ஆணியின் மீது 5 மீட்டர்/விநாடி வேகத்தில் தாக்கி, ஆணியை 5 செ.மீ. ஆழத்திற்கு இறக்குகிறது. ஆணியின் மீது சுத்தியலின் சராசரி அழுத்தத்தைக் காண்க.

21. 18 கிலோ கிராம் எடையுள்ள ஒரு சம்மட்டி 2·18 மீட்டர் உயரத்திலிருந்து 2 கிலோ கிராம் பொருண்மையுள்ள

ஒரு முனையின் மேல் விழுந்து அதை பூமிக்குள் 20 செ.மீ. ஆழத்திற்கு இறக்குகிறது. பூமியின் தடை சீராக யிருப்பின், அதன் அளவைக் காண்க.

22. 180 கிராம் பொருண்மையுள்ள ஒரு கிரிக்கட் பந்து ஆட்டக்காரன் மட்டையால் தாக்கு முன் 18 மீட்டர்/விநாடி வேகத்துடன் சென்று கொண்டிருக்கிறது. அது ஆட்டகாரனின் மட்டையால் அதே திசையில் 24 மீட்டர்/விநாடி வேகத்துடன் அடிக்கப்படுகிறது. ஆட்டக்காரனால் பந்துக்குக் கொடுக்கப்பட்ட தாக்களவை 756 கி.கி./வி. என்று காட்டு.

23. $2m$ பொருண்மை யொன்று 218 மீட்டர் கோபுரத்தின் அடியிலிருந்து அதன் உச்சியைக் சரியாக அடையுமாறு நிலைக் குத்தாக மேல் நோக்கி வீசப்படுகிறது. அதே நேரத்தில் கோபுரத்தின் உச்சியிலிருந்து m பொருண்மை யொன்று கீழே போடப்படுகிறது. இரு பொருண்மைகளும் சந்தித்து ஒன்றுக இணைந்து செல்கின்றன. இவ்விணைப்பு எங்கே, எப்போது ஏற்படுகிறதென்றும், இணைப்பை தொடர்ந்து இணைந்த பொருட்களின் பொது வேகத்தையம் காண்க.

24. m பொருண்மையுள்ள ஒரு பந்து ஓய்விலிருந்து ஈர்ப்பு முடுக்கத்துடன் கீழே தரையில் t விநாடிகளில் விழுந்து, துள்ளி எழும்பி $\frac{gmt}{2}(2+\sqrt{2})$ அலகுகள் என்று காட்டு.

25. m பொருண்மையுள்ள பந்து ஒன்று ஒரு சுவரின் மீது u வேகத்துடன் மோதி, $\frac{u}{2}$ வேகத்துடன் துள்ளி திரும்புகிறது. சுவற்றுடன் மொதுகை $\frac{1}{n}$ விநாடிக்கு நீடித்தால் தாக்களவை $\frac{3\,mu}{2}$ அலகுகள் என்று காட்டு.

26. 300 கிராம் பொருண்மையுள்ள ஒரு சம்மட்டி 2·18 மீட்டர் உயரத்திலிருந்து விழுந்து ஒரு இரும்புத் துண்டைத் தாக்கிப் பின் ஓய்விற்கு வருகிறது, இரும்புத் துண்டில் சம்மட்டியின் அடி $\frac{1}{10}$ விநாடிக்கு நீடித்தால் இரும்புத் துண்டின் மீது சம்மட்டி செயல்படுத்திய விசையின் அளவைக் காண்க.

27. கிடைத்தளத்தில் ஓய்விலிருக்கும் M பொருண்மையுள்ள ஒரு துப்பாக்கியிலிருந்து m பொருண்மையுள்ள குண்டு

ஒன்று வெளிப்படுகிறது. துப்பாக்கிக் குழல் கிடைத்தளத்துடன் α கோணச் சாய்விலிருக்கிறது. கிடைத்தளத்துடன் θ கோணச் சாய்வில் துப்பாக்கிக் குண்டு துப்பாக்கியிருந்து வெளிப்படுகிற தெனில், $\tan\theta = \left(1 + \frac{m}{M}\right)\tan\alpha$ என்று காட்டுக.

28. கிடைத்தளத்தில் ஓய்விலிருக்கும் M பொருண்மை யுள்ள ஒரு துப்பாக்கியிலிருந்து m பொருண்மையுள்ள குண்டு ஒன்று வெளிப்படுகிறது. துப்பாக்கிக் குழல் கிடைத்தளத் துடன் α கோணச் சாய்விவிருக்கிறது. கிடைத்தளத்துடன் θ கோணச் சாய்வில் துப்பாக்கிக் குண்டு துப்பாக்கியிலிருந்து வெளிப்படுகிறதெனில், $\theta = \cot^{-1}\left(\frac{M \cot\alpha}{M+m}\right)$ என்று காட்டுக.

29. m பொருண்மையுள்ள ஒரு குண்டு, தாராளமாகப் பின் நகரக்கூடிய M பொருண்மையுள்ள ஒரு துப்பாக்கியிலிருந்து வெளித் தள்ளப்படுகிறது. குண்டின் வேகம், துப்பாக்கியின் பின் நகர்வு வேகம் ஆகியவற்றின் சார்வேகம் v. மொத்தம் உற்பத்தியாகும் இயக்க ஆற்றல் $\frac{1}{2}\frac{Mmv^2}{M+m}$ என்று காட்டு.

30. ஒரு கிடைத்தளத்தின்மேல் α கோணச் சாய்வில் வைக்கப்பட்டுள்ள M ராத்தல் பொருண்மையுள்ள ஒரு துப் பாக்கியிலிருந்து m ராத்தல் பொருண்மையுள்ள குண்டு ஒன்று சுடப்படுகிறது. குண்டின் துப்பாக்கி முனை வேகம் V எனில், அதன் வீச்சு,

$$\frac{2V^2\left(1+\frac{m}{M}\right)\tan\alpha}{g\left\{1+\left(1+\frac{m}{M}\right)^2\tan^2\alpha\right\}}$$

என்று காட்டுக.

31. M பொருண்மையுள்ள ஒரு துப்பாக்கி m பொருண்மை யுள்ள ஒரு குண்டை கிடைத் திசையில் சுட்டு வெளிக் கிளம்பு கிறது. வெடியினுலேற்படும் ஆற்றல் அக்குண்டை நிலக்குத் தாக h உயரத்திற்குக் கொண்டு செல்லக் கூடியதெனில், துப் பாக்கியின் பின் நகர்வு வேகம் $\sqrt{\frac{2m^2gh}{M(M+m)}}$ என்று காட்டுக.

32. m பொருண்மையுள்ள ஒரு பந்து ஒரு சுவரின் மீது u வேகத்துடன் மோதி, v வேகத்துடன் அதே திசையில் திரும்புகிறது. பந்து சுவரின் மீது தொடுகையிலிருந்த நேரம் t விநாடிகளெனில், தாக்களவையையும், கணத்தாக்கு விசையின் சராசரி மதிப்பையும் காண்க.

33. m ராத்தல் பொருண்மையையுள்ள குண்டு ஒன்றைச் சுட்டுத் தள்ளியபின் M பொருண்மையுள்ள துப்பாக்கி ஒன்று V திசைவேகத்துடன் பின் நகருகிறது. துப்பாக்கி மருந்து வெடியின் இயக்க ஆற்றல் மாருதிருக்க குண்டின் பொருண்மை $2m$ ஆக மாற்றப்பட்டால் துப்பாக்கியின் பின் நகர்வு வேகம் $V\sqrt{\dfrac{2(M+m)}{M+2m}}$ ஆக மாறுமென்று காட்டுக.

34. ஒரு கிடைதளத்தின் மேல் ஓய்விலிருக்கும் M பொருண்மை ஒரு துப்பாக்கியிலிருந்து m பொருண்மையுள்ள ஒரு குண்டு சுடப்படுகிறது. துப்பாக்கிக் குழல் கிடைத்தளத்துடன் α சாய்விலுள்ளது. துப்பாக்கியின் பின் நகர்வு வேகத்துடன் குண்டின் சார்வேகம் u எனில், குண்டின் வேகத்தின் கிடை, நிலைக்குத்துக் கூறுகளையும், துப்பாக்கியின் பின் நகர்வு வேகத்தையும், வெடியின் காரணமாக ஏற்பட்ட ஆற்றலையும் காண்க.

35. m பொருண்மையுள்ள ஒரு குண்டு ஒரு நிலையான உலோகத் தகட்டில் ω வேகத்துடன் மோதி a ஆழத்திற்குத் துளைத்துச் செல்கிறது. M பொருண்மையும், b பருமனும் சீரான தடையுடனும் கூடிய நகரக் கூடிய ஒரு தகட்டை அது முழுமையாகத் துளைத்துச் செல்ல வேண்டுமாயின் $b < \dfrac{Ma}{M+m}$ என்று காட்டுக.

36. 5 கிராம், 3 கிராம் பொருண்மைகளுள்ள இரு பொருட்கள் ஒரு நிலையான வழவழப்பான கப்பியின் வழியே செல்லும் ஒரு நீளியல்பற்ற நூலின் மூலம் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. இத்தொகுதி ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டு இரண்டு விநாடிகட்கு நகர்ந்த பின் ஓய்வு நிலையுள்ள 4 கிராம் பொருண்மையொன்று திடீரென 3 கிராம் பொருண்மையுடன் இணைக்கப்படுகிறது. தொகுதி ஓய்வுக்கு வருமுன் ஆகும் நேரத்தைக் காண்க.

37. ஒரு நிலையான வழவழப்பான கப்பியின் வழியே செல்லும் கயிற்றின் மூலம் m, $2m$ ஆகிய பொருண்மைகள் இணைக்கப்

பட்டுள்ளன. 3 விநாடி இயக்கத்தின் இறுதியில், மேல் நோக்கிச் சென்று கொண்டிருக்கும் பொருண்மையுடன் மற்றொரு m பொருண்மை இணைக்கப்படுகிறது. இதன் பின்னருள்ள இயக்கத்தைக் காண்க.

38. ஒரு வழவழப்பான கப்பி வழியே செல்லும் ஒரு நூலின் மூலம் 15 அவுன்சு, 17 அவுன்சு எடைகளுள்ள பொருட்கள் இணைக்கப்பட்டு ஓய்வு நிலையிலிருந்து இயக்கத்தில் விடப் படுகின்றன. ஒரு விநாடியின் இறுதியில் சிறிய பொருளுடன் 2 அவுன்சு எடையுள்ள மற்றொரு பொருள் ஓய்வு நிலையில் இணைக் கப்படுகிறது. இரண்டாவது விநாடியின் இறுதியில் இந்த 2 அவுன்சு பொருள் கீழே விழுந்து விடுகிறது. இயக்கம் தொடங் கியதிலிருந்து 3 விநாடி யிறுதியில் பொருட்களின் நிலைகளைக் காண்க.

39. ஒரு வழவழப்பான கப்பியின் வழியே செல்லும் ஒரு கயிற்றின் மூலம் 15 ராத்தல், 5 ராத்தல் ஆகிய பொருண்மைகள் இணைக்கப்பட்டுள்ள. கனமான பொருள் தரையிலும், இலேசான பொருள் தொங்கிக் கொண்டு மிருக்கின்ற நிலையில் இத்தொகுதி ஓய்வு நிலையிலுள்ளது. 5 ராத்தல் பொருண்மையொன்று 20 அடி உயரத்திலிருந்து 5 ராத்தல் பொருண்மையின் மேல் விழுந்து அதனுடன் ஒட்டிக் கொள்கிறது. இந்த நிலையில் தொகுதி முழுவதும் நகரத் தொடங்குகிறது, 15 ராத்தல் பொருண்மை தரையிலிருந்து 4 அடி உயரத்திற்கு எழும்பு மென்று காட்டுக. (சென்னை பி.எஸ்ஸி. 1966 செப்.)

40. ஒரு சிறிய வழவழப்பான கப்பியின் வழியே செல்லும் ஒரு நீளியல்பற்ற நூலின் முலம் இணைக்கப்பட்டுள்ள 3 அவுன்சு, 5 அவுன்சு பொருண்மைகளுள்ள இரு பொருட்கள் ஒரு மீளியல் பற்ற வழவழப்பான மேசைக்கு மேல் 4 அடி உயரத்திலிருக்கு மாறு ஓய்வு நிலையில் வைக்கப்பட்டு, நகர விடப்படுகின்றன. கனமான பொருள் மேசையின் மீது மோதி ஓய்வு நிலைக்கு வரு வதாகக் கருதி மீண்டும் எப்பொழுது எந்த வேகத்துடன் அது இயக்கத்திற்கு இமுக்கப்படும் என்று காண்க.

41. m, M ஆகிய பொருண்மைகளுள்ள இரு பொருட்கள் ஒரு வழவழப்பான கப்பி வழியே செல்லும் ஒரு கயிற்றினால் இணைக்கப்பட்டு, M தரையிலிருக்குமாறு ஓய்வு நிலையில் வைக் கப்பட்டுள்ளன. m பொருண்மையுள்ள பொருள் a உயரத்திற்கு

உயர்த்தப்பட்டுக் கீழே விடப்படுகிறது. M மேலே எழும்பி $\frac{2m}{M-m}\sqrt{\frac{2a}{g}}$ என்று காட்டுக.

42. 8 மணி நேரத்தில் 3 அங்குல மழை நிலையாகத் தொடர்ந்து பெய்தால் ஒரு ஏக்கர் நிலத்தில் மழையின் அழுத்தத்தைக் காண்க. நிலத்தை அடையும்போது மழைத் துளிகளின் வேகம் 400 அடி உயரத்திலிருந்து கீழே விழும் பொருள் பெறக் கூடிய வேகத்திற்குச் சமம் என்று கொள்க.

43. ஒரு பீரங்கியில் குண்டின் மீதுள்ள விசை வெடி மருந்தினால் உற்பத்தியாகும் வாயுக்களின் வேகத்தை மட்டுமே சார்ந்திருக்குமென்று கருதி, M, m என்பன முறையே பீரங்கி, குண்டு ஆகியவற்றின் பொருண்மைகளெனில், பீரங்கித் தாராளமாகப் பின் நகரும் நிலையிலிருக்கும்போது குண்டின் வேகத்திற்கும், பீரங்கி அசைய முடியாமல் நிலைநிறுத்தப்பட்டிருக்கும் போது குண்டின் வேகத்திற்குமுள்ள விகிதம் $\sqrt{\frac{M}{M+m}}$ என்று காட்டுக.

44. 30 மைல்/மணி வேகத்தில் சென்று கொண்டிருக்கும் ஒரு குண்டு 10 ராத்தல், 15 ராத்தல், 25 ராத்தல் பொருண்மைகளுள்ள மூன்று துண்டுகளாகச் சிதறுகிறது. பின்னிரண்டு துண்டுகளும் 45 மைல்/மணி, 60 மைல்/மணி வேகங்களில் குண்டின் திசையிலேயே சென்று கொண்டிருந்தால் முதல் குண்டின் திசைவேகத்தைக் காண்க.

45. $(m_1 + m_2)$ பொருண்மையுள்ள பொருளொன்று E எனும் இயக்க ஆற்றலை உற்பத்தி செய்யும் ஓர் உள் வெடியின் மூலம் m_1, m_2 பொருண்மைகளுள்ள இரு துண்டுகளாகப் பிளவுபடுகிறது. பிளவுபட்ட பின்னரும் துண்டுகளிரண்டும் அதே திசையில் சென்று கொண்டிருந்தால், அவற்றின் சார்வேகம் $\sqrt{\frac{2E(m_1+m_2)}{m_1 m_2}}$ என்று காட்டுக.

46. $(m_1 + m_2)$ பொருண்மையுள்ள ஒரு குண்டு தரப்பட்டுள்ள திசைவேகத்துடன் சுடப்படுகிறது. குண்டு அதன் பாதையில் மிக உயர்ந்த புள்ளியிலிருக்கும் போது m_1, m_2 பொருண்மைகளுள்ள இரு துண்டுகளாகச் சிதறுகிறது. வெடிப்

பின் காரணமாக E என்னும் இயக்க ஆற்றல் கூடுதலாக உற்பத்தியாகிறது. பிளவுபட்ட துண்டுகளிரண்டும் கிடைத் திசையில் பிரிகின்றன. குண்டின் எறிவேகத்தின் நிலைக்குத்துக் கூறு V எனில், பிளவுபட்ட துண்டுகள் தரையில் மோதுகின்ற இடங்களுக்கிடையே யுள்ள தூரம் $\dfrac{V}{g}\sqrt{2E\left(\dfrac{1}{m_1}+\dfrac{1}{m_2}\right)}$ என்று காட்டுக.

47. M பொருண்மையுள்ள ஒரு துப்பாக்கி m பொருண்மையுள்ள ஒரு குண்டைச் சுட்டுத் தள்ளுகிறது. வெடியின் காரணமாக உண்டாகும் ஆற்றல் அக்குண்டை நிலைக்குத்தாக h உயரத்திற்குக் கொண்டு செல்வதற்குப் போதுமானதாகயிருக்கும் துப்பாக்கியின் பின் நகர்வு வேகம் $\left[\dfrac{2m^2gh}{M(M+m)}\right]^{\frac{1}{2}}$ என்று காட்டுக.

6. மீள்சக்திப் பொருட்களின் மோதுகை

(Impact of Elastic Bodies)

மீளியல்பு (Elasticity)

ஓர் ஒல்லியான இரும்புக் கம்பியின் ஒரு முனையை உயரமான இடத்திலுள்ள ஒரு நிலையான புள்ளியில் இருக்கமாகக் கட்டி, அதன் மறு முனையில் ஒரு கனமான பொருளைக் கட்டித் தொங்கவிட்டுப் பார்த்தால் கம்பியின் நீளம் சிறிதளவு அதிகரித்திருப்பதைக் காணலாம். இப்பொழுது அந்தக் கனமான பொருளைக் கம்பியினின்று அவிழ்த்து விடுவோமானல், கம்பி விறைப்பு நீங்கப் பெற்று முன்னிருந்த நீளத்திற்குச் சுருங்கி விடுவதைக் காணலாம். ஆகவே, கம்பியின் நீளத்திலேற்பட்ட மாறுதல் தற்காலிகமானதே யென்று காண்கிறோம். கம்பியிலேற்பட்ட இத்தற்காலிக நீட்சி மறைந்து, கம்பி மீண்டும் தன்னிலை பெறுவதற்குக் காரணம் கம்பி செய்யப்பட்டுள்ள மூலப் பொருளாகிய இரும்பின் ஏதோவொரு தன்மையே யாகும். இப்பொழுது, இரும்புக் கம்பிக்குப் பதிலாக அதே நீளமுடைய செம்புக் கம்பி யொன்றில் அதே எடையைத் தொங்கவிட்டு மேற்கண்டதுபோல் பரிசோதனையைச் செய்து பார்க்கவும். எடையைத் தொங்கவிட்டதும் செம்புக் கம்பியின் நீளம் சற்று அதிகமாவதையும் எடையை நீக்கியதும் செம்புக் கம்பி முன்னிருந்த நீளத்திற்குச் சுருங்கி விடுவதையும் காணலாம். ஆனல் செம்புக் கம்பியிலேற்பட்ட நீட்சியும், இரும்புக் கம்பியிலேற்பட்ட நீட்சியும் வித்தியாசமாக யிருப்பதையுக் காணலாம். இவ்வாறு, புறவிசை யொன்றினல் நீட்சிபெற்ற கம்பியானது அப்புற விசையின் தாக்கத்தினின்றும் விடுபட்டதும் தன்னிலை பெறுந்தன்மைக்கு "மீளயல்பு" (elasticity) என்று பெயர். இம்மீளியல்புத் தன்மை பொருளுக்குப் பொருள் அளவில் மாறுபடும்.

இப்பொழுது, இரும்பு, மரம், கண்ணுடி, இரப்பர் ஆகியவற்றுல் செய்யப்பட்ட ஒரே அளவில் கோளவடிவப் பந்துக்களை ஒரு வழவழப்பான தரையின்மேல் ஒரே உயரத்திலிருந்து போடுவோமானல், பந்துக்கள் யாவும் தரையில் மோதியபின் வெவ்வேறு உயரத்திற்கு மேல் நோக்கி எழும்புவதைக் காணலாம். இது

போன்று ஓர் இரும்புக் குண்டை ஒரு கல் தரையின்மீதும், ஒரு மரப்பலகையின்மீதும் ஒரே உயரத்திலிருந்து போட்டுப் பார்த்தோமானால் இரு சோதனைகளிலும் மோதுகைக்குப் பின் இரும்புக் குண்டு மேலெழும்பும் உயரம் மாறுபட்டிருப்பதைக் காணலாம். மேற்கண்ட சோதனைகள் யாவற்றிலும் பந்துகள் ஒரே உயரத்திலிருந்து விழுவதால் மோதுகையின்போது அவை பெற்றுள்ள திசை வேகங்கள் சமமாக யிருக்குமென்பது வெளிப்படையான உண்மையாகும். மோதுகைக்குப் பின் அவை எழும்பியுள்ள உயரங்கள் வித்தியாசமாயிருப்பதால், மொதுகைக்குப் பின் அவை பெற்றுள்ள மேல் நோக்கிய வேகங்கள் மாறுபட்டிருக்கின்றன என்று அறிகிறோம். இம்மாறுபாட்டிற்குக் காரணமென்ன ?

பந்து தரையில் மோதியவுடன் பந்துக்கும் தரைக்குமிடையே ஏற்பட்டுள்ள கணத்தாக்கு விசையின் காரணமாகப் பந்து தரை ஆகியவை தொடுகையிலுள்ள அந்தக் கணப்பொழுதில் தொடுகைப் புள்ளியைச் சுற்றி இரண்டிலுமுள்ள சிறு பரப்புக்களில் இறுக்க மேற்பட்டுச் சிறிதளவு அழுந்துகின்றன. உடனே பந்து, தரை ஆகிய இரண்டிலுமுள்ள உள் எதிரழுத்தங்களின் காரணமாக இரண்டுமே தத்தம் முந்திய நிலைகளைப் பெற முயலுகின்றன. இவ்வெதிரழுத்தங்கள் நகரும் பொருளாகிய பந்துக்கு மேல் நோக்கிய உந்தத்தை யளித்துப் பந்தை மேல் நோக்கி எழும்பச் செய்கின்றன. இவ்வாறு பந்துக்கு மேல் நோக்கிய உந்தத்தைக் கொடுக்கின்ற உள் எதிரழுத்தங்கள் பந்து தரை ஆகியவற்றின் உலோகத் தன்மையைச் சார்ந்திருக்குமாகையால் வெவ்வேறு உலோகங்களால் செய்யப்பட்ட பந்துகள் வெவ்வேறு உயரங்களுக்கு எழும்புகின்றன ; வெவ்வேறு தரைகளின் மீது விழுகின்ற ஒரே பந்து வெவ்வேறு உயரங்களுக்கு எழும்புகின்றது. அதாவது, மோதலுக்கு முன் பந்து பெற்றிருந்த திசைவேகம் பந்தின் உலோகத் தன்மையின் காரணமாக மோதலுக்குப் பின் குறைந்து விடுகிறது. இவ்வாறு, மோதலுக்கு முன் ஒரு பொருள் பெற்றிருந்த திசைவேகம் மோதலுக்குப் பின் மாறுபடுவதற்குக் காரணமான தன்மையே அப்பொருளின் ''மீளியல்பு'' எனப்படுகிறது. ஒரு பொருள் ஒரு விசையினால் அழுத்தப்படும்போது இறுக்கமடைந்து, பின் அதனை அழுத்திக் கொண்டிருக்கும் விசை நீக்கப்பட்டதும் அது தன் மூல நிலைக்கு மீள்வதற்கு அல்லது மீள முயல்வதற்கு அப்பொருளின் மீளியல்புத் தன்மையே காரணமாகும். எல்லா வகைப் பொருட்களும் அதிக அளவிலோ அல்லது குறைந்த அளவிலோ இம்மீளயல்புத் தன்மையைப் பெற்றிருப்பதாகக்

காணப்பட்டுள்ளன. இத்தகைய மீளியல்புத் தன்மையைப் பெற்றுள்ள பொருட்கள் ''மீளயல்புடைய பொருட்கள்'' அல்லது ''மீள் சக்திப் பொருட்கள்'' என்றழைக்கப் படுகின்றன. எல்லாப் பொருட்களுக்கும் மீளியல்புத் தன்மை சிறிதளவேனு மிருக்குமாகையால் எல்லாப் பொருட்களையுமே ஏறக்குறைய மீள்சக்திப் பொருட்கள் என்றழைக்கலாம்.

இறுக்கமும் நிலைமீள்தலும் (Compression and Restitution)

ஒரு டென்னிஸ் பந்தை ஒரு சுவரின் மீது வீசி எறிந்தோமானால் சுவரில் வட்டவடிவமான கறை படிந்திருப்பதைக் காணலாம். பந்து, சுவர் ஆகிய இரண்டும் கட்டிறுக்கமாகயிருக்குமே யானால் சுவரில் ஒரு புள்ளி (தொடுபுள்ளி) மட்டுமே படிந்திருக்க வேண்டும். தொடுபுள்ளிக்குப் பதிலாக ஒரு தொடு வட்டம் படிந்திருப்பதால் அத்தொடு வட்டத்தின் பரப்பளவிற்குச் சமமான பரப்புடைய பந்தின் கோளப் பகுதி சுவருடன் தொடுகையிருந் திருப்பதாக அறிகிறோம். ஆகவே, பந்தின் அக்கோளப் பகுதி இருக்கமடைந்து உட்புறமாக அமுக்கப்பட்டிருக்க வேண்டும். இவ்வாறு ஒரு புறம் இருக்கமடைந்த பந்தின் மீளியல்புத் தன்மையானது இறுக்கமடைந்த பகுதியை அதன் மூல நிலைக்குக் கொண்டுவரும் முயற்சியின் பயனாகப் பந்து சுவரைவிட்டுப் பிரிந்து எழும்பித் துள்ளுகிறது. ஆகவே, சுவருடன் மோதிய கணத்தில் பந்து தொடுபுள்ளியை ஒட்டிச் சிறிது இறக்கமடைந்து பின் அதன் மூல வடிவத்தைத் திரும்பப் பெறுகிறது. ஆகவே, ஒன்றின் மீதொன்று மோதுகின்ற இரு மீள்சக்திப் பொருட்களின் மோதுகைக் காலத்தை இரண்டாகப் பிரிக்கலாம்: முதலாவதாக, மோதுகையிலுள்ள பொருட்கள் ஒவ்வொன்றும் மற்றதனால் இறுக்கப்படுகின்ற இறுக்கக் காலம் (Period of Restitution) இவ்விரு காலங்களிலும் மோதுகைப் பொருட்களுக்கிடையே செயல்படுகின்ற விசைகள் முறையே இறுக்க விசை (Force of Compression), நிலை மீள் விசை (Force of Restitution) என்றழைக்கப்படுகின்றன.

நேரடி மோதலும், சாய் மோதலும் (Direct impact and oblique impact)

ஒன்றின் மீதொன்று மோதுகின்ற இரு பொருட்களுள் ஒவ்வொன்றின் இயக்கத் திசையும் அவற்றின் மோதற்புள்ளி வழிச் செங்கோட்டின் (Normal at the point of impact) வழியே அமையுமாயின் அவற்றிற்கிடையே ஏற்படும் மோதலுக்கு ''நேரடி மோதல்'' (Direct impact) என்று பெயர்.

ஒன்றின் மீதொன்று மோதுகின்ற இரு பொருள்களுள் ஏதாவதொன்றின் இயக்கத் திசையும் அல்லது இரண்டின் இயக்கத் திசைகளும் அவற்றின் மோதற்புள்ளி வழிச் செங் கோட்டின் வழியே அமையாமல், அச் செங்கோட்டிற்குச் சாய் வான திசையில் அல்லது சாய்வான திசைகளில் அமையு மாயின், அவற்றிற்கிடையே ஏற்படும் மோதலுக்கு "சாய் மோதல்" (oblique impact) என்று பெயர்.

மோதுகையிலுள்ள இரு பொருள்களின் மோதற்புள்ளி வழியே செல்லும் செங்கோட்டிற்கு "மோதற் கோடு" (line of impact) என்று பெயர். மோதற் பொருள்களிரண்டும் கோளங் களாயின் அவற்றின் மோதற் கோடு அவற்றின் மையக் கோடேயாகும்.

மோதல் விதிகள்
(Laws of Impact)

1. உந்தக் காப்பு விதி (Laws of Conservation of Momentum)

மோதலுக்குப் பின் மோதற் பொருள்களின் பொதுச் செங் கோட்டு வழி உந்தங்களின் இயற்கணித மொத்தம் மோதலுக்கு முன் அவற்றின் அதே செங்கோட்டு வழி உந்தங்களின் இயற் கணித மொத்தத்திற்குச் சமம்.

u_1, u_2 என்னும் திசைவேகங்களுடன் ஒரே நேர்கோட்டில் சென்று கொண்டிருக்கும் m_1, m_2 பொருண்மைகளுள்ள இரு பொருள்கள் ஒன்றின் மீதொன்று நேரடியாக மோதுகின்றன என்றும், மோதலுக்குப் பின் அவற்றின் திசை வேகங்கள் முறையே v_1, v_2 என்றும் கொள்க. உந்தக்காப்பு விதியின்படி,

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$$

ஆகும்.

2. நியூட்டனின் பரிசோதனை விதி (Newton's Experimental Law)

நியூட்டன் ஒன்றோடொன்று மோதுகின்ற பல பொருள்கள் பற்றிய பரிசோதனைகளை நடத்திப் பின்வரும் மோதல் விதியைக் கண்டுபிடித்தார்.

"இரு பொருள்கள் நேரடியாக மோதும்போது, மோத லுக்குப் பின் அவற்றுள் ஒன்றைப் பொறுத்து மற்றதன் சார் வேகம் மோதலுக்கு முன் அவற்றின் சார்வேகத்துடன் ஒரு மாறு விகிதத்தைக் கொண்டிருப்பதோடு, எதிர்த் திசையிலு மிருக்கும்."

"இரு பொருள்கள் சாய்வாக மோதும்போது, மோதலுக்குப் பின் அவற்றின் பொதுச் செங்கோட்டு வழித்திசை வேகக்கூறு களுள் ஒன்றைப் பொறுத்து மற்றதன் சார்வேகம், மோதலுக்கு முன் அவற்றின் பொதுச் செங்கோட்டு வழித்திசை வேகக் கூறு களின் சார்வேகத்துடன் ஒரு மாறு விகிதத்துடனிருப்பதோடு, எதிர்த் திசையிலுமிருக்கும்."

இம் மாறு விகிதம் மோதற் பொருள்களின் மூலப் பொருள்களை மட்டுமே சார்ந்திருக்குமே யல்லாது அவற்றின் பொருண்மை களை அல்லது பரிமாணங்களையோ சார்ந்திருக்காது. e என் னும் எழுத்தின் மூலம் பொதுவாகக் குறிப்பிடப்படுகின்ற இந்த மாறு விகிதம் "மீட்சிக் கெழு" (Coefficient of Elasticity) அல்லது "மீளியல் குணகம்" அல்லது "மீளமைவுக் குணகம்" (Coefficient of Restitution) என்று அழைக்கப்படுகிறது.

u_1, u_2 ஆகிய திசைவேகங்களுடன் ஒரு நேர் கோட்டில் சென்று கொண்டிருக்கும் e மீட்சிக் கெழுவுடைய இரு பொருள் கள் ஒன்றோடொன்று மோதி, மோதலுக்குப்பின் முறையே v_1, v_2 ஆகிய திசைவேகங்களுடன் அதே நேர் கோட்டில் செல்லுமே யானால், நியூட்டனின் பரிசோதனை விதியின்படி,

$$v_1 - v_2 = -e\ (u_1 - u_2)$$

ஆகும்.

பொதுச் செங்கோட்டுடன் α, β கோணச் சாய்வுத் திசை களில் முறையே u_1, u_2 திசை வேகங்களுடன் சென்று கொண் டிருக்கும் இரு பொருள்கள் ஒன்றோடொன்று மோதி, மோதலுக் குப் பின் பொதுச் செங்கோட்டுடன் முறையே θ, ϕ கோணச் சாய்வுத் திசைகளில் v_1, v_2 திசை வேகங்களுடன் செல்லுமே யானால், நியூட்டனின் பரிசோதனை விதியின்படி,

$$v_1 \cos\theta - v_2 \cos\phi = -e\ (u_1 \cos\alpha - u_2 \cos\beta)$$

ஆகும்.

மிகவும் கவனமாகச் செய்யப்பட்ட பரிசோதனைகளிலிருந்து, நியூட்டனின் மேற்கண்ட மோதல் விதி தோராயமாகவே சரி யாக யிருப்பதாகக் காணப்பட்டுள்ளது. மோதலுக்கு முன் இரு பொருள்களின் திசைவேகங்கள் அதிகமாக யிருப்பின் e-ன் மதிப்புக் குறைவதாகக் காணப்பட்டுள்ளது. மோதற் சோடி களின் மூலப் பொருள்களின் தன்மைகளுக்கேற்ப e-ன் மதிப்பு மாறுவதாகவும் காணப்பட்டுள்ளது. மேலும், e-ன் மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புகள் முறையே 1, 0 என்றும் கணக்கிடப்பட்

டுள்ளன. $e = 1$ கொண்டுள்ள பொருள்கள் ''முழுமை மீள் சக்திப் பொருள்கள்'' (Perfectly elastic bodies) என்றும், $e = 0$ எனக் கொண்டுள்ள பொருள்கள் ''மீள்சக்தி முற்றிலுமற்ற பொருள்கள்'' (Perfectly inelastic bodies) என்றும் அழைக்கப் படுகின்றன.

3. மோதற் கோட்டிற்குச் செங்குத்துத் திசையில் இயக்க விதி

இரு வழவழப்பான பொருள்கள் ஒன்றோடொன்று மோதும் போது அவற்றின் மோதற் கோட்டிற்குச் செங்குத்துத் திசையில் எவ்விதக் கணத்தாக்கு விசையும் செயல்படாதாகையால், அத் திசையில் எவ்வித உந்த மாறுபாடு மிருக்காது. எனவே, மோதற் பொருள்களின் மோதற் கோட்டிற்குச் செங்குத்துத் திசையில் ஒவ்வொரு பொருளின் திசைவேகக் கூறு எவ்வித மாறுதலையும் அடையாது.

u_1, u_2 ஆகிய திசை வேகங்களுடன் பொதுச் செங்கோட் டுடன் முறையே α, β கோணச் சாய்வுத் திசைகளில் சென்று மோதுகின்ற e மீட்சிக் கெழுவுடைய இரு பொருள்கள் மோதலுக் குப் பின் பொதுச் செங்கோட்டுடன் முறையே θ, ϕ கோணத் திசைகளில் v_1, v_2 திசைவேகங்களுடன் செல்லுமேயானால்,

$$v_1 \sin \theta = u_1 \sin \alpha,$$

$$v_2 \sin \phi = u_2 \sin \beta$$

ஆகும்.

ஒரு நிலையான தளத்தின்மீது ஒரு கோளத்தின் மோதல்

ஒரு நிலையான தளத்தின்மீது m பொருண்மையுள்ள ஒரு கோளம் u திசைவேகத்துடன் நேரடியாக மோதுகிற தெனவும், மோதலுக்குப் பின் அது v திசைவேகத்துடன் அதே நேர்கோட் டில் எதிர்த் திசையில் துள்ளித் திரும்புகிறதென்றும் கொள் வோம்.

இங்குக் கோளம், நிலையான தளம் ஆகியவை இரு மோதற் பொருள்களாகும். மோதலுக்கு முன் கோளத்தின் திசை வேகம் u என்றும், மோதலுக்குப் பின் அதன் திசைவேகம் v என்றும் கொள்க. இவ்விரு திசைவேகங்களும் எதிர்த் திசை களில் செயல்படுகின்றன. இரண்டாவது மோதற் பொருளாகிய தளம் நிலையாக யிருப்பதால் மோதலுக்கு முன்னரும் பின்னரும் அதன் வேகங்கள் பூச்சியமாகும். எனவே, மோதலுக்குப் பின் அவற்றின் சார்வேகம் $= v - 0 = v$ ஆகும். அதே திசையில், மோதலுக்கு முன் அவற்றின் சார்வேகம் $= -u - 0 = -u$

ஆகும். e என்பது கோளம், தளம் ஆகியவற்றிற்கிடையேயுள்ள மீட்சிக்கெழு வெனில், நியூட்டனின் விதிப்படி,

மோதலுக்குப் பின் சார்வேகம் $= - e$ (மோதலுக்கு முன் சார்வேகம்)

$$\therefore \quad v = -e(-u) = eu.$$

அதாவது, நிலையானத் தளத்தின் மீது u திசைவேகத்துடன் மோதுகின்ற ஒரு கோளம், மோதலுக்குப் பின் eu திசைவேகத்துடன் துள்ளி எழும்பும்.

உயரத்திலிருந்து தரையில் விழும் கோளத்தின் மோதல்

h உயரத்திலிருந்து விழுகின்ற ஒரு கோளம் தரையின்மீது u திசைவேகத்துடன் மோதுவதாகக் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad u^2 = 0 + 2\,gh = 2\,gh, \text{ அல்லது } u = \sqrt{2\,gh}.$$

e என்பது கோளத்திற்கும் தரைக்குமிடையே உள்ள மீட்சிக்கெழு என்றும், மோதலுக்குப் பின் கோளம் v திசைவேகத்துடன் துள்ளி எழும்புவதாகவும் கொள்க.

$$\therefore \quad v = eu = e\sqrt{2\,gh}$$

ஆகும். எனவே, முதல் மோதலுக்குப் பின் $v = eu = e\sqrt{2\,gh}$ திசைவேகத்துடன் எழும்புகின்ற கோளம் h_1 உயரத்திற்குச் சென்றால், $v^2 = u^2 + 2\,as$ என்னும் சூத்திரத்தில், $u = e\sqrt{2\,gh}$, $v = 0$, $a = -g$; $s = h$ என்று பிரதியிடுக.

$$\therefore \quad 0 = e^2 \cdot 2gh + 2\,(-g)\,(h_1)$$

அல்லது,
$$h_1 = \frac{e^2 \,.\, 2\,gh}{.2g} = e^2\,h.$$

குறிப்பு 1. கோளமும் தரையும் மீள்சக்தி முற்றிலுமற்றவையாயிருப்பின்,

$$e = 0 \quad \therefore \quad v = 0\,; \quad h_1 = 0.$$

ஆகவே, மோதலுக்குப் பின் கோளம் தரையிலிருந்து மேலே எழும்பாமல் தரையிலேயே கிடக்கும்.

குறிப்பு 2. கோளமும் தரையும் முழுமை மீள்சக்தியுடையவையாயிருப்பின், $e = 1$ ஆகும்.

$$\therefore \quad v = u\,; \quad h_1 = e^2\,h = h$$

ஆகவே, கோளமானது எவ்வளவு உயரத்திலிருந்து எந்தத் திசைவேகத்துடன் தரையின் மீது மோதியதோ அதே வேகத்துடன் அதே உயரத்திற்கு மோதலுக்குப் பின் மேலே எழும்பும்.

மாதிரி **104.** ஒரு பந்து h உயரத்திலிருந்து ஒரு நிலையான, வழவழப்பானக் கிடைத்தளத்தின் மேல் விழுகிறது. மீளமைவுக் குணகம் e எனில், துள்ளுவது நிற்குமுன் பந்து வரைந்த மொத்த தூரம் $\frac{1+e^2}{1-e^2}.\ h$ என்றும், கடந்துள்ள நேரம் $\frac{1+e}{1-e}\sqrt{\frac{2h}{g}}$ என்று காட்டுக.

தீர்வு: பந்து முதல் தடவையாகத் தரையில் மோதுமுன் அதன் வேகம் u எனில்,

$$u = \sqrt{2gh} \text{ ஆகும்.} \quad \therefore \quad h = \frac{u^2}{2g}$$

முதல் மோதலுக்குப்பின் பந்து $u_1 = eu$ வேகத்துடன் மேல் நோக்கி $h_1 = e^2 h$ உயரத்திற்கு எழும்பி, மீண்டும் அதே வேகத்துடன் தரையில் மோதும். ஆகவே, முதல் மோதலுக்கும் இரண்டாவது மோதலுக்குமிடையே பந்து வரைந்துள்ள மொத்தத் தூரம் $2h_1 = 2e^2 h$ ஆகும்.

இப்போது பந்து இரண்டாம் முறையாக $u_1 = eu$ வேகத்துடன் தரையில் மோதுவதால் இரண்டாம் மோதலுக்குப்பின் பந்து $u_2 = eu_1 = e^2 u$ வேகத்துடன் மேல் நோக்கி $h_2 = e^2 h_1 = e^4 h$ உயரத்திற்கு எழும்பி, மீண்டும் அதே வேகத்துடன் தரையில் மோதும். ஆகவே, இரண்டாம் மோதலுக்கும் மூன்றும் மோதலுக்குமிடையே பந்து வரைந்துள்ள மொத்தத் தூரம் $2h_2 = 2e^4 h$ ஆகும். இவ்வாறு பந்து ஓய்வு நிலையை அடையும் வரை துள்ளிக் கொண்டேயிருக்கும்.

ஆகவே, பந்து ஓய்வு நிலைபெறும் வரை மொத்தம் வரைந்துள்ள தூரம்

$$= h + 2h_1 + 2h_2 + 2h_3 + \ldots\ldots$$
$$= h + 2e^2 h + 2e^4 h + 2e^6 h + \ldots\ldots$$
$$= h + 2e^2 h\,(1 + e^2 + e^4 + \ldots\ldots)$$
$$= h + 2e^2 h.\ \frac{1}{(1-e^2)}$$

$$= h \left[\frac{1 - e^2 + 2e^2}{1 - e^2}\right]$$

$$= h \frac{(1 + e^2)}{1 - e^2}$$

இப்பொழுது $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ என்னும் சூத்திரத்தில் $s = h$, $u = 0$, $a = g$ என்று பிரதியிட்டு h உயரத்திலிருந்து பந்து தரையில் விழுவதற்கு ஆகும் நேரம் $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ என்று பெறலாம்.

முதல் மோதலுக்குப் பின் பந்து h_1 உயரத்திற்கு மேலே எழும்பி, பின் தரையை இரண்டாம் முறையாக மோதுவதால், முதல் மோதலுக்கும் இரண்டாம் மோதலுக்கு மிடையேயுள்ள நேரம் $2 \times h_1$ உயரத்திலிருந்து தரையில் விழுவதற்கு ஆகும் நேரமாகும்.

அதாவது, முதலிரு மோதல்களுக்கிடையே யுள்ள நேரம்

$$= 2 \times \sqrt{\frac{2h_1}{g}}, \quad \text{ஆனால் } h_1 = e^2 h$$

$$= 2 \times \sqrt{\frac{2e^2h}{g}}$$

$$= 2e \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

இதுபோல் இரண்டாம், மூன்றும் மோதல்களுக்கிடையேயுள்ள நேரம்

$$= 2 \sqrt{\frac{2h_2}{g}}$$

$$= 2 \times \sqrt{\frac{2e^4h}{g}}$$

$$= 2e^2 \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

இதுபோல் பந்து ஓய்வு நிலை பெறும்வரை அடுத்தடுத்த இரு மோதல்களுக்கிடையேயுள்ள நேரங்களைக் காணலாம். ஆகவே, பந்து ஓய்வு நிலை பெறுவதற்கு ஆகும் மொத்த நேரம்

$$= \sqrt{\frac{2h}{g}} + 2e\sqrt{\frac{2h}{g}} + 2e^2\sqrt{\frac{2h}{g}} + \ldots\ldots\ldots$$

$$= \sqrt{\frac{2h}{g}} + 2e\sqrt{\frac{2h}{g}}\,(1 + e + e^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots)$$

$$= \sqrt{\frac{2h}{g}} + 2e\sqrt{\frac{2h}{g}}\cdot\left(\frac{1}{1-e}\right)$$

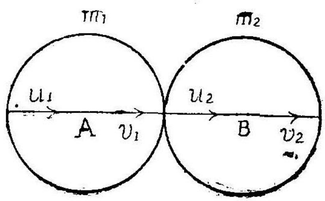
$$= \sqrt{\frac{2h}{g}}\left[1 + \frac{2e}{1-e}\right]$$

$$= \sqrt{\frac{2h}{g}}\left[\frac{1-e+2e}{1-e}\right]$$

$$= \sqrt{\frac{2h}{g}}\;\frac{1+e}{1-e}$$

நேரடி மோதலுக்குப்பின் பொருள்களின் இயக்கத்தை நிர்ணயித்தல்

ஒரே திசையில் u_1, u_2 திசைவேகங்களுடன் சென்று கொண்டிருக்கும் m_1, m_2 பொருண்மைகளுடய இரு வழவழப்பானக் கோளங்கள் நேரடியாக மோதுகின்றன. மீளியல் குணகம் e எனில் மோதலுக்குப்பின் அவற்றின் திசை வேகங்களைக் காண்க :



படம் 62

இரு கோளங்களும் நேரடியாக மோதுவதால், மோதலுக்குப் பின்னரும் அவற்றின் திசை வேகங்கள் பொதுச் செங்கோட்டின் வழியேதானிருக்கும். மோதலுக்குப் பின் அவற்றின் திசைவேகங்கள் v_1, v_2 எனில், உந்தக்காப்பு விதியின்படி,

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \qquad \ldots \qquad (1)$$

நியூட்டனின் பரிசோதனை விதியின்படி,

$$v_1 - v_2 = -e(u_1 - u_2) \quad \ldots \quad (2)$$

$$(2) \times m_2 \equiv m_2 v_1 - m_2 v_2 = -e\, m_2 u_1 + e\, m_2 u_2 \quad \ldots \quad (3)$$

$$(1) + (3) \equiv (m_1 + m_2)\, v_1 = (m_1 - e\, m_2)\, u_1 + (1 + e)\, m_2 u_2$$

$$\therefore \quad v_1 = \frac{(m_1 - e\, m_2)\, u_1 + (1 + e)\, m_2 u_2}{m_1 + m_2}$$

இதுபோல், $$v_2 = \frac{(1 + e)\, m_1 u_1 + (m_2 - e\, m_1)\, u_2}{m_1 + m_2}$$

குறிப்பு: இரு கோளங்களும் சம பொருண்மையுடையன வாகவும், முழுமை மீள் சக்தியுடையனவாகவுமிருப்பின், $m_1 = m_2$; $e = 1$.

$$\therefore \quad v_1 = \frac{(m_1 - m_1)\, u_1 + 2\, m_1 u_2}{2\, m_1} = u_2,$$

இதுபோல், $v_2 = u_1$ என்று காணலாம்.

அதாவது, முழுமையான மீள்சக்தியுடைய இரு சமப் பொருண்மைக் கோளங்கள் நேரடியாக மோதுமானால் அவை தத்தம் திசைவேகங்களை மாற்றிக்கொள்ளும்.

m_1 பொருளின்மீது செயல்படும் மோதல் விசையின் தாக்களவை

m_1 பொருளில் மோதலின் தாக்களவை $= m_1$-ன் உந்த மாறுபாடு

$$= m_1 u_1 - m_1 v_1$$

$$= m_1 u_1 - m_1 \left[\frac{(m_1 - em_2)\, u_1 + (1 + e)\, m_2 u_2}{m_1 + m_2}\right]$$

$$= \frac{m_1 (m_1 + m_2)\, u_1 - m_1 (m_1\, em_2)\, u_1 - (1 + e)\, m_1 m_2 u_2}{m_1 + m_2}$$

$$= \frac{m_1 m_2 (1 + e)\, u_1 - (1 + e)\, m_1 m_2 u_2}{m_1 + m_2}$$

$$= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1 + e)(u_1 - u_2)$$

m_2 பொருளின் மீது செயல்படும் மோதல் விசையின் தாக்களவை m_1 பொருளின் மீது செயல்படும் மோதல் விசையின் தாக்களவைக்குச் சமமாகவும் எதிராகவுமிருக்கும். இச் சம அளவிலான தாக்களவையே மோதலின் முழுத்தாக்களவையாகும்.

இறுக்கத்தின் தாக்களவையும், நிலைமீட்சியின் தாக்களவையும் (Impulses of compression and Restitution)

m_1 பொருளின் மீது மோதலின் முழு தாக்களவையை என்று குறிப்பிடுக.

$$\therefore \quad I = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1 + e)(u_1 - u_2)$$

ஆனால், மோதலின் முழுத்தாக்களவை யென்பது m_1-ன் மீது செயல்படும் இறுக்கத்தின் தாக்களவை, நிலைமீட்சியின் தாக்களவை ஆகியவற்றின் மொத்தமாகும். இறுக்கத்தின் தாக்களவை I_C என்றும், நிலைமீட்சியின் தாக்களவை I_R என்றும் குறிப்பிடப்படின்,

$$I = I_C + I_R.$$

ஆகும். ஆனால் மீளியல் கெழு $e = 0$ எனில், பொருள் இறுக்கமடைந்த பின் தன் மூலநிலையைத் திரும்பப் பெற முடியாதாகையால் நிலை மீட்சித் தாக்களவை $I_R = 0$ ஆகும். I-ல் $e = 0$ என்று பிரதியிட

$$\therefore \quad I_C = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (u_1 - u_2)$$

என்று காணலாம்.

$$\therefore \quad I_R = I - I_C$$

$$= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (u_1 - u_2) [(1 + e) - 1]$$

$$= \frac{e\, m_1 m_2}{m_1 + m_2} (u_1 - u_2)$$

$$\therefore \quad I_R = e\, I_C.$$

நேரடி மோதலின் இயக்க ஆற்றல் இழப்பு (Loss of K. E. due to Direct Impact)

1. முற்றிலும் மீள்சக்தியற்ற பொருள்களின் மோதுகை

u_1, u_2 ஆகிய திசைவேகங்களுடன் சென்று கொண்டிருக்கும் m_1, m_2 பொருண்மைகளுள்ள, முற்றிலும் மீள்சக்தியற்ற இரு பொருள்கள் ஒன்றோடொன்று நேரடியாக மோதுகின்றன. மோதலின் விளைவாக ஏற்படும் இயக்க ஆற்றல் இழப்பைக் காணல் :

மோதலுக்குப்பின் பொருள்களின் திசைவேகங்கள் முறையே v_1, v_2 என்க. இரு பொருள்களும் முற்றிலும் மீள்சக்தியற்றவை யாகையால், $e = 0$ ஆகும். உந்தக் காப்பு விதியின்படி :

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$$

நியூட்டனின் பரிசோதனை விதியின்படி,

$$v_1 - v_2 = -e(u_1 - u_2) = -0\,(u_1 - u_2) = 0$$

$$\therefore \quad m_1 v_1 - m_1 v_2 = 0$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$$

$$\therefore \quad (m_1 + m_2)\, v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$$

அல்லது, $$v_2 = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2}$$

இதுபோல், $$v_1 = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2} = v_2$$ என்று காணலாம்.

மோதலுக்கு முன் இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2$

மோதலுக்குப் பின் இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$

$$= \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2}\right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(m_1 u_1 + m_2 u_2)^2}{(m_1 + m_2)^2} [m_1 + m_2]$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(m_1 u_1 + m_2 u_2)^2}{m_1 + m_2}$$

$\therefore$ இயக்க ஆற்றல் இழப்பு $= (\frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2)$

$$- \frac{1}{2} \frac{(m_1 u_1 + m_2 u_2)^2}{m_1 + m_2}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{m_1 + m_2} [m_1 (m_1 + m_2) u_1^2 + m_2 (m_1 + m_2) u_2^2 - (m_1 u_1 + m_2 u_2)^2]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{m_1 + m_2} [m_1 m_2 u_1^2 + m_1 m_2 u_2^2 - 2\, m_1 m_2 u_1 u_2]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} [u_1^2 + u_2^2 - 2\, u_1 u_2]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (u_1 - u_2)^2.$$

2. நேரடி மோதலில் இரு மீள்சக்திப் பொருள்களின் இயக்க ஆற்றல் இழப்பு

u_1, u_2 திசைவேகங்களுடன் சென்று கொண்டிருக்கும் இரு வழவழப்பான மீள்சக்திக் கோளங்கள் ஒன்றோடொன்று நேரடியாக மோதுகின்றன. மோதலுக்குப் பின் அவற்றின் திசைவேகங்கள் முறையே v_1, v_2. அவற்றிற்கிடையேயுள்ள மீளியல் புக்கெழு e எனில், மோதலின் விளைவாக ஏற்பட்டுள்ள இயக்க ஆற்றல் இழப்பினைக் காணல் :

உந்தக்காப்பு விதியின்படி :

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \qquad \ldots \qquad (1)$$

நியூட்டனின் விதியின்படி :

$$v_1 - v_2 = -e(u_1 - u_2) \qquad \ldots \qquad (2)$$

இவ்விரு சமன்பாடுகளையும் தீர்த்து

$$v_1 = \frac{(m_1 - em_2)\,u_1 + m_2(1+e)\,u_2}{m_1 + m_2} \qquad \ldots \qquad (3)$$

$$v_2 = \frac{m_1(1+e)\,u_1 + (m_2 - em_1)\,u_2}{m_1 + m_2} \qquad \ldots \qquad (4)$$

என்று பெறலாம்.

மோதலுக்கு முன் இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2$

மோதலுக்குப் பின் இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$

இயக்க ஆற்றல் இழப்பு $= \frac{1}{2}(m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2) - \frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2)$

$$= \frac{1}{2} m_1 (u_1^2 - v_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (u_2^2 - v_2^2)$$

$$= \frac{1}{2} m_1 (u_1 - v_1)(u_1 + v_1) + \frac{1}{2} m_2 (u_2 - v_2)(u_2 + v_2)$$

ஆனால் (1)-லிருந்து,

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

அல்லது, $\quad m_2(u_2 - v_2) = -m_1(u_1 - v_1)$

∴ இயக்க ஆற்றல் இழப்பு

$$= \frac{1}{2} m_1 (u_1 - v_1)(u_1 + v_1) - \frac{1}{2} m_1 (u_1 - v_1)(u_2 + v_2)$$

$$= \frac{1}{2} m_1 (u_1 - v_1)[(u_1 + v_1) - (u_2 + v_2)]$$

$$= \frac{1}{2} m_1 (u_1 - v_1)[(u_1 - u_2) + (v_1 - v_2)]$$

$$= \tfrac{1}{2} m_1 (u_1 - v_1) [(u_1 - u_2) - e (u_1 - u_2)] \text{ (2)-லிருந்து.}$$

$$= \tfrac{1}{2} m_1 (u_1 - v_1) [(u_1 - u_2)(1 - e)]$$

$$= \tfrac{1}{2} m_1 (u_1 - u_2)(1 - e)(u_1 - v_1)$$

$$= \tfrac{1}{2} m_1 (u_1 - u_2)(1 - e)\left[u_1 - \frac{(m_1 - em_2) u_1 + m_2 (1 + e) u_2}{m_1 + m_2}\right]$$

$$= \tfrac{1}{2} m_1 (u_1 - u_2)(1 - e) \left[\frac{(m_1 + m_2) u_1 - (m_1 - em_2) u_1 - m_2 (1 + e) u_2}{m_1 + m_2}\right]$$

$$= \tfrac{1}{2} m_1 (u_1 - u_2)(1 - e)\left[\frac{m_2 (1 + e) u_1 - m_2 (1 + e) u_2}{m_1 + m_2}\right]$$

$$= \tfrac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1 - e^2)(u_1 - u_2)^2$$

குறிப்பு: $e = 0$ என்று பிரதியிட்டு நேரடி மோதலின்போது முற்றிலும் மீள்சக்தியற்ற இரு கோளங்களின் இயக்க ஆற்றல் இழப்பு $\tfrac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (u_1 - u_2)^2$ என்று காணலாம். $\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = M$ எனில், நேரடி மோதலில் முற்றிலும் மீள்சக்தியற்ற இரு கோளங்களின் இயக்க ஆற்றல் இழப்பு $\tfrac{1}{2} M (u_1 - u_2)^2$ ஆகும். ஆனால், மோதலுக்கு முன் இரு கோளங்களின் சார்வேகம் V எனில், $V = u_1 - u_2$ ஆகும். மேலும் $\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ என்பது m_1, m_2 ஆகிய வற்றின் இசைச் சராசரியில் (Harmonic Mean) பாதியாகையால் நேரடி மோதலில் முற்றிலும் மீள்சக்தியற்ற இரு கோளங்களின் இயக்க ஆற்றல் இழப்பு $= \tfrac{1}{2} MV^2 =$ மோதலுக்கு முன் இரு கோளங்களின் சார்வேகத்தைத் தனது வேகமாகவும், அவ்விரு கோளங்களின் பொருண்மைகளின் இசைச் சராசரியில் பாதியைத் தனது பொருண்மையாகவும் கொண்டு நகர்ந்து கொண்டிருக்கும் ஒரு பொருளின் இயக்க ஆற்றலுக்குச் சமமாகும்.

மாதிரி 105. ஓய்விலிருக்கும் ஒரு கோளத்தின் மீது அதற்குச் சமமான மற்றொரு கோளம் நேரடியாக மோதுகிறது. மீளியல் குணகம் e எனில், மோதலுக்குப் பின் அவற்றின் வேகங்கள் $1-e : 1+e$ என்றும் விகிதத்திலிருக்குமென்று காட்டு.

தீர்வு: இரு கோளங்களின் பொருண்மை m என்க.

மோதலுக்கு முன் கோளங்களின் வேகங்கள் u, 0

மோதலுக்குப் பின் அவற்றின் வேகங்கள் v_1, v_2 என்க.

∴ உந்தக் காப்பு விதியின்படி, $mv_1 + mv_2 = mu + 0$

அல்லது, $v_1 + v_2 = u$ ... (1)

நியூட்டனின் விதிப்படி, $v_1 - v_2 = -e\,(u-0) = -e\,u$... (2)

$(1) + (2) \equiv \quad 2\,v_1 = u\,(1-e)$

அல்லது, $v_1 = \dfrac{u\,(1-e)}{2}$

$(1) - (2) \quad 2\,v_2 = u\,(1+e)$

அல்லது, $v_2 = \dfrac{u\,(1+e)}{2}$

$$\therefore \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{1-e}{1+e}$$

மாதிரி **106.** ஓய்விலிருக்கும் ஒரு கோளத்தின்மீது அதற்குச் சமமான மற்றொரு கோளம் நேரடியாக மோதுகிறது. மீளியல் குணகம் e எனில், அவற்றின் மூல இயக்க ஆற்றலில் $\frac{1}{2}(1-e^2)$ பகுதி மோதலின்போது இழக்கப்பட்டுள்ளதெனக் காட்டு.

தீர்வு : இரு கோளங்களின் பொருண்மை m என்க.

மோதலுக்குமுன் கோளங்களின் வேகங்கள் u, o ;

மோதலுக்குப்பின் அவற்றின் வேகங்கள் v_1 v_2 என்க.

(மோதலுக்குமுன்) மூல இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2}mu^2 + o = \frac{1}{2}mu^2$.

மோதலின்போது இயக்க ஆற்றல் இழப்பு $= \frac{1}{2}\dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(1-e^2)$

$(u_1 - u_2)^2$ (சூத்திரம்)

(இங்கு $m_1 = m_2 = m$; $u_1 = u$; $u_2 = o$)

$$= \frac{1}{2}\frac{m^2}{2m}(1-e^2)(u-o)^2$$

$$= \frac{m}{4}(1-e^2)\,u^2$$

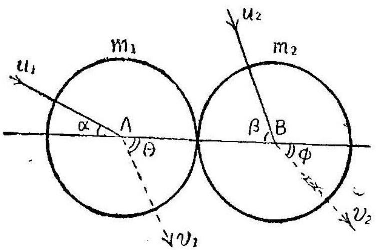
$$= \frac{1}{2}(1-e^2)\,.\,\frac{1}{2}mu^2$$

$= \frac{1}{2}(1-e^2) \times$ மூல இயக்க ஆற்றல்.

சாய்மோதல் (Oblique Impact)

சாய்மோதலுக்குப்பின் இருபொருள்களின் திசைவேகங்கள் காணல்

m_1 என்ற நிறையையும் u_1 என்ற திசைவேகத்தையும் கொண்ட ஒரு கோளம் m_2 என்ற நிறையையும் u_2 என்ற திசைவேகத்தையும் கொண்ட மற்றொரு கோளத்துடன் சாய்வாக மோதுகிறது. மோதலுக்குப்பின் கோளங்களின் திசைவேகங்களைக் காணல்.



படம் 63

A, B என்பன முறையே m_1, m_2 பொருண்மைகள் கொண்ட இருகோளங்களின் மையங்கள். அவற்றின் மையக்கோடாகிய AB-யுடன் முறையே α, β கோணச் சாய்வுத் திசைகளில் u_1, u_2 திசை வேகங்களுடன் சென்றுகொண்டிருக்கும் அக்கோளங்கள் சாய்வாக மோதுகின்றன. மோதலுக்குப்பின் அக்கோளங்கள் மையக்கோடு AB-யுடன் முறையே θ, ϕ கோணச்சாய்வுத் திசைகளில் v_1, v_2 திசைவேகங்களுடன் செல்வதாகக் கொள்க.

மையக்கோடு வழியாகவும் அதற்குச் செங்குத்தாகவும் திசைவேகப் பிரிப்பு செய்க:

உந்தக்காப்பு விதியின்படி,

$$m_1 v_1 \cos\theta + m_2 v_2 \cos\phi = m_1 u_1 \cos\alpha + m_2 u_2 \cos\beta \ldots (1)$$

நியூட்டனின் விதியின்படி,

$$v_1 \cos\theta - v_2 \cos\phi = -e\,(u_1 \cos\alpha - u_2 \cos\beta) \quad \ldots \quad (2)$$

பொதுத் தொடுகோட்டின் வழியே ஒவ்வொரு கோளத்தின் திசைவேகமும் மோதலினால் மாறுபடாதிருக்கும்

$$\therefore \quad v_1 \sin\theta = u_1 \sin\alpha \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

$$v_2 \sin\phi = u_2 \sin\beta \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

$$(2) \times m_2 \equiv m_2 v_1 \cos\theta - m_2 v_2 \cos\phi = -em_2 u_1 \cos\alpha + em_2 u_2 \cos\beta$$

$$(1) \equiv m_1 v_1 \cos\theta + m_2 v_2 \cos\phi = m_1 u_1 \cos\alpha + m_2 u_2 \cos\beta$$

கூட்டுக [(2), (1)] :

$$(m_1 + m_2)\, v_1 \cos\theta = (m_1 - em_2)\, u_1 \cos\alpha + (1+e)\, m_2 u_2 \cos\beta$$

அல்லது, $v_1 \cos\theta$

$$= \frac{(m_1 - em_2)\, u_1 \cos\alpha + (1+e)\, m_2\, u_2 \cos\beta}{(m_1 + m_2)} \quad \ldots \quad (5)$$

இதுபோல், $v_2 \cos\phi$

$$\frac{(1 + e)\, m_1\, u_1 \cos\alpha + (m_2 - em_1)\, u_2 \cos\beta}{(m_1 + m_2)} \quad \ldots \quad (6)$$

(3), (5) ஆகிய சமன்பாடுகளின் வர்க்கங்களைக் கூட்டி v_1ஐயும், (4), (6) ஆகிய சமன்பாடுகளின் வர்க்கங்களைக் கூட்டி v_2ஐயும் காணலாம்.

சமன்பாடு (3)ஐ சமன்பாடு (5)ஆல் வகுத்து θஐயும், சமன்பாடு (4)ஐ சமன்பாடு (6)ஆல் வகுத்து ϕஐயும் காணலாம்.

m_1 பொருண்மையின்மீது செயல்படும் மோதல் விசையின் தாக்களவை

மோதல்விசையின் தாக்களவை I = பொதுச் செங்கோட்டு வழி m_1-ன் உந்த மாறுபாடு

$$= m_1\, v_1 \cos\theta - m_1\, u_1 \cos\alpha$$

$$= m_1\, (v_1 \cos\theta - u_1 \cos\alpha)$$

$$= m_1 \left[\frac{(m_1 - em_2)\, u_1 \cos\alpha + (1 + e)\, m_2\, u_2 \cos\beta}{m_1 + m_2} - u_1 \cos\alpha\right]$$

$$= \frac{m_1}{m_1 + m_2}\left[(m_1 - em_2)\, u_1 \cos\alpha + (1+e)\, m_2\, u_2 \cos\beta - (m_1 + m_2)\, u_1 \cos\alpha\right]$$

$$= \frac{m_1}{m_1 + m_2}\left[-em_2\, u_1 \cos\alpha + (1 + e)\, m_2\, u_2 \cos\beta - m_2\, u_1 \cos\alpha\right]$$

$$= \frac{m_1}{m_1 + m_2}\left[(1 + e)\, m_2\, u_2 \cos\beta - (1+e)\, m_2\, u_1 \cos\alpha\right]$$

$$= \frac{m_1\, m_2}{m_1 + m_2}\,(1 + e)\,(u_2 \cos\beta - u_1 \cos\alpha).$$

குறிப்பு 1. m_2 பொருண்மையின்மீது செயல்படும் மோதல் விசையின் தாக்களவை இத் தாக்களவைக்குச் சமமாகவும் எதிராகவுமிருக்கும். இச்சம அளவுத் தாக்களவையே மோதலின் மொத்தத் தாக்களவை எனப்படும்.

குறிப்பு 2. $u_2 = o$ எனில், (4)-லிருந்து $\phi = o$ என்று காணலாம். ஆகவே, ஓய்விலிருக்கும் ஒரு வழவழப்பான கோளத்தின்மீது மற்றொரு வழவழப்பான கோளம் மோதினால், ஓய்விலிருந்த கோளம் மோதலுக்குப்பின் கோளங்களின் மையக் கோட்டு வழியே நகரும்.

குறிப்பு 3. $m_1 = m_2$, $e = 1$ எனில், (1), (2) ஆகிய சமன்பாடுகளிலிருந்து, $v_1 \cos\theta = u_2 \cos\beta$ என்றும், $v_2 \cos\phi = u_1 \cos\alpha$ என்றும் காணலாம். அதாவது, முழுமை மீளியல்புள்ள இரு சமகோளங்கள் சாய்வாக மோதுமெனில், அவற்றின் மையக் கோடு வழியே தத்தம் திசைவேகக் கூறுகளை அவை மாற்றிக் கொள்ளுகின்றன.

சாய்மோதலின்போது ஏற்படும் இயக்க ஆற்றல் இழப்பு (Loss of K.E. due to Oblique Impact)

u_1, u_2 திசைவேகங்களுடன் சென்றுகொண்டிருக்கும் m_1, m_2 பொருண்மைகளுடைய இரு வழவழப்பான கோளங்கள் ஒன்றையொன்று சாய்வாகத் தாக்கிக் கொள்கின்றன. அவற்றின் மையக் கோட்டுடன் u_1, u_2 ஆகியவற்றின் திசைகளின் சாய்வுகள் முறையே α_1, α_2 எனில் இயங்கு ஆற்றல் இழப்பைக் காணல் :

நிறுவல் 1

நேரடி மோதல் இயங்கு ஆற்றல் இழப்பிலிருந்து வருவித்தல் :

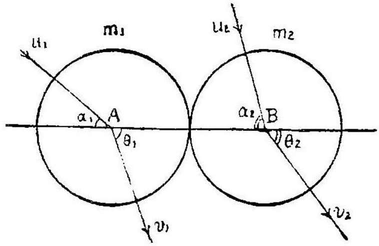
நேரடி மோதலில் இயங்கு ஆற்றல் இழப்பு $= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1 - e^2)(u_1 - u_2)^2$ என்று நாமறிவோம். இக் கோவையில், u_1, u_2 என்பன இரு கோளங்களின் மையக்கோட்டு வழித் திசைவேகங்களாகும். இங்கு, இரு கோளங்களின் திசைவேகங்களாகிய u_1, u_2 என்பன மையக் கோட்டுடன் முறையே α_1, α_2 சாய்வுகளிருப்பதால், அவற்றின் மையக் கோட்டு வழித் திசைவேகக் கூறுகள் முறையே $u_1 \cos\alpha_1$, $u_2 \cos\alpha_2$ ஆகும். எனவே, மேற்கண்ட கோவையில் u_1, u_2 ஆகிய கணியங்களை முறையே $u_1 \cos\alpha_1$, $u_2 \cos\alpha_2$ என்ற கணியங்களாக மாற்றி, சாய்மோதலின்போது ஏற்படும் இயங்கு ஆற்றலைக் காணலாம்.

எனவே, சாய்மோதலின்போது இயங்கு ஆற்றல் இழப்பு

$$= \tfrac{1}{2}\ \frac{m_1\, m_2}{m_1 + m_2}\,(1-e^2)\,(u_1 \cos \alpha_1 - u_2 \cos \alpha_2)^2.$$

நிறுவல் 2. (சார்பிலா நிறுவல்)

A, B என்பன முறையே m_1 m_2 பொருண்மைகளுள்ள கோளங்களின் மையங்கள். அவற்றின் திசை வேகங்களாகிய u_1, u_2 என்பன AB-யுடன் முறையே α_1, α_2 சாய்வுகளிலுள்ளன. மோதலுக்குப்பின் அவற்றின் திசை வேகங்களாகிய v_1 v_2 என்பன AB-யுடன் முறையே θ_1, θ_2 ஆகிய சாய்வுகளிலுள்ளன. e என்பது கோளங்களின் மீளியல் குணகம் :



படம் 64

AB வழியே உந்தகாப்புச் சமன்பாடு :

$$m_1 v_1 \cos \theta_1 + m_2 v_2 \cos \theta_2 = m_1 u_1 \cos \alpha_1 + m_2 u_1 \cos \alpha_2 \quad \cdots \quad (1)$$

AB வழியே நியூட்டனின் சமன்பாடு :

$$v_1 \cos\theta_1 - v_2 \cos \theta_2 = -e\,(u_1 \cos \alpha_1 - u_2 \cos \alpha_2) \quad \cdots \quad (2)$$

கோளங்களின் பொதுத் தொடுகோடு வழியே திசைவேகங்கள் மாறுமலிருக்குமாகையால்,

$$v_1 \sin \theta_1 = u_1 \sin \alpha_1 \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$$

$$v_2 \sin \theta_1 = u_2 \sin \alpha_2 \quad \cdots \quad \cdots \quad (4)$$

(1), (2) ஆகிய சமன்பாடுகளிலிருந்து,

$$v_2 \cos \theta_1 = \frac{(m_1 - e m_2)\, u_1 \cos \alpha_1 + (1+e)\, m_2\, u_2 \cos \alpha_2}{m_1 + m_2} \quad \cdots \quad \cdots \quad (5)$$

$$v_2 \cos \theta_2 = \frac{(1+e)\, m_1\, u_1 \cos \alpha_1 + (m_2 - e m_1)\, u_2 \cos \alpha_2}{m_1 + m_2} \quad \cdots \quad \cdots \quad (6)$$

என்று பெறலாம்.

மேலும், மோதலின் தாக்களவை

$$I = m_2 (v_2 \cos \theta_2 - u_2 \cos \alpha_2) = -m_1 (v_1 \cos \theta_1 - u_1 \cos \alpha_1) \quad \ldots \quad \ldots \quad (7)$$

என்று அறிவோம்.

மையக்கோட்டுத் திசையில் மோதலுக்கு முன் இயங்கு ஆற்றல்

$$= \tfrac{1}{2} m_1 u_1^2 \cos^2 \alpha_1 + \tfrac{1}{2} m_2 u_2 \cos^2 \alpha_2$$

மையக்கோட்டுத் திசையில் மோதலுக்குப்பின் இயங்கு ஆற்றல்

$$= \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 \cos^2 \theta_9 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2 \cos^2 \theta_2$$

இயங்கு ஆற்றல் இழப்பு

$$= \tfrac{1}{2} m_1 (u_1^2 \cos^2 \alpha_1 - v_1^2 \cos^2 \theta_1) + \tfrac{1}{2} m_2 (u_2^2 \cos^2 \alpha_2 - v_2^2 \cos^2 \theta_2)$$

$$= \tfrac{1}{2} m_1 (u_1 \cos \alpha_1 - v_1 \cos \theta_1)(u_1 \cos \alpha_1 - v_1 \cos \theta_1)$$
$$+ \tfrac{1}{2} m_1 (u_2 \cos \alpha_2 - v_2 \cos \alpha \theta_2)(u_2 \cos \alpha_2 + v_2 \cos \theta_2)$$

$$= \tfrac{1}{2} I (u_1 \cos \alpha_1 + v_1 \cos \theta_1) - \tfrac{1}{2} I (u_2 \cos \alpha_2 + v_2 \cos \theta_2)$$

$$= \tfrac{1}{2} I [(u_1 \cos \alpha_9 - u_2 \cos -_2) + (v_1 \cos \theta_1 - v_2 \cos \theta_2)]$$

$$= \tfrac{1}{2} I [(u_1 \cos \alpha_1 - u_2 \cos \alpha_9) - e (u_1 \cos \alpha_1 - u_2 \cos \alpha_2)],$$

(2) இலிருந்து

$$= \tfrac{1}{2} I [(u_1 \cos \alpha_1 - u_2 \cos \alpha_2)(1 - e)]$$

$$= \tfrac{1}{2} (1 - e)(u_1 \cos \alpha_1 - u_2 \cos \alpha_2) I$$

ஆனல் $I = m_1 (u_1 \cos \alpha_1 - v_1 \cos \theta_1)$

$$= m_1 \left[u_1 \cos \alpha_1 - \frac{(m_1 - e m_2) u_1 \cos \alpha_1 - (1+e) m_2 u_2 \cos \alpha_2}{m_1 + m_2}\right]$$

$$= \frac{m_1}{m_1 + m_2} \left[(m_1 + m_2) u_1 \cos \alpha_1 - (m_1 - e m_2) u_1 \cos \alpha_1 - (1+e) m_2 u_2 \cos \alpha_2\right]$$

$$= \frac{m_1}{m_1 + m_2} \left[(1+e) m_2 u_1 \cos \alpha_1 - (1+e) m_2 \cos \alpha_2\right]$$

$$= \frac{m_1}{m_1 + m_2} \left[(1+e) m_2 (u_1 \cos -_1 - u_2 \cos \alpha_2)\right]$$

$$= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1 + e)(u_1 \cos \alpha_1 - u_2 \cos \alpha_2)$$

$\therefore$ இயங்கு ஆற்றல் இழப்பு $= \tfrac{1}{2} (1 - e)(u_1 \cos \alpha_1 - u_2 \cos \alpha_2)$

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(1 + e)(u_1 \cos\alpha_1 - u_2 \cos\alpha_2)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(1-e^2)(u_1 \cos\alpha_1 - u_2 \cos\alpha_2{}^2)$$

குறிப்பு : $e = 1$ எனில், இயக்க ஆற்றலில் எவ்வித இழப்புமில்லையென்று காணலாம். ஆனல் $e \neq$ எனில், இயக்க ஆற்றலில் சிறிதளவேனும் இழப்பு ஏற்பட்டிருக்குமென்பது தெளிவு ; இவ்வாறு இழக்கப்பட்ட இயக்க ஆற்றல் வேறு ஆற்றல்களாக, குறுப்பாக, வெப்பம், ஒலி ஆகிய ஆற்றல்களாக மாற்றப்படுகின்றன.

குறிப்பு 2. m_1 பொருண்மையுள்ள சுத்தியல் ஒன்றினல் m_2 பொருண்மையுள்ள ஓர் ஆணியின்மீது ஓங்கி அடிப்பதாகக் கொள்வோம். அடிபடுமுன் ஆணி ஓய்வு நிலையிலிருப்பதால் $u_2 = O$ ஆகும். சுத்தியல் அடி ஆணியின்மீது பொதுச் செங்கோட்டின் வழியே விழுமாயின் $\alpha = O$ ஆகும். மேலும் ஆணி ஓய்வு நிலையிலிருப்பதால் $\beta = O$ ஆகும். எனவே, சுத்தியின் அடியினலேற்படும்

$$\text{இயக்க ஆற்றல் இழப்பு} = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(1-e^2) u_1{}^2$$

$$\text{சுத்தியலடிக்கு முன்னிருந்த இயக்க ஆற்றல்} = \frac{1}{2} m_1 u_1{}^2$$

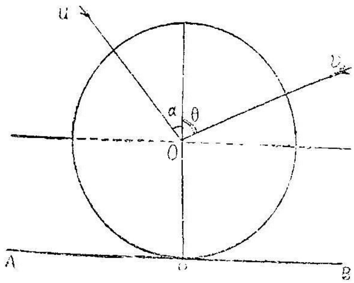
$$\therefore \frac{\text{சுத்தியலடியினலேற்பட்ட இயக்க ஆற்றல் இழப்பு}}{\text{சுத்தியலடிக்கு முன்னிருந்த இயக்க ஆற்றல}}$$

$$= \frac{m_2}{m_1 + m_2}(1-e^2)$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{m_1}{m_2} + 1\right)}(1-e^2)$$

எனவே, $\frac{m_1}{m_2}$ இன் மதிப்பு அதிகரிக்க அதிகரிக்க மேற்கண்ட விகிதம் குறைந்து கொண்டேயிருக்கும். அதாவது, ஆணியின் பொருண்மையுடன் ஒப்பிடுகையில் சுத்தியலின் பொருண்மை அதிகமாயிருப்பின் சுத்தியலால் ஆணியை அடிப்பதிலேற்படும் இயக்க ஆற்றலிழப்புக் குறைவாகயிருக்கும்.

வழவழப்பான தளத்தின்மீது வழவழப்பான கோளத்தின் சாய்மோதல்



படம் 65

m பொருண்மையுள்ள, முற்றிலும் வழவழப்பான கோளம் ஒன்று, ஒரு நிலையான, முற்றிலும் வழவழப்பான தளத்தின்மீது சாய்வாக மோதுகிறது. மீள் இயல் குணகம் *e* எனில், மோதலுக்குப்பின் கோளத்தின் இயக்கத்தைக் காணல் :

AB என்பது ஒரு நிலையான, முற்றிலும் வழவழப்பான தளம். இத்தளத்தின்மீது *O*-ஐ மையமாகக் கொண்ட *m* பொருண்மையுள்ள ஒரு வழவழப்பான கோளம் *u* திசைவேகத்துடன், தொடுபுள்ளி வழிச் செங்கோட்டுடன் α கோணச் சாய்வுத் திசையில் மோதுகிறது. மோதலுக்குப்பின் கோளத்தின் திசைவேகம் *v* என்றும், அது தொடுபுள்ளி வழிச் செங்கோட்டுடன் θ கோணச் சாய்வுத் திசையில் செயல்படுகிறதென்றும் கொள்க.

தளமானது தொடுபுள்ளி வழித் தொடுகோட்டிலமைவதால், தளத்தின் வழியே திசைவேகக் கூறுகள் மோதலுக்கு முன்னரும் பின்னரும் மாறாதிருக்கும்.

$$\therefore \quad v \sin\theta = u \sin\alpha \qquad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

தளத்தின்வேகம் மோதலுக்கு முன்னரும் பின்னரும் பூச்சியமாகுமாதலால், நியூட்டனின் விதிப்படி,

$$v\cos\theta - O = -e\,(-u\cos\alpha - O)$$

அதாவது, $v\cos\theta = eu\cos\alpha \qquad \ldots \quad \ldots \quad (2)$

(1), (2) ஆகிய சமன்பாடுகளின் வர்க்கங்களைக் கூட்டவும்.

$$v^2 = u^2(\sin^2\alpha + e^2\cos^2\alpha) \qquad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

(1)ஐ (2)ஆல் வகுக்கவும்.

$$\tan\theta = \frac{1}{e}\tan\alpha$$

அல்லது, $\cot\theta = e\cot\alpha \qquad \ldots \quad \ldots \quad (4)$

(3), (4) ஆகிய சமன்பாடுகளிலிருந்து மோதலுக்குப்பின்

கோளத்தின் வேகத்தை அளவிலும் திசையிலும் நிர்ணயிக்கலாம்.

குறிப்பு 1. தளத்தின் மீதுள்ள அழுக்தத்தின் தாக்களவை கோளத்தின் மீதுள்ள அழுத்தத்தின் தாக்களவைக்குச் சமமாகவும் எதிராகவுமிருக்கும்.

கோளத்தின் மீதுள்ள அழுத்தத்தின் தாக்களவை = பொதுச் செங்கோட்டு வழி உந்த மாறுபாடு

$$= m\,[V \cos\theta - (-u \cos\alpha)]$$

$$= m\,[V \cos\theta + u \cos\alpha]$$

$$= m\,[eu \cos\alpha + u \cos\alpha]$$

$$= m\,(1 + e)\,u \cos\alpha.$$

குறிப்பு 2. $\alpha = O,\ \theta = O$ எனில் $v = eu$.

அதாவது, ஒரு வழவழப்பான கோளம் ஒரு வழவழப்பான தளத்தின்மீது u வேகத்துடன் செங்குத்தாக மோதினுல், மோதலுக்குப்பின் கோளம் தளத்திற்குச் செங்குத்தாக eu வேகத்துடன் துள்ளி எழும்பும்.

குறிப்பு 3. $e = 1$ எனில், $\theta = \alpha,\ v = u$.

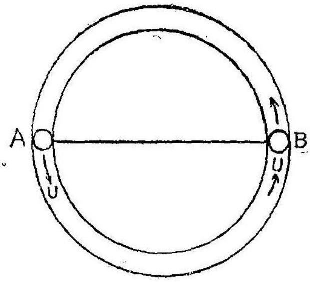
அதாவது முற்றிலும் மீள் சக்தியுடைய ஒரு வழவழப்பான கோளம் முற்றிலும் வழவழப்பான ஒரு தளத்தின்மீது மோதினுல், மோதலுக்குப்பின் கோளமானது அதே வேகத்துடன் துள்ளி எழும்புவதோடு துள்ளல் கோணம் மோதல் கோணத்திற்குச் சமமாகவுமிருக்கும்.

குறிப்பு 4. $e =$ எனில், $v \cos\theta = O$ அல்லது $\theta = \frac{\pi}{2}$

அதாவது, முற்றிலும் மீள்சக்தியற்ற ஒரு கோளம் ஒரு வழவழப்பான தரையின்மீது வீசியெறியப்பட்டால், மோதலுக்குப்பின் அக்கோளம் தளத்தின் வழியே விரைந்தோடும்.

மாதிரி 107. A, B என்னும் சமமான இரு கண்ணுடிக் கோளங்கள் ஒரு கிடைத்தள வட்டப்பாதையில் ஒரு விட்டத்தின் எதிர்முனைகளில் ஓய்விலிருக்கின்றன. A-யானது வட்டப் பாதையின் வழியே வீசியெறியப்படுகிறது. T நேரத்திற்குப்பின் அது B-யின் மீது முதல் தடவையாக மோதினுல் அதன் பின்னர்

$\frac{2T}{e}$ நேரத்தில் அவை இரண்டாம் தடவையாக மோதிக் கொள்ளுமென்று காட்டுக. e என்பது கோளங்களுக்கிடையேயுள்ள மீளியல் குணகம். (சென்னை எம். எஸ்ஸி. 1963)



படம் 66

தீர்வு : A-யானது u வேகத்துடன் B-யின் மீது மோதுவதாகக் கொள்க. இரண்டுக்குமிடையே மோதல் நேராகயிருக்கும். மோதலுக்குப்பின் A, B ஆகியவற்றின் வேகங்கள் முறையே v_1, v_2 என்க.

நியூட்டனின் விதிப்படி,

$$v_2 - v_1 = -e(O - u) = eu \quad \ldots \quad (1)$$

ஆனால் A-யானது B-யின் மீது மோதுவதற்கு எடுத்துக் கொண்ட நேரம் T ஆகையால், T நேரத்தில் அது அரைவட்டத் தூரத்தைக் கடந்துள்ளது. வட்டப்பாதையின் ஆரை r எனில்,

$$uT = \tfrac{1}{2}(2\pi r) = \pi r \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

முதல் மோதலுக்குப்பின் இரண்டாவது மோதல் T_1 நேரத்தில் ஏற்படுவதாகக் கொள்க. B-யானது A-யைப் பொறுத்து ஒரு சுற்றுச் சுற்றி வந்த பின்னரே A-யின்மீது மோத முடியும். எனவே, B-யானது T_1 நேரத்தில் A-யைப் பொறுத்த சார் வேகம் $(v_2 - v_1)$ உடன் வட்டப்பாதையின் சுற்றளவுக்குச் சமமான தூரத்தைக் கடக்கிறது.

$$\therefore \quad (v_2 - v_1 T_1) = 2\pi r$$

அதாவது, $eu\,T_1 = 2\,uT$ (1), (2) ஆகியவற்றிலிருந்து

$$\therefore \quad T_1 = \frac{2T}{e}.$$

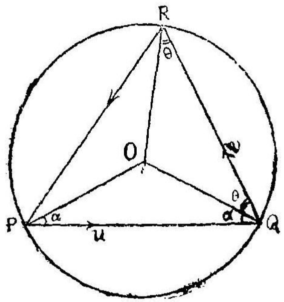
மாதிரி 108. ஒரு வட்டமான மேசையின் விளிம்பில் ஒரு வழவழப்பான வளையம் பொருத்தப்பட்டுள்ளது. வளையத்தை யொட்டிய P எனும் புள்ளியிலிருந்து மேசையின் மேற்பரப்பின் மீது ஒரு துகள் வீசியெறியப்படுகிறது. வளையத்திற்கும் துகளுக்குமிடையேயுள்ள மீளியல் குணகம் e. துகளின் எறிதிசை P வழி ஆரையுடன் α கோணத்திலுள்ளது. வளையத்தில்

இரு இடங்களில் மோதியபின் துகள் மீண்டும் புறப்பட்ட இடத்திற்கே வந்து சேர்ந்தால்

$$\cot^2 \alpha = \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^3}$$

என்று காட்டுக.

தீர்வு : P-யிலிருந்து எறியப்பட்ட துகள் Q, R ஆகிய புள்ளிகளில் மோதி, மீண்டும் P-யை அடைகிறது. P-யிலிருந்து எறி வேகம் u என்க. P, Q, R, ஆகிய புள்ளிகளை வட்ட மையம் O-வுடன் இணைக்கவும்.



படம் 67

$\therefore \ O\hat{P}Q$ = எறிகோணம் $= \alpha$.

$OP = OQ$ ஆகையால், $O\hat{Q}P = \alpha$: Q-விலிருந்து QR வழியே துகளின் வேகம் v என்றும் $O\hat{Q}R = \theta$ என்றும் கொள்க.

$\therefore$ மோதலுக்கு முன் துகளின் OQ வழி வேகக்கூறு $= u \cos \alpha$

மோதலுக்குப்பின் துகளின் QO வழி வேகக்கூறு $= v \cos \theta$ ஆனால் செங்குத்துத் திசையில் துள்ளல்வேகம் மோதல் வேகத்தைப்போல் e மடங்கு இருக்குமாகையால்,

$$v \cos \theta = eu \cos \alpha \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

மேலும், Q-விலுள்ள தொடுகோட்டின் வழியே வேகக்கூறுகள் மோதலுக்கு முன்னரும் பின்னரும் சமமாகயிருக்குமாகையால்,

$$v \operatorname{Sin} \theta = u \operatorname{Sin} \alpha \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$$\therefore \ \cot \theta = e \cot \alpha \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

இப்பொழுது, $R\hat{O}P = 2\, R\hat{Q}P = 2\,(\theta + \alpha)$

$$\therefore \ O\hat{R}P + O\hat{P}R = 180^\circ - 2\,(\theta + \alpha)$$

ஆனால், $OR = OP$ ஆகையால், $O\hat{R}P = O\hat{P}R = 90^\circ - (\theta + \alpha)$ அதாவது, R-இல் மோதல் கோணம் θ, துள்ளல் கோணம் $90^\circ - (\theta + \alpha)$. ஆகவே, சமன்பாடு (3)-இன் அடிப்படையில்,

$$\cot [90^\circ - (\theta + \alpha)] = e \cot \theta$$

அதாவது, $\tan(\theta + \alpha) = e \cot \theta$

$$\frac{\tan\theta + \tan\alpha}{1 - \tan\theta \tan\alpha} = \frac{e}{\tan\theta}$$

$$\tan^2\theta + \tan\alpha \tan\theta = e - e \tan\theta \tan\alpha$$

ஆனல், (2)இலிருந்து, $\tan\theta = \frac{1}{e} \tan\alpha$

$$\therefore \quad \frac{\tan^2\alpha}{e^2} + \tan\alpha \; \frac{1}{e} \tan = e - e\frac{1}{e} \tan\alpha \tan\alpha$$

$$\frac{\tan^2\alpha}{e^2} + \frac{\tan^2\alpha}{e} = e - \tan^2\alpha$$

அதாவது, $\tan^2\alpha \left(\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e} + 1\right) = e$

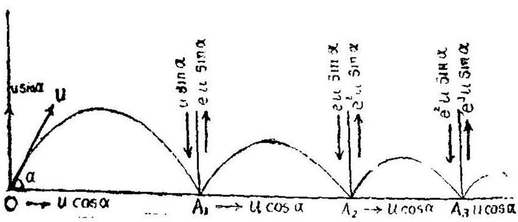
அல்லது, $e \cot^2\alpha = 1 + \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2}$

$$\cot^2\alpha = \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} = \frac{1}{e^3}$$

மாதிரி 109. நிறைமீட்சித் தன்மையற்ற ஒருதுகள் கிடைத் தளப் பரப்பின் ஒரு புள்ளியிலிருந்து u திசைவேகத்துடன் α ஏற்றக் கோணத்தில் எறியப்படுகிறது. e என்பது மீட்சி எண் என்ருல் $\frac{2u \sin\alpha}{g(1-e)}$ நேரத்திற்குப் பிறகு தளத்தின்மீது துள்ளி யெழுவது நிற்கும் என நிறுவுக. துகள் மொத்தம் சென்றுள்ள கிடைத் தூரத்தையும் நிர்ணயிக்கவும்.

(பி. எஸ்ஸி. சென்னை 1967 ஏப்., மதுரை 1973 ஏப்.)

தீர்வு :



படம் 68

தொடக்கக் கிடைவேகம் $= u \cos \alpha$

தொடக்க நிலைக்குத்து வேகம் $= u \sin \alpha$

$\therefore$ துகளானது A_1 எனும் புள்ளியில் $u \sin \alpha$ எனும் நிலைக்குத்து வேகத்துடன் மோதி $eu \sin \alpha$ எனும் நிலைக்குத்து வேகத்துடன் துள்ளி எழும்பும்.

இதுபோல், A_2 எனும் புள்ளியில் $eu \sin \alpha$ எனும் நிலைக்குத்து வேகத்துடன் மோதி, $e^2u \sin \alpha$ எனும் நிலைக்குத்து வேகத்துடன் துள்ளி எழும்பும்.

A_3 எனும் புள்ளியில் $e^2u \sin \alpha$ எனும் நிலைக்குத்து வேகத்துடன் மோதி, $e^3 u \sin \alpha$ எனும் நிலைக்குத்து வேகத்துடன் துள்ளி எழும்பும்.

தொடக்கக் கிடைவேகமாகிய $u \cos \alpha$ இயக்கம் முழுவதும் மாறுமலிருக்கும். எறிகணத்திலிருந்து A_1 இல் முதல் மோதல் வரை நேரம் t_1 எனில்,

$$t_1 = \frac{2u \sin \alpha}{g}$$ ஆகும். ("எறிபொருட்கள்" பார்க்கவும்)

இதுபோல், முதல் மோதலுக்கும் இரண்டாவது மோதலுக்குமுள்ள நேரம்

$$t_2 = \frac{2\,eu \sin \alpha}{g},$$

இரண்டாம் மோதலிலிருந்து மூன்றும் மோதல்வரை நேரம்

$$t_3 = \frac{2\,e^2u \sin \alpha}{g}$$

ஆகவே, மொத்த நேரம் $= t_1 + t_2 + t_3 + \quad \ldots \quad \ldots$

$$= \frac{2u \sin \alpha}{g} (1 + e + e^2 + \quad \ldots \quad \ldots)$$

$$= \frac{2u \sin \alpha}{g} \frac{1}{1 - e}$$

$$= \frac{2u \sin \alpha}{g\,(1-e)}$$

மொத்தம் கடந்துள்ள கிடைத்தூரம் = $\frac{2u \sin \alpha}{g(1-e)}$ நேரத்தில்

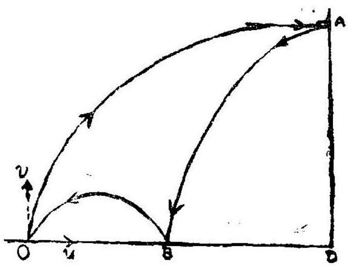
$u \cos \alpha$ எனும் மாருக் கிடைவேகத்துடன் சென்ற தூரம்

$$= \frac{2u \sin \alpha}{g(1-e)} u \cos \alpha$$

$$= \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g(1-e)}$$

மாதிரி 110. கிடைத்தளத்தின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரு துகள் ஒரு நிலைக்குத்துச் சுவரின்மீது செங்குத்தாக மோதுமாறு ஒரு துகள் எறியப்படுகிறது. அத் துகளானது, சுவரின்மீது செங்குத்தாக மோதியபின் துள்ளி எழும்பி, கிடைத்தளத்தில் ஒருமுறை மோதி எழும்பிப்பின் எறிபுள்ளியை அடைகிறது. துகளின் மீள் சக்திக் குணகம் $\frac{1}{2}$ என்று காட்டுக.

தீர்வு. துகளானது O-விலிருந்து u, v ஆகியவற்றை முறையே கிடைக்கூறு, நிலைக்குத்துக் கூறுகளாகக் கொண்ட திசைவேகத்துடன் எறியப்படுவதாகக் கொள்க. அது சுவரில் A-யில் மோதிப் பின் கிடைத்தளத்தில் B-யில் மோதிப் பின் O-ஐ அடைகிறது.



படம் 69

A-யில் செங்குத்தாக மோதுவதால், மோதலின் போது துகளானது சுவருக்குச் செங்குத்தான கிடைத்தள விசை மட்டும் பெற்றிருக்கும்.

$\therefore$ O-விலிருந்து A-யில் மோதும் வரை நேரம் t_1 எனில் O-விலிருந்து சுவருக்குள்ள கிடைத்தூரம் = u திசைவேகத்துடன் t_1 நேரத்தில் சென்ற தூரம்

அதாவது, $OD = ut_1$ ஆகும்.

O-விலுள்ள நிலைக்குத்து வேகம் v ஆனது A-யில் பூச்சியமாகிறது. வேகத்திற்கெதிரான முடுக்கம் ஈர்ப்பு முடுக்கமாகிய g ஆகும்.

எனவே, $v = u + at$ என்னும் சூத்திரத்திலிருந்து,

$$O = v - gt_1$$

அல்லது, $t_1 = \frac{v}{g}$ ஆகும்.

$$\therefore \quad OD = ut_1 = \frac{uv}{g}.$$

மேலும், O-விலிருந்து A-வரையுள்ள நேரமே A-யிலிருந்து B-வரையுள்ள நேரமாகும். A-யில் மோதலுக்குப்பின் துகள் பெறுகின்ற கிடைவேகம் eu ஆகும்.

$\therefore \quad DB = eu$ வேகத்துடன் t_1 நேரத்தில் செல்லும் தூரம்

$$= eu\, t_1$$

$$= \frac{euv}{g}$$

B-யில் மோதலுக்குமுன் துகளின் நிலைக்குத்து வேகம் $= v$.

$\therefore$ B-யில் மோதலுக்குப்பின் துகளின் நிலைக்குத்து வேகம் $= ev$.
B-யிலிருந்து O-வரையுள்ள நேரம் t_2 எனில், இந்த நேரத்தில் துகள் சென்ற நிலைக்குத்துத் தூரம் பூச்சியமாகும்.

எனவே, $S = ut + \frac{1}{2}at^2$ என்னும் சூத்திரத்திலிருந்து,

$$O = ev\, t_2 - \tfrac{1}{2} gt_2^2$$

அல்லது, $t_2 = \frac{2\, ev}{g}$

இந்த t_2 நேரத்தில் eu கிடைவேகத்துடன் துகள் செல்லும் கிடைத்தூரம் $= eut_2$

அதாவது, $BO = eu \, \frac{2\, ev}{g}$

$$= 2e^2 \, \frac{uv}{g}$$

$$\therefore \quad DO = DB + BO = \frac{euv}{g} + \frac{2\, e^2 uv}{g}$$

$$= \frac{uv}{g} (e + 2e^2)$$

ஆனால், $OD = \frac{uv}{g}$

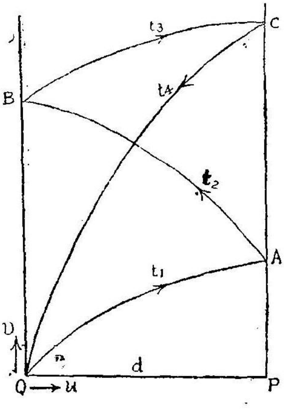
$$\therefore \quad \frac{vu}{g} = \frac{vu}{g}(e + 2e^2)$$

அல்லது, $2e^2 + e - 1 = 0$

$$(2e - 1)(e + 1) = 0$$

e எதிரெண்ணாகயிருக்க முடியாதாகையால், $e = \frac{1}{2}$ ஆகும்.

மாதிரி 111. வழவழப்பான இரு நிலைக்குத்துச் சுவர்களுள் ஒன்றின் அடியிலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து சுவர்களின்மீது மூன்று மோதல்களுக்குப் பின் மீண்டும் எறிபுள்ளிக்கே வந்து சேருமாறு ஒருதுகள் எறியப்படுகிறது. துகளின் மீட்சிக்கெழு e. இறுதி மோதல் நேராகயிருந்தால் $e^3 + e^2 + e = 1$ என்று நிறுவுக.



படம் 70

தீர்வு : O-விலிருந்து எறியப்படும் துகள் A, B, C ஆகிய புள்ளிகளில் மோதிப்பின் O-ஐ அடைகிறது. O-வில் எறிவேகத்தின் கிடை, நிலைக்குத்துப் பிரிவுகள் முறையே u, v என்க.

OA, AB, BC, CA ஆகிய பாதைகளைக் கடக்கும் நேரங்கள் முறையே t_1, t_2, t_3, t_4 என்க.

கிடைவேகப் பிரிவு A-யில் சுவருக்குச் செங்குத்தாகயிருக்குமாகையால், மோதலுக்குப்பின் A-யில் கிடைவேகக்கூறு eu ஆகும். இதுபோல், B, C ஆகிய புள்ளிகளில் மோதல்களுக்குப் பின் வேகங்களின் கிடைக்கூறுகள் முறையே e^2u, e^3u ஆகும். இக்கிடைவேகங்களுடன் முறையே t_1, t_2, t_3, t_4 ஆகிய நேரங்களில் சென்றுள்ள கிடைத் தூரங்கள் இரு சுவர்கட்குமிடையேயுள்ள தூரம் d-க்குச் சமமாகுமாகையால்,

$$ut_1 = eut_2 = e^2ut_3 = e^3ut_4 = d$$

அல்லது, $t_1 = \frac{d}{u}, t_2 = \frac{d}{eu}, t_3 = \frac{d}{e^2u}, t_4 = \frac{d}{e^3u}$

C-யில் துகள் நேராக மோதுவதால் நிலைக்குத்து வேகப்பிரிவு பூச்சியமாகும். அதாவது, v எனும் நிலைக்குத்து வேகத்துடன் O-விலிருந்து புறப்படும் துகள் C-ஐ அடைந்ததும் அதன் நிலைக்குத்து வேகம் பூச்சியமாகிவிடுகிறது. மேலும், இந்நிலைக்குத்து வேகக்கூறு மோதல்களினால் பாதிக்கப்படுவதில்லை. எனவே, O-விலிருந்து Cவரையாகும் நேரம், C-யிலிருந்து O வரையுள்ள நேரத்திற்குச் சமமாகும்.

$$\therefore \quad t_1 + t_2 + t_3 = t_4$$

$$\frac{d}{u} + \frac{d}{eu} + \frac{d}{e^2u} = \frac{d}{e^3u}$$

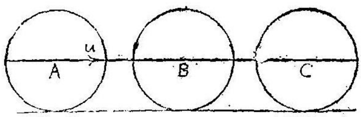
அதாவது, $1 + \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} = \frac{1}{e_3}$

அல்லது, $e^3 + e^2 + e = 1.$

மாதிரி 112. மூன்று சமகோளங்கள் ஒரு மேசையின்மேல் ஒரு நேர்கோட்டில் ஒன்றையொன்று தொடாதவாறு வைக்கப்பட்டுள்ளன. அவற்றுள் ஒன்று ஓய்விலிருக்கும் மற்ற இரு கோளங்களையும் நோக்கி நகருகிறது. $e = \frac{1}{2}$ எனில், எத்தனை மோதல்கள் ஏற்படுமென்றும், கோளங்களின் இறுதி வேகங்கள் 13 : 15 : 36 என்னும் விகிதங்களிலிருக்குமென்றும் காட்டுக.

தீர்வு :

A-யின் தொடக்க வேகம் u என்க. A-யானது B-யை மோதியதும் அவற்றின் வேகங்கள் முறையே v_1 v_2 என்க.



படம் 71

$$\therefore \quad v_1 - v_2 = -e\,(u - O) = -eu \qquad \dots \qquad (1)$$

$$mv_1 + mv_2 = mu$$

அல்லது, $v_1 + v_2 = u \qquad \dots \quad \dots \qquad (2)$

$$\therefore \quad 2v_1 = u\,(1-e) = u\,(1-\tfrac{1}{2}) = \frac{u}{2}$$

அல்லது, $v_1 = \frac{u}{4}$

$$\therefore \quad v_2 = \frac{3u}{4}$$

இப்பொழுது B-யானது $v_2 = \frac{3u}{4}$ வேகத்துடன் ஓய்விலிருக்கும் C-யின்மீது மோதுகிறது. எனவே, B-யும் C-யும் மோதியபின் B, C ஆகியவற்றின் வேகங்கள் முறையே ω_1, ω_2 எனில், முன் கண்ட முறைப்படி,

$$\omega_1 = \frac{v_2}{4} = \frac{3u}{16},$$

$$\omega_2 = \frac{3v^2}{4} = \frac{9u}{16}$$

இந்த மோதலுக்குப்பின் மூன்று கோளங்களின் வேகங்கள் முறையே v_1, ω_1, ω_2 ஆகும்.

அதாவது, $\frac{u}{4}$, $\frac{3u}{16}$, $\frac{9u}{16}$ ஆகும். $\omega_1 < \omega_2$ ஆகையால் Bயும் Cயும் மோதமுடியாது.

ஆனல் இப்போது $\frac{u}{4} > \frac{3u}{16}$ ஆகையால் 4-யானது B யின்மீது மீண்டும் மோதும்.

அதாவது, இரண்டாவது மோதலுக்குமுன் A, B ஆகியவற்றின் வேகங்கள் முறையே

$$v_1 = \frac{u}{4}, \quad \omega_1 = \frac{3u}{16} \text{ ஆகும்.}$$

இரண்டாவது மோதலுக்குப்பின் இவற்றின் வேகங்கள் முறையே $v_1{}^1$ $\omega_1{}^1$ என்க.

$$\therefore \quad mv_1{}^1 + m\omega_1{}^1 = mv_1 + m\omega_1$$

அதாவது, $v_1{}^1 + \omega_1{}^1 = v_1 + \omega_1 = \frac{u}{4} + \frac{3u}{16} = \frac{7u}{16}$

$$v_1{}^1 - \omega_1{}^1 = -e\,(v_1 - \omega_1)$$

$$= -\tfrac{1}{2}\left(\frac{u}{4} - \frac{3u}{16}\right)$$

$$= -\frac{u}{32}$$

$$\therefore\quad 2v_1{}^1 = \frac{7u}{16} - \frac{u}{32} = \frac{13u}{32}$$

அல்லது, $v_1{}^1 = \dfrac{13u}{64}$

$$\omega_1{}^1 = \frac{7u}{16} - \frac{13\,u}{64} = \frac{15\,u}{64}$$

கோளங்களின் இப்போதைய வேகங்கள் முறையே $v_1{}^1$, $\omega_1{}^1$, ω_2 ஆகும்.

அதாவது, $\dfrac{13\,u}{64}$, $\dfrac{15\,u}{64}$, $\dfrac{9\,u}{16}$ ஆகும்.

இப்பொழுது $v_1{}^1 > \omega_1{}^1 < \omega_2$ ஆகையால், இதன்பின்னர் மோதல் எதுவும் ஏற்பட முடியாது. ஆகவே, மொத்தம் ஏற்படும் மோதல்களாவன :

(i) A-யும் B-யும், (ii) B-யும் C-யும், (iii) A-யும் B-யும். ஆக மொத்தம் மூன்று மோதல்கள் ஏற்பட முடியும். மூன்று மோதல்களுக்கும் பின் கோளங்களின் வேகங்களின் விகிதம்

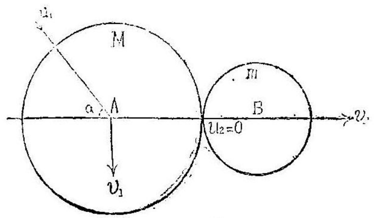
$$= v_1{}^1 : \omega_1{}^1 : \omega_2$$

$$= \frac{13\,u}{64} : \frac{15\,u}{64} : \frac{9u}{16}$$

$$= 13 : 15 : 36.$$

மாதிரி 113. ஓய்விலிருக்கும் m பொருண்மையுள்ள ஒரு பந்தின்மீது M பொருண்மையுள்ள மற்றொரு பந்து மோதுகிறது. மோதலுக்குப்பின் அவை செங்குத்துத் திசைகளில் விலகிச் சென்றால், மீட்சிக்கெழு அவற்றின் பொருண்மைகளின் விகிதத்திற்குச் சமமாயிருக்குமென்று காட்டுக.

தீர்வு : ஒய்விலிருக்கும் பந்து B-யின் மீது பந்து A-யானது u வேகத்துடன் பொதுச் செங்கோட்டிற்கு α கோணச் சாய்வில் மோதுகிறது. மோதலுக்கு முன் B ஒய்விலிருப்பதாலும், மோதலின் போது பொதுச் செங்கோட்டின் வழியே மட்டிலுமே B-யின் மீது மோதல்விசை செயல்படுமாகையாலும், B-யானது மோதலுக்குப் பின் பொதுச் செங்கோட்டுத் திசையிலேயே நகரும். ஆனால், மோதலுக்குப்பின் கோளங்கள் செங்குத்துத் திசையில் பிரிவதால், மோதலுக்குப்பின் A-யின் வேகம் பொதுச் செங்கோட்டிற்குச் செங்குத்துத் திசையிலிருக்கும். மோதலுக்குப்பின் A, B கோளங்களின் வேகங்கள் முறையே v_1, v_2 என்க.



படம் 72

நியூட்டனின் விதிப்படி ;

$$v_2 - O = -e\,(O - u_1 \cos \alpha)$$

அதாவது, $v_2 = eu_1 \cos \alpha$ ... ... (1)

உந்தக்காப்பு விதிப்படி,

$$mv_2 + Mv_1 \cos 90^\circ = Mu \cos \alpha$$

அல்லது, $mv_2 = Mu_1 \cos\alpha$ ... ... (2)

$$\therefore \quad \frac{eu_1 \cos \alpha}{Mu_1 \cos\alpha} = \frac{v_2}{mv_2}$$

அல்லது, $$\frac{e}{M} = \frac{1}{m}$$

அல்லது, $$e = \frac{M}{m}$$

மாதிரி 114. a ஆரையுள்ள இரு சம பந்துகள் தொடுகையிலுள்ளன. அவச்றின் பொதுத் தொடுகோடு வழியே நகர்ந்து கொண்டிருக்கும் C ஆரையுள்ள ஒரு பந்து இவ்விரு பந்துகளையும் ஒரே நேரத்தில் ஒன்று போலத் தாக்குகிறது. பந்துகள் எல்லாம் e மீட்சிக் கெழுவுடைய ஒரு உலோகத்தினலானவையெனில், $2e = \dfrac{c^2\,(a + c)^2}{a^3\,(2a + c)}$ ஆனல் மோதுகின்ற பந்து ஒய்விற்குக் கொண்டுவரப்படுமென்று காட்டு.

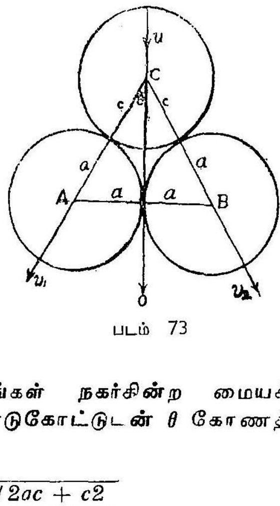
தீர்வு : சம பந்துகள் ஒவ்வொன்றின் பொருண்மை m என்றும் மோதுகின்ற பந்தின் பொருண்மை M என்றும் கொள்க. பந்துகள் யாவும் ஒரே உலோகத்தால் செய்யப்பட்டவையாகையால், அவற்றின் பொருண்மைகள் அவற்றின் கன அளவுகட்கு விகித சமத்திலிருக்கும். k என்பது விகிதசம மாறிலியெனில்,

$$M = k\ \frac{4}{3}\pi c^3 ;\ m = k\ \frac{4}{3}\pi a^3.$$

$$\therefore \quad \frac{M}{m} = \frac{c^3}{a^3}$$

$$\therefore \quad \frac{M}{c^3} = \frac{m}{a^3}$$

மோதுகின்ற பந்து C-யின் வேகம் u என்க. A, B இரண்டும் சமகோளங்களாயிருப்பதாலும், கோளம் C இவ்விரண்டின் மீதும் சமச்சீராக மோதுவதாலும், இவ்விரு கோளங்களும் மோதலுக்குப்பின் முறையே CA, CB ஆகிய மையக் கோடுகளின் வழியே சம வேகங்களுடன் செல்லும். இச்சம வேகத்தை v_1 என்க மோதலுக்குப்பின் C-யின் வேகம் பூச்சியமாகும்.



படம் 73

மோதலுக்குப்பின் சமகோளங்கள் நகர்கின்ற மையக் கோட்டுத் திசைகள் பொதுத் தொடுகோட்டுடன் θ கோணத்தில் சாய்த்துள்ளதாகக் கொள்க.

$$\therefore \quad \text{Sin}\theta = \frac{a}{a+c}\ ,\ \cos\theta = \frac{\sqrt{2ac + c2}}{a+c}$$

உந்தக்காப்பு விதியை சமகோளங்களின் பொதுத் தொடுகோடு வழியே பயன்படுத்துக.

$$\therefore \quad Mu = 2m\ v_1 \cos\theta \qquad \dots \quad \dots \qquad (1)$$

இப்போது, C, A ஆகிய பந்துகளின் மோதலைக் கருதுக.

CA வழியே நியூட்டனின் விதியைப் பயன்படுத்துக.

$$v_1 - O = -e\,(O - u\cos\theta)$$

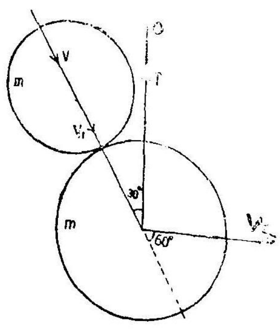
அதாவது, $v_1 = eu\cos\theta$ ... ... (2)

(1), (2) ஆகியவற்றிலிருந்து,

$$Mu = 2m\,eu\cos\theta\cos\theta$$
$$M = 2me\cos^2\theta$$

$$\therefore\ 2e = \frac{M}{m\cos^2\theta}$$
$$= \frac{M}{m}\,\frac{1}{\cos^2\theta}$$
$$= \frac{c^3}{a^3}\,\frac{(a+c)^2}{(2\,ac + c^2)}$$
$$= \frac{c^3}{a^3}\,\frac{(a+c)^2}{c\,(2a+c)}$$
$$= \frac{c^2\,(a+c)^2}{a^3\,(2a+c)}$$

மாதிரி 115. m பொருண்மையுள்ள ஒரு கோளம் ஒரு நிலையான புள்ளியிலிருந்து ஒரு நீளியல்பற்ற நூலின் மூலம் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. இக்கோளத்தைவிடச் சிறிய ஆரையும் சம பொருண்மையுடைய மற்ெருரு கோளம் நிலைக்குத்துடன் $30°$ சாய்வுத் திசையில் நகர்ந்து வந்து முதற்கோளத்தின்மீது V வேகத்துடன் நேரடியாக மோதுகிறது. இரு கோளங்களுக்கு மிடையேயுள்ள மீளமைவுக் குணகம் $\frac{1}{2}$ எனில் மோதலுக்குப்பின் முதற்கோளத்தின் திசைவேகம் $\frac{3V}{5}$ என்று நிறுவுக. மோதலின் போது நூலிலுள்ள கணத்தாக்கு விசையிணையும் கணக்கிடுக.



படம் 74

தீர்வு: மோதலுக்குப் பின், தொங்கவிடப்பட்டுள்ள கோளம் கிடைத்திசையில் நகரும். மோதலுக்குப்பின் மோதுகின்ற கோளம், தொங்கும் கோளம் ஆகியவற்றின் வேகங்கள் முறையே V_1, V_2 என்க. பொதுச் செங்கோட்டுத் திசையில் விசைப்பிரிப்பு செய்து மோதல் விதிகளை பயன்படுத்துக.

நியூட்டனின் விதி : $V_1 - V_2 \cos 60° = - e (V - O)$

$$V_1 - \frac{V_2}{2} = - \frac{V}{2} \text{ (ஏனெனில் } e = \tfrac{1}{2})$$

அல்லது, $2V_1 - V_2 = - V$ ... ... (1)

கிடைத்திசையில் உந்தக்காப்பு விதி :

$$mV_1 \cos 60° + mV_2 = mV \cos 60°$$

அதாவது, $\frac{V_1}{2} + V_2 = \frac{V}{2}$

அல்லது, $V_1 + 2V_2 = V$ ... ... (2)

(1), (2)-ஐத் தீர்க்கவும் : $5V_2 = 3V$

அல்லது $V_2 = \frac{3V}{5}$

$$V_1 = V - \frac{6V}{5} = - \frac{V}{5}$$

நூலின் கணத்தாக்கு இழுவிசை T எனில்,

$T =$ நூலின் வழியே உந்த மாறுபாடு

$$= m (-V_1 \cos 30°) - m (-V \cos 30°)$$

$$= m (V - V_1) \cos 30°$$

$$= m \left(V + \frac{V}{5}\right) \frac{\sqrt{3}}{2}$$

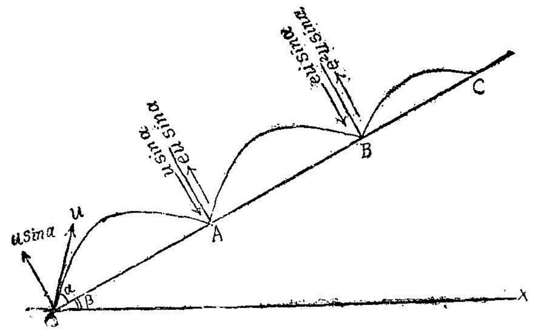
$$= m \left(\frac{6}{5} V\right) \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{5} mV$$ தாக்களவை அலகுகள்.

சாய்தளத்தின்மீது வழவழப்பான கோளத்தின் மோதல் (Impact of a smooth sphere on an inclined plane)

கிடைத்தளத்துடன் β சாய்விலுள்ள ஒரு சாய்தளத்தின் அடியிலிருந்து ஒரு துகள் சாய்தளத்துடன் α கோணச் சாய்வுத் திசையில் u திசைவேகத்துடன் சாய்தளத்தின்மீது எறியப்படு கிறது. துகளின் இயக்கத்தை விவரிக்கவும்.

O என்னும் புள்ளியிலிருந்து *u* எறிவேகத்துடன் சாய்தளத்துடன் α கோணச் சாய்வில் சாய்தளத்தின்மீது துகள் எறியப் படுகிறது. சாய்தளத்திற்கு இணையாகவும், செங்குத்தாகவும் எறிவேகத்தின் பிரிவுகள் முறையே $u \cos \alpha$, $u \text{ Sin } \alpha$ ஆகும்.



படம் 75

துகள் சாய்தளத்தின்மேல் *A*, *B*, *C* ... என்ற புள்ளிகளில் மோதித் துள்ளி எழும்பி செல்கிறதெனக் கொள்க. துகளானது *A*-யில் $u \text{ Sin } \alpha$ செங்குத்து வேகப் பிரிவுடன் மோதி $eu \text{ Sin } \alpha$ நிலைக்குத்து வேகப்பிரிவுடன் எழும்பும்; *B*-யில் $eu \text{ Sin } \alpha$ செங்குத்து வேகப்பிரிவுடன் சாய்தளத்தில் மோதி $e^2u \text{ Sin } \alpha$ செங்குத்து வேகப்பிரிவுடன் எழும்பும் ;......ஆகவே, *OA*, *AB*, *BC* .., ஆகிய சாய்தள வீச்சுக்களைக் கடக்கும் நேரங்கள் முறையே

$$\frac{2u \text{ Sin } \alpha}{g \cos \beta}, \frac{2eu \text{ Sin } \alpha}{g \cos \beta}, \frac{2\, e^2u \text{ Sin } \alpha}{g \cos \beta}, \ldots$$

ஆகவே, *n*-ஆவது மோதல் வரை ஆகும் மொத்த நேரம்

$$= \frac{2u \text{ Sin } \alpha}{g \cos \beta} (1 + e + e^2 + \ldots\ldots + e^{-n1})$$

$$= \frac{2u \text{ Sin } \alpha}{g \cos \beta} \cdot \frac{1-e^n}{1-e} \qquad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

துகள் சாய்தளத்தின்மேல் துள்ளி எழுவது நிற்கும் வரை ஆகும் மொத்த நேரம்

$$T = \frac{2u \text{ Sin } \alpha}{g \cos \beta} [1 + e + e^2 + \ldots\ldots \infty]$$

$$= \frac{2u \sin \alpha}{g \cos \beta} \; \frac{1}{1-e} \qquad \ldots \quad \ldots \qquad (2)$$

இப்பொழுது தளத்திற்கு இணையான இயக்கத்தினைக் கருதுக.

தளத்திற்கு இணையான வேகப்பிரிவு $u \cos \alpha$ மோதல்களினுல் பாதிக்கப்படுவதில்லை. ஆனுல் இவ்வேகத்திற்கு எதிராக ஈர்ப்பு முடுக்கத்தின் பிரிவாகிய $g \sin \beta$ செயல்படும்.

ஆகவே, T நேரத்தில் தளத்தின்மீது துகள் சென்றுள்ள மொத்த தூரம்.

$$S = u \cos \alpha \, T - \tfrac{1}{2} g \sin \beta . \; T^2$$

$$= T \left[u \cos \alpha - \tfrac{1}{2} g \sin \beta . \; T \right]$$

$$= \frac{2u \sin \alpha}{g \cos \beta (1-e)} \left[u \cos \alpha - \tfrac{1}{2} g \sin \beta \, \frac{2u \sin \alpha}{g \cos \beta (1-e)} \right]$$

$$= \frac{2u \sin \alpha}{g \cos \beta (1-e)} \left[u \cos \alpha - \frac{u \sin \alpha \sin \beta}{\cos \beta (1-e)} \right]$$

$$= \frac{2 u^2 \sin \alpha}{g \cos^2 \beta (1-e)^2} \left[\cos \alpha \cos \beta (1-e) - \sin \alpha \sin \beta \right]$$

$$= \frac{2u^2 \sin \alpha}{g \cos^2 \beta (1-e)^2} \left[\cos (\alpha + \beta) - e \cos \alpha \cos \beta \right] \qquad \ldots \quad (3)$$

துகள் சாய்தளத்தின்மீது மேல்முகமாக நகருவது நிற்கும்வரை மொத்த நேரமும் தூரமும்

சாய்தளத்திற்கு இணையான திசைவேகக் கூறு பூச்சியமாகும் வரை துகள் சாய்தளத்தின்மீது மேல்முகமாக நகரும். இவ்வியக்கம் இருவிதமாக நடைபெறலாம். முதலில் துகளானது சாய்தளத்தின்மீது துள்ளித் துள்ளிச் செல்லும். துள்ளல் நின்ற பின்னர் துகள் தளத்தின்மீது மேல்முகமாக உருண்டு கொண்டோ அல்லது வழுக்கிக் கொண்டோ அதன் வேகம் பூச்சியமாகும் வரை செல்லும். துள்ளிச் சென்றுலும், உருண்டு சென்றுலும், வழுக்கிச் சென்றுலும் அதன் வேகத்திற்கு எதிராகச் செயல்படுவது ஈர்ப்பு முடுக்கம் மட்டுமே.

சாய்தளத்திற்கு இணையாகக் தொடக்க வேகம் $= u \cos \alpha$,

எதிர்முடுக்கம் $= g \sin \beta$

இறுதி வேகம் $= 0$

நேரம் $= t$ எனில்,

$v = u + at$ சமன்பாட்டிலிருந்து,

$$O = u \cos \alpha - g \sin\beta \; t$$

அல்லது, $t = \dfrac{u \cos \alpha}{g \sin \beta}$ ... ... (4)

சாய்தளத்தின்மீது மேல்முகமாகச் செல்லும் மொத்தத் தூரம்

$$S_1 = u \cos\alpha \; t - \tfrac{1}{2} g \sin\beta \; t^2$$

$$= t\,(u \cos \alpha \; \tfrac{1}{2} g \sin \beta \; t)$$

$$= \frac{u \cos \alpha}{g \sin\beta} \left[u \cos \alpha - \tfrac{1}{2} \sin \beta . \; \frac{u \cos \alpha}{g \sin \beta} \right]$$

$$= \frac{u^2 \cos^2 \alpha}{g \sin \beta} \left[\; (1 - \tfrac{1}{2} \; \right]$$

$$= \frac{u^2 \cos^2 \alpha}{2g \sin \beta} \qquad \dots \quad \dots \quad (5)$$

n-ஆம் துள்ளலுக்குப்பின் துகள் எறிபுள்ளிக்குத் திரும்ப ஆகும் நேரம்

n-ஆம் துள்ளலுக்குப்பின் துகள் எறிபுள்ளியை வந்தடைவதால், $(n + 1)$ஆம் துள்ளலின்போது துகள் எறிபுள்ளிக்கு வந்துசேரும். ஆகவே, சமன்பாடு (1)இலிருந்து, $(n + 1)$ ஆவது துள்ளல்வரை நேரம் $= \dfrac{2u \sin \alpha}{g \cos\beta} \; \dfrac{1 - e^{n+1}}{1 - e}$ ... (6)

r-ஆவது மோதலில் துகள் சாய்தளத்தைச் செங்குத்தாக மோதுதல்:

r-ஆவது மோதல் வரை ஆகும் நேரம் $= \dfrac{2u \sin \alpha}{g \cos \beta} \; \dfrac{1 - e^r}{1 - e}$

இந்த நேரத்தில் சாய்தளத்திற்கு இணையான வேகம் பூச்சியமாகிவிடுகிறது.

சாய்தளத்திற்கு இணையான தொடக்கவேகம் $= u \cos \alpha$

எதிர்முடுக்கம் $= g \sin \beta$

இறுதிவேகம் $= O$

நேரம் $= \dfrac{2u \sin \alpha}{g \cos \beta} \; \dfrac{1 - e^r}{1 - e}$

$\therefore\ v = u + at$ என்னும் சூத்திரத்திலிருந்து,

$$O = u \cos \alpha - g \sin \beta \frac{2u \sin \alpha}{g \cos \beta} \frac{1-e^r}{1-e}$$

$$= u \cos \alpha - 2u \sin \alpha \tan \beta \frac{1-e^r}{1-e}$$

அல்லது, $2 \tan \alpha \tan \beta (1-e^r) = 1-e$

r-ஆவது மோதலில் செங்குத்தாக மோதி n-வது மோதலில் எறி புள்ளிக்குத் திரும்பினல் $e^n - 2e^r + 1 = O$

n துள்ளல்களில் r துள்ளல்கள் மேல்முகமாகயிருப்பதால், $(n-r)$ துள்ளல்கள் கீழ் முகமாகயிருக்கும். எனவே, சாய்தளத் திணையான தொடக்கவேகம் $u \cos \alpha$ r-ஆவது மோதலில் பூச்சியாகி, மீண்டும் n-ஆவது மோதலில் எறிபுள்ளியில் மூல மதிப்பைப் பெறுகிறது.

r மேல்முகத் துள்ளல்களுக்கு ஆகும் நேரம் $= \frac{2u \sin -}{g \cos \beta}$

$$[1 + e + e^2 + \ldots\ldots + e^{r-1}]$$

$$= \frac{2u \text{ Sin } \alpha}{g \cos \alpha} \frac{1-e^r}{1-e}$$

$(r + 1)$ ஆவது துள்ளலிருந்து n-ஆவது துள்ளல் வரை கீழ்முக இயக்கந்திற்கு ஆகும் நேரம் $= \frac{2u \sin \alpha}{g \cos \beta} [e + e^{r+1} + \ldots\ldots (n+r)$ உறுப்புக்கள் $]$

$$= \frac{2u \sin \therefore}{g \cos \beta} e^r \frac{1-e^{n-r}}{1-e}$$

இவ்விரு நேரங்களும் சமமாகயிருக்க வேண்டும்.

எனவே, $\frac{2u \sin \alpha}{g \cos \beta} \frac{1-e^r}{1-r} = \frac{2u \sin \alpha}{g \cos \beta} er \frac{1-e^{n-r}}{1-e}$

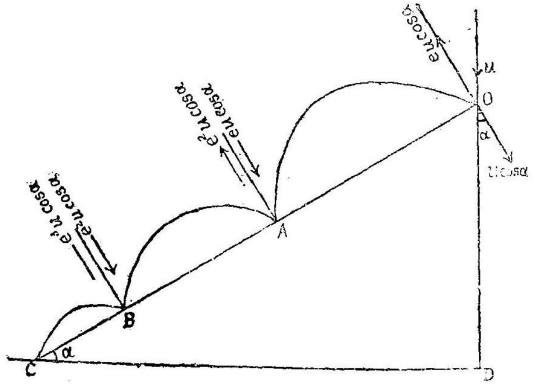
$$\therefore\ 1-e^r = e^r (1-e^{n-r}) = e^r - e^n$$

அல்லது, $e^n - 2e^r + 1 = O.$

மாதிரி 116. மீளியல் குணகம் e உடைய ஒரு பந்து h நிலைக்குத்துயரத்திலிருந்து k நீளமும், கிடைத்தளத்துடன் α சாய்விலுமுள்ள ஒரு சாய்தளத்தின் உச்சியில் விழுந்து சாய்தளத் தின் அடிப்பாகத்திற்கு மூன்று துள்ளல்களில் இறங்குகிறது.

$$k = 4he\,(1 + e)\,(1 + e + e^2)\,(1 + e^2)\sin\alpha$$

என்று நிறுவுக.



படம் 76

தீர்வு : OC என்னும் சாய்தளம் கிடைத்தளத்துடன் α கோணச் சாய்விலுள்ளது. அதன் உச்சியில் O எனும் புள்ளியில் பந்து நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கி u வேகத்துடன் விழுகிறது. எனவே, தளத்திற்குச் செங்குத்துத் திசையில் அவ்வேகத்தின் பிரிவு $u \cos\alpha$ ஆகும். ஆகவே, O-வில் பந்து துள்ளியெழும் வேகத்தின் செங்குத்துப் பிரிவு $eu \cos\alpha$ ஆகும். இதுபோல் சாய்தளத்தின்மேல் பந்து மோதி எழும்புகின்ற A, B ஆகிய புள்ளிகளில் சாய்தளத்திற்குச் செங்குத்துத் திசையில் அதன் வேகத்தின் பிரிவுகள் முறையே $e^2u \cos\alpha$, $e^3u \cos\alpha$ ஆகும்.

$u = h$ உயரத்திலிருந்து பந்து O-வில் விழும் போதுள்ள வேகம் $\sqrt{2gh}$. OA, AB, BC ஆகிய துள்ளல்களின் நேரங்கள் முறையே

$$\frac{2\,eu \cos\alpha}{g \cos\alpha},\ \frac{2e^2\,u \cos\alpha}{g \cos\alpha},\ \frac{2\,e^3u \cos\alpha}{g \cos\alpha}$$

அதாவது, $\frac{2\,eu}{g}$, $\frac{2\,e^2u}{g}$, $\frac{2\,e^3u}{g}$ ஆகும்.

ஆகவே C-யை அடைய ஆகும் மொத்த நேரம்

$$T = \frac{2\,eu}{g} + \frac{2\,e^2u}{g} + \frac{2\,e^3u}{g}$$

$$= \frac{2\,en}{g}(1 + e + e^2)$$

O-வில் சாய்தளத்திற்கு இணையான பந்தின் வேகப்பிரிவு $= u \sin\alpha$. இவ்வேகப் பிரிவு மோதல்களினால் பாதிக்கப்படுவதில்லை. ஆனால் பந்தானது இவ்வேகத்துடனும் $g \sin\alpha$ முடுக்கத்துடனும் T நேரத்தில் C-யை அடைகிறது.

$\therefore\ S = ut + \frac{1}{2} at^2$ என்னும் சமன்பாட்டில்,

$S = k,\ u = u \sin\alpha,\ a = g \sin\alpha,\ t = T$ என்று பிரதியிடுக.

$$k = u \sin\alpha \,.\; T + \tfrac{1}{2} g \sin\alpha \,.\; T^2.$$

$$= (u + \tfrac{1}{2} gT)\, T \sin -$$

$$= \left[u + \tfrac{1}{2} g .\ \frac{2\,eu}{g}(1+e+e^2)\right] \frac{2\,eu}{g}(1+e+e^2) \sin\alpha$$

$$= [u + eu\,(1+e+e^2)]\ \frac{2\,eu}{g}\ (1+e+e^2 \sin\alpha$$

$$= \frac{2\,e}{g} u^2[1+e\,(1+e+e^2)]\,(1+e+e^2) \sin\alpha$$

$$= \frac{2e}{g}\,(2gh)\,(1+e)+e^2\,(1+e)]\,(1+e+e^2) \sin\alpha$$

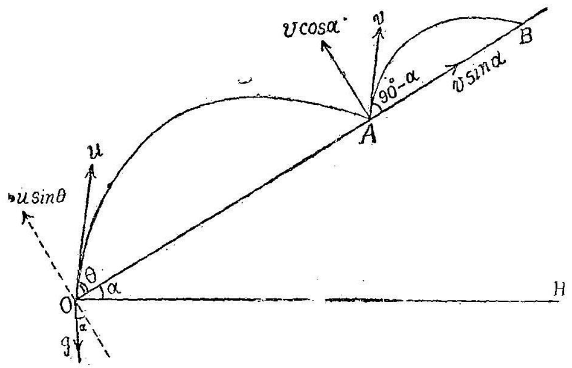
$$= 4eh\,(1+e)\,(1+e^2)\,(1+e+e^2) \sin\alpha.$$

மாதிரி 117. கிடைத்தளத்துடன் α சாய்விலுள்ள ஒரு சாய்தளத்தின் அடியிலிருந்து தளத்துடன் θ கோணச் சாய்வுத் திசையில் ஒரு துகள் எறியப்படுகிறது. சாய்தளத்தின் மேல் முதன் மோதலுக்குப்பின் துகள் நிலைக்குத்தாகத் துள்ளியெழும்பினால்

$\cot\theta = (2 + e) \tan\alpha$, e என்பது மீட்சிக்கெழு,

என்று காட்டுக.

தீர்வு : O என்னும் எறிபுள்ளியிலிருந்து எறியப்படும் துகள் சாய்தளத்தில் A-யில் மோதி நிலைக்குத்தாகத் துள்ளியெழும்பு



படம் 77

கிறது. எறிவேகம் u என்றும், A-யில் மோதும்வரை நேரம் t என்றும் கொள்க. t நேரத்தில் துகள் சாய்தளத்தின் மேலேயே A-யில் இருப்பதால் சாய்தளத்திற்குச் செங்குத்துத் திசையில் துகள் சென்றுள்ள தூரம் பூச்சியமாகும். சாய்தளத்திற்குச் செங்குத்துத் திசையில் துகளின் வேகப்பிரிவு $u \sin\theta$; அதன் எதிர்முடுக்கம் $g \cos\alpha$. எனவே, $S = ut + \frac{1}{2}at^2$ என்னும் சூத்திரத்திலிருந்து,

$$O = u \sin\theta . t - \tfrac{1}{2} g \cos\alpha \; t^2$$

அல்லது, $t = \dfrac{2u \sin\theta}{g \cos\alpha}$

A-யில் துகள் நிலைக்குத்தாகத் துள்ளியெழும்புகிறது. துள்ளு வேகம் v எனில், செங்குத்துத் திசைவேகம் $v \cos\alpha$ ஆகும். ஆனால் தளத்திற்குச் செங்குத்துத் திசையில் துகளின் தொடக்க வேகம் $u \sin\theta$ ஆகையால், Aயில் விழும்போதும் செங்குத்துத் திசைவேகம் $u \sin\theta$ ஆகும். ஆகவே, A-யில் துள்ளும்போது செங்குத்துத் திசைவேகம் $eu \sin\theta$ ஆகயிருக்கும்.

$$\therefore \quad v \cos\alpha \; eu \sin\theta$$

சாய்தளத்திற்கு இணையாகத் தொடக்கவேகம் $u \cos\theta$; எதிர் முடுக்கம் $g \sin \alpha$; t நேரத்தில் A-யில் சாய்தளத்திற்கு இணையான வேகம் $v \sin \alpha$. எனவே, $v=u+at$ சூத்திரத்திலிருந்து,

$$v \sin \alpha = u \cos \theta - g \sin \alpha\, t$$

$$= u \cos \theta - g \sin\alpha \, \frac{2u \sin\theta}{g \cos\alpha}$$

$$= u \cos - 2u \sin\theta \tan\alpha$$

$$\therefore \quad \frac{v \sin \alpha}{v \cos \alpha} \quad \frac{u \cos\theta - 2u \sin\theta \tan \alpha}{eu \sin \theta}$$

அதாவது, $\tan \alpha = \dfrac{\cos\theta - 2\sin\theta \tan\alpha}{e \sin \theta}$

அல்லது, $e \tan\alpha = \cot \theta - 2 \tan \alpha$

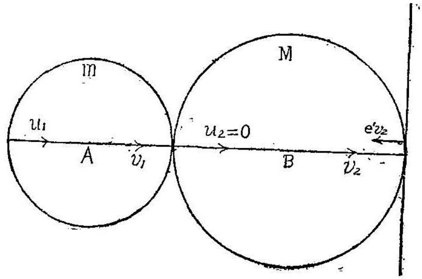
$$\therefore \quad (2 + e) \tan \alpha = \cot\theta$$

மாதிரி **118.** ஒரு மேசையின்மேல் ஓய்விலிருக்கும் M பொருண்மையுள்ள ஒரு கோளத்தின்மீது m பொருண்மையுள்ள ஒரு கோளம் நேராக மோதுகிறது. ஓய்விலிருந்த கோளம் மோதலுக்குப்பின் நகர்ந்து தன் பாதைக்குச் செங்குத்தாகவுள்ள ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தின்மீது மோதித் திரும்புகிறது. e, e^1 என்பன முறையே இரு கோளங்களுக்கிடையேயும், நிலைக்குத்துத் தளத்திற்கும் M பொருண்மைக் கோளத்திற்கிடையேயுமுள்ள மீளியல்புக் குணகங்களாகும். $m(1 + e' + ee') < eM$ எனில், கோளங்களுக்கிடைய மேற்கொண்டு மோதல் எதுவும் ஏற்படாது என்று காட்டுக.

(சென்னை பி.எஸ்ஸி. 1967 செப்.)

தீர்வு : A, B என்பன முறையே m, M பொருண்மைகளுள்ள கோளங்களின் மையங்கள். ஓய்விலிருக்கும் கோளம் B-யைக் கோளம் A-யானது u_1 வேகத்துடன் மோதுகிறது. மோதலுக்குப்பின் கோளங்களின் வேகங்கள் முறையே v_1, v_2 என்க. பின் B-யானது நிலைக்குத்துத் தளத்தின்மீது v_2 வேகத்துடன் மோதி $e^1 v_2$ வேகத்துடன் எதிர்த்திசையில் திரும்பும். இப்போது, கோளம் A-யானது AB திசையில் v_1 வேகத்துடனும், கோளம் B-யானது BA திசையில் $e^1 u_2$ திசையுடனும் நகரு

கின்றன. அதாவது, கோளம் A-யானது BA திசையில் $-v_1$ வேகத்துடனும், கோளம் Bயானது $B1$ திசையில் eV_2 வேகத்



படம் 78

துடனும் நகருகின்றன. எனவே, $-v_1 > e^1v_2$ எனில், இரு கோளங்களுக்குமிடையே மேற்கொண்டு மோதல் ஏற்படாது.

இப்போது, இரு கோளங்களுக்குமிடையேயுள்ள மோதலைக் கருதுக :

மீட்சிக்கெழு e.

$$mv_1 + Mv_2 = mu_1 + O = mu_1$$

$$v_1 - v_2 = -e(u_1 - O) = -eu_1$$

$$\therefore \quad mv_1 - mv_2 = emu_1$$

கழிக்கவும் $(M+m)v_2 = (1+e)\ mu_1$

$$\therefore \quad v_2 = \frac{(1+e)\ mu_1}{M+m}$$

$$m\ v_1 = mu_1 - Mv_2$$

$$= mu_1 - \frac{M\ (1+e)\ mu_1}{M+m}$$

$$= \frac{mu_1}{M+m}[M+m-M\ Me]$$

$$= \frac{mu_1\ (m-Me)}{M+m}$$

அல்லது, $v_1 = \dfrac{(m-eM)}{M+m}$

இருகோளங்களும் மேற்கொண்டு மோதாமலிருக்க வேண்டுமாயின்,

$$-v_1 > e^1 v_2$$

$$v_1 < -e^1 v_2$$

$$\frac{(m-eM)\,u_1}{M+m} < \frac{-e^1\,(1+e)\,mu_1}{M+m}$$

$$m - eM < -e^1\,(1+e)\,m$$

$$< -e^1 m - ee^1 m$$

$$\therefore \quad m + e^1 m + ee^1 m < eM$$

அல்லது, $m\,(1+e^1+ee^1) < eM$.

மாதிரி **119.** $1, e, e^2, \ldots\ldots$ பொருண்மைகளுள்ள n மீள் சக்திக் கோளங்கள் அவற்றின் மையங்கள் ஒரு நேர்கோட்டிலமையுமாறு ஒன்றுக்கொன்று இடைவெளிவிட்டு ஓய்விலிருக்கின்றன. முதல் கோளம் இரண்டாவது கோளத்தின்மீது u வேகத்துடன் நேரடியாக மோதவிடப்படுகிறது. முதல் $(n-1)$ கோளங்களும் $(1-e)\,u$ எனும் ஒரே வேகத்துடனும், இறுதிக் கோளம் u வேகத்துடனும் நகரும் என்று காட்டுக. இறுதி இயங்கு ஆற்றல் $\frac{1}{2}\,(1-e+e^n)\,u^2$ என்று காட்டுக.

தீர்வு : முதலிரு கோளங்களும் மோதுமுன் அவற்றின் வேகங்கள் முறையே u, O ஆகும். மோதலுக்குப்பின் அவற்றின் வேகங்கள் முறையே v_1, v_2 என்க.

அவற்றின் பொருண்மைகள் முறையே $1, e$; அவற்றின் மீட்சிக்கெழு e.

$\therefore$ உந்தக்காப்பு விதி : $1\,v_1 + e\,v_2 = 1\,u + e\,O$.

அதாவது, $v_1 + e\,v_2 = u$ ... ... (1)

நியூட்டனின் விதி : $v_1 - v_2 = -eu$ ... ... (2)

$$\therefore \quad (1+e)\,v_2 = (1+e)\,u$$

அல்லது, $v_2 = u$.

$$v_2 = -eu + v_2 = -eu + u = (1-e)\,u$$

அதாவது, முதலிருகோளங்களும் மோதலுக்குப்பின் முறையே $(1-e)u$, u வேகங்களுடன் நகருகின்றன.

இப்பொழுது, இரண்டாவது மூன்ருவது கோளங்களின் மோதலைக் கருதுக :

மோதலுக்குமுன் அவற்றின் வேகங்கள் முறையே u, O ஆகும். இவற்றிற்கிடையேயுள்ள மீட்சிக்கெழுவும் e ஆகையால், மோதலுக்குப்பின் அவற்றின் வேகங்கள் முறையே $(1-e)u$, u என்று முன்போல் காணலாம். இவ்வாறு தொடர்ந்து கணக்கிட, முதல் $(n-1)$ கோளங்களும் மோதலுக்குப்பின் $(1-e)\,u$ என்னும் ஒரே வேகத்துடன் நகருமெனவும், கடைசி n-ஆவது கோளம் u வேகத்துடன் நகருமெனவும் காணலாம்.

இறுதி மொத்த இயக்க ஆற்றல் : மோதலுக்குப்பின் கோளங்களின் வேகங்கள் முறையே v_1, v_2, v_3......, v_{n-1}, v_n எனில்,

$v_1 = v_2 = v_3 = ... = v_{n-1} = (1-e)\,u$, $v_n = u$ ஆகும். m_1, m_2, m_3......, m_{n-1}, என்பன அவற்றின் பொருண்மைகளெனில்,

$$m_1=1\ ;\ m_2=e\ ;\ m_3=e^2\ ;......,\ m_{n-1}=e^{n-2}\ ;\ m_n=e^{n-1}$$

$\therefore$ மொத்த இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + ...$
$+ \frac{1}{2}m_{n-1}v^{2n}{}_{-1} + \frac{1}{2}mv_nv_n^2$

$$= \tfrac{1}{2}\,1...(1-e)^2u^2 + \tfrac{1}{2}e\,(1-e)^2u^2 + \tfrac{1}{2}e^2(1-e)^2u^2 + ...$$

$$+ \tfrac{1}{2}e^{n-2}(1-e)^2u^2 + \tfrac{1}{2}e^{n-1}u^2$$

$$= \tfrac{1}{2}(1-e)^2u^2\,[1+e+e^2+......+e^{n-2}] + \tfrac{1}{2}e^{n-1}u^2$$

$$= \tfrac{1}{2}(1-e)^2u^2\left[\frac{1-e^{n-1}}{1-e}\right] + \tfrac{1}{2}e^{n-1}e^2$$

$$= \tfrac{1}{2}u^2\,[\,(1-e)(1-e^{n-1}) + e^{n-1}]$$

$$= \tfrac{1}{2}u^2\,[1-e-e^{n-1} + e^n + e^{n-1}]$$

$$= \tfrac{1}{2}(1-e+e^n)\,u^2.$$

மாதிரி 120. மீட்சிக்கெழு e உடைய இரு கோளங்கள் நேரடியாக மோதுகின்றன. நிலை மீள் தாக்களவை இறுக்கத் தாக்களவையைப்போல் e மடங்கு என்று நிறுவுக. மேலும், இறுக்கத்தின்போது இழக்கப்பட்ட இயக்க ஆற்றலில் ஒரு பகுதி நிலைமீட்சியின்போது திரும்பப் பெறப்படுகிறதென்று காட்டுக. இயக்க ஆற்றலில் மொத்த இழப்பையும் கணக்கிடுக.

தீர்வு : u_1 திசைவேகத்துடன் நகர்ந்து கொண்டிருக்கும் m_1 பொருண்மையுள்ள கோளம் u_2 திசைவேகத்துடன் நகர்ந்து

கொண்டிருக்கும் m_2 பொருண்மையுள்ள கோளத்துடன் நேரடியாக மோதுவதாகக் கொள்க. அவற்றின் இறுக்கத் தாக்களவை I_1 என்றும், நிலைமீள் தாக்களவை I_2 என்றும் கொள்க.

கோளங்களிடையே இறுக்கம் முடியந் தருவாயில் அவற்றின் பொதுவேகம் U என்க.

எனவே, இறுக்கக் காலத்தில் முதல் கோளத்தின் உந்த இழப்பு $m_1 (u_1 - U)$;

இரண்டாவது கோளத்தின் உந்த அதிகரிப்பு $= m_2 (U - u_2)$

$$I_1 = \text{இறுக்கத் தாக்களவை}$$

$$= \text{இறுக்கத்தின்போது உந்த மாறுபாடு}$$

$$= m_1 (u_1 - U) = m_2 (U - u_2)$$

$$\therefore \quad \frac{I_1}{m_1} = (u_1 - U \;;\; \frac{I_1}{m_2} = (U - u^2)$$

$$\therefore \quad \frac{I_1}{m_2} + \frac{I_1}{m_2} = u_1 - U + U - u_2 = (u_1 - u_2) \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

மோதலுக்குப்பின் கோளங்களின வேகங்கள் முறையே v_1, v_2 என்க.

$\therefore$ நிலைமீட்சிக் காலத்தில்,

$$I_2 = m_1 (U - v_1) = m_2 (v_2 - U)$$

அல்லது, $\frac{I_2}{m_2} + \frac{I_2}{m_2} = U - v_1 + v_2 - U = v_2 - v_1 \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$

(1) இலிருந்து, $I_1 \left(\frac{1}{m_1} + \right) = u_1 - u_2$

(2) இலிருந்து, $I_2 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = v_2 - v_1$

$$\therefore \quad \frac{I_2}{I_1} = \frac{v_2 - v_1}{u_1 - u_2} = \frac{-e (u_2 - u_1)}{u_1 - u_2} = e$$

$$\therefore \quad I_2 = e I.$$

அதாவது, நிலைமீள் தாக்களவை $= e \times$ இறுக்கத் தாக்களவை.
மேலும், $m_1 (u_1 - U) = m_2 (U - u_2)$ -இலிருந்து,

$$U = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2} \text{ என்றும்,}$$

$$m_1 (U-v_1) = m_2 (v_2-U) \text{ இலிருந்து,}$$

$$U = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \text{ என்றும்}$$

காணலாம்.

இப்பொழுது, இறுக்கக் காலத்திலும், நிலைமீட்சிக் காலத்திலும் ஏற்படும் இயக்க ஆற்றல் இழப்புக்கள் முறையே E_1, E_2 என்க.

$$\therefore \quad E_1 = (\tfrac{1}{2} m_1 u_1 + \tfrac{1}{2} m_2 u_2^2) - \tfrac{1}{2} (m_1 + m_2) U^2$$

$$= \tfrac{1}{2} \left[(m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2) - (m_1 + m_2) \frac{(m_1 u_1 + m_2 u_2)^2}{(m_1 + m_1)}\right]$$

$$= \tfrac{1}{2} \left[\frac{m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2) (m_1+m_2) - (m_1 u_1 + m_2 u_2)^2}{(m_1 + m_2)}\right]$$

$$= \tfrac{1}{2} \left[\frac{m_1 m_2 (u_1^2 + u_2^2 - 2u_1 u_2)}{(m_1 + m_2)}\right]$$

$$= \tfrac{1}{2} \frac{m_1 m^2}{m_1 + m_2} (u_1 - u_2)^2$$

இதுபோல், $E_2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) U^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_2 v^2$

$$= \tfrac{1}{2} (m_1 + m_2) \left(\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}\right)^2 - \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 - \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2]$$

$$= -\tfrac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2$$

$$= -\tfrac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} e^2 (u_1 - u_2)^2.$$

$$= -e^2 E_1$$

$0 < e < 1$ ஆகயிருப்பதாலும் E_2 இன்மதிப்பு எதிரடையாளமுடனிருப்பதாலும் இறுக்கத்தின்போது இழக்கப்பட்ட இயக்க ஆற்றலின் ஒரு பகுதி நிலைமீட்சியின்போது திரும்பப் பெறப்படுகிறது என்று காணலாம்.

மோதலின்போது இழக்கப்பட்ட மொத்த இயக்க ஆற்றல்

$$= E_1 + E_2$$

$$= E_1 - e^2 E_1$$

$$= E_1 (1 - e^2)$$

$$= \tfrac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1 - e^2) (u_1 - u_2)^2.$$

பயிற்சி 12

(1) A என்னும் ஒரு பந்து ஒரு வழவழப்பான கிடைத் தளத்தின்மேல் வைக்கப்பட்டுள்ள அதற்குச் சரிசமமான வடிவொத்த B என்னும் பந்தின்மீது நேரடியாக மோதுகிறது. மீளமைவுக் குணகம் e எனில், மோதலுக்குப்பின் B-யின் வேகத்திற்கும் Aயின் வேகத்திற்குமுள்ள விகிதம் $1+e : 1-e$ என்று காட்டு.

(2) 4 அடி/விநாடி வேகத்தில் நகர்ந்து கொண்டிருக்கும் 2 ராத்தல் பொருண்மையுள்ள ஒரு கோளம் ஓய்விலிருக்கும் 4 ராத்தல் பொருண்மையுள்ள மற்றொரு கோளத்தின்மீது நேரடியாக மோதுகிறது. மோதலுக்குப்பின் முதற்கோளம் ஓய்வு நிலைக்குக் கொண்டுவரப்பட்டால் மீட்சிக்கெழு $\frac{1}{2}$ என்றும், இயக்க ஆற்றல் இழப்பு 8 அடி ராத்தலிகள் என்றும் காட்டுக.

(3) m பொருண்மையுள்ள ஒரு பந்து $2m$ பொருண்மையுள்ள மற்றொரு பந்தின்மீது மோதுகிறது. இரண்டாவது பந்து முதற்பந்து நகர்ந்து கொண்டிருக்கும் திசையிலேயே அதன் திசை வேகத்தில் $\frac{1}{7}$ திசைவேகத்துடன் நகர்ந்து கொண்டிருந்தது. $e = \frac{3}{4}$ எனில், மோதலுக்குப்பின் முதற்பந்து ஓய்விலிருக்குமென்று காட்டு.

(4) ஒரு மேசையின்மேல் இரு சமமான பில்லியர்ட் பந்துகள் (Billiard Balls) தொடுகையிலிருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளன. இவ்விரு பந்துகளுக்கும் அளவிலும் பொருண்மையிலும் சமமான மற்றொரு பந்து அவற்றின்மீது சமச்சீராக மோதி, ஓயவு நிலையை அடைகிறது. மீளியல் குணகம் $\frac{2}{3}$ என்று காட்டு.

(5) ஒரு கனமான மீளியல்புத்துகள் ஓர் அறையின் கூரையிலிருந்து தரையில் விழுந்து, இருமுறை துள்ளியபின் கூரையின் உயரத்தில் பாதி உயரத்தை அடைகிறது. மீளியல் குணகம் $\dfrac{1}{4\sqrt{2}}$ என்று காட்டு.

(6) இரு சமமான, முற்றிலும் மீளியல்புடைய கோளங்கள் மோதினால் அவற்றின் மையக்கோட்டின் வழியே பிரிக்கப்படும் திசைவேகக் கூறுகளை அவை மாற்றிக் கொள்கின்றன என்று காட்டுக.

(7) A என்னும் பந்து B என்னும் பந்தின்மீது சாய்வாக மோதுகிறது. மோதலுக்குப்பின் Aயின் திசைவேகம் மோத

லுக்குமுன் Bயின் திசைவேகத்துடன் அளவிலும் திசையிலும் சமமாயிருந்தால் இரு பந்துகளின் பொருண்மைகளின் விகிதம் மீட்சிக்கெழுவிற்குச் சமமாயிருக்குமென்று காட்டு.

(8) ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்துத் திசைகளில் நகர்ந்து கொண்டிருக்கும் இரண்டு சமமான, வழவழப்பான முற்றிலும் மீள்சக்தியுடைய கோளங்கள் சாய்வாக மோதிக் கொள்கின்றன. மோதலுங்குப் பின்னரும் அவை ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்துத் திசைகளிலேயே செல்லுமென்று காட்டுக.

(9) M பொருண்மையுள்ள இரு சமமான கோளங்கள் ஒரு வழவழப்பான மேசையின்மேல் தொடுகையிலுள்ளன. m பொருண்மையுள்ள மற்றொரு கோளம் அவற்றின்மீது சமச்சீராக மோதி ஒய்வடைகிறது. மீட்சிக்கெழு $\frac{2M}{3m}$ என்று காட்டு.

(10) ஒரு வழவழப்பான பந்து மற்றொரு வழவழப்பான சமமான பந்துடன் மோதுகிறது. மோதலுக்குப்பின் இரு பந்துகளும் நகருகின்ற திசைகளுக்கிடையேயுள்ள கோணத்தின் சமவெட்டி அமைகின்ற திசையில் முதற்பந்து இரண்டாவது பந்தின்மீது மோதுகிறது. மோதலுக்குமுன் மோதுகின்ற பந்தின் திசை மையக் கோட்டுடன் α கோணச் சாய்விலிருந் $\tan\alpha = \sqrt{e}$ என்று காட்டு.

(11) ஒரு பந்து, தன்னுடைய வேகத்தைப் போன்ற அதே வேகத்துடன் தன்னுடைய திசைக்குச் செங்குத்துத் திசையில் நகர்ந்து கொண்டிருக்கும் ஒரு துகளின் மீது மோதுகிறது. மோதலின்போது மையக்கோடு இரண்டாவது துகளின் திசைக்குச் செங்குத்தாகயிருக்கிறது. மீட்சிக்கெழு e எனில், இரண்டாவது பந்தின் இயக்கத்திசை $\tan^{-1}\left(\frac{1+e}{2}\right)$ விலக்கத்தில் திசைமாறுகிறதென்று காட்டுக.

(12) ஒரு வட்ட மேசையின் விளிம்பில் ஒரு வழவழப்பான வளையம் கிடையாகப் பொருத்தப்பட்டுள்ளது. வளையத்தை யொட்டி P என்னும் புள்ளியிலிருந்து ஒரு துகள் மேசையின் மேற்பரப்பின்மீது வீசப்படுகிறது. வளையத்திற்கும் துகளுக்குமிடையே மீளமைவுக் குணகம் e. P வழ ஆரையுடன் எறிதிசை திசையின் கோணம் α. வளையத்தின்மீது இருமுறை மோதியெழும்பியபின் துகள் எறிபுள்ளியை வந்தடைந்தால்

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{e^3}{1+e+e^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$ என்று காட்டுக.

(13) உயரமான விளிம்பையுடைய ஒரு வழவழப்பான கிடைத்தள வட்ட மேசையின் விளிம்பையொட்டிய ஒரே புள்ளியிலிருந்து இரு துகள்கள் மேசையின் மேற்பரப்பின்மீது வீசப்படுகின்றன. ஒவ்வொன்றும் விளிம்பை இருமுறை மோதியபின் ஒன்று எறிபுள்ளியையும், மற்றது எறிபுள்ளிக்கு விட்ட எதிர் புள்ளியையும் வந்தடைகின்றன. எறிபுள்ளி வழி ஆரையுடன் துகள்களின் எறிதிசைகளின் கோணங்கள் முறையே $\propto$, β எனில், $\tan \propto \tan \beta = e^2$ என்று நிறுவுக.

(14) ஒரு வழவழப்பான கிடைத்தள மேசை $ABCD$ என்னும் சதுர அமைப்பிலுள்ளது. அதன் விளிம்புகள் அதே உலோகத்தினுல் செய்யப்பட்ட சட்டங்களினுல் சற்று உயர்த்தப் பட்டுள்ளது A-யிலிருந்து ஒருதுகள் ABயுடன் θ கோணத்தில் மேசையின்மீது எறியப்படுகிறது. அது BC, CD, DA ஆகிய விளிம்புகளில் மோதியபின் முனை Bக்குத் திரும்புகிறது. மீட்சிக் கெழு e எனில் $\tan \theta = \dfrac{e - e^3}{1 - e^3}$ என்று காட்டுக.

(15) ஒரு நிறைவற்ற மீள்சக்தியுடைய ஒரு பத்து ஒரு வட்டத்தின் பரிதியில் நான்கு இடங்களில் மோதி ஒரு வட்ட நாற்கரத்தை வரைகிறது. நாற்கரத்தின் இரு கோணங்கள் நேர்கோணங்களாகயிருக்க வேண்டுமென்றும், எறிபுள்ளி வழி ஆரையுடன் எறிதிசையின் கோணம் $\tan^{-1} (_e3/2)$ என்றும் நிறுவுக.

(16) $ABCD$ என்னும் ஒரு செவ்வக பில்லியர்ட் மேசை யின் ஒரு முனை Aயிலிருந்து ஒரு பந்து பக்கம் ABயுடன் $\propto$ கோணத்தில் எறியப்படுகிறது. அது வரிசையாக Be, AD, DC, BC ஆகிய பக்கங்களில் மோதி மீண்டும் A-யை அடைகிறது. மீளியல் குணகம் e எனில், $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{e^2 \cot \propto}{1 + e^2}$ என்று காட்டு.

(17) a நீள பக்கங்களுடைய $A\beta CD$ என்னும் சதுர மேசை யின் விளிம்புகள் உயர்த்தப்பட்டுள்ளன. e மீளமைவுக் குணக முடைய ஒரு துகள் ABயில் P-என்னும் புள்ளியிலிருந்து வீசப்படு கிறது. அது BC, CD, DA ஆகிய பக்கங்களை முறையே Q, R, S என்னும் புள்ளிகளில் மோதுகிறது. AB-யுடன் எறிதிசை PQவின் கோணம் $\propto$ ஆகும். $PB = b$; துகள் மீண்டும் Pஐ அடையு மெனில்

$$b\,(1 - e) = a\,(1 - e \cot \propto)$$

என்று காட்டுக.

(18) ஒரு மீள்சக்திக் கோளம் O என்னும் புள்ளியிலிருந்து v என்னும் திசைவேகத்துடன் கிடைத்தளத்துடன் α சாய்வில் எறியப்படுகிறது. O-விலிருந்து d தூரத்திலுள்ள ஒரு நிலைக் குத்துச் சுவரின்மீது மோதியபின் அது மீண்டும் O-ஐ அடைகிறது. மீட்சிக்கெழு e எனில்

$$d = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g} \cdot \frac{e}{1+e}$$

என்று காட்டுக.

(19) நிறைவற்ற மீள்சக்தியுடைய பந்து ஒன்று ஒரு புள்ளியிலிருந்து $\sqrt{(gh)}$ வேகத்துடன் கிடைத்தளத்துடன் α கோணச் சாய்வில் எறிபுள்ளியிலிருந்து d தூரத்திலுள்ள நிலைக்குத்துச் சுவரின்மீது மோதிப்பின் எறிபுள்ளிக்குத் திரும்புமாறு எறியப்படுகிறது. பந்துக்கும் சுவருக்குமிடையேயுள்ள மீள்சக்திக் குணகம் $\frac{d}{h \sin 2\alpha - d}$ என்று காட்டு.

(20) இரு வழவழப்பான இணையான நிலைக்குத்துச் சுவர்களுள் ஒன்றிலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து மற்றதன்மீது ஒரு பந்து இரு சுவர்களுக்கும் நிலைக்குத்தான ஒரு தளத்தில் எறியப்படுகிறது. இரு சுவர்களின்மீதும் மோதியபின் பந்து எதிர்ச்சுவரில் இரண்டாம் முறையாக எறிபுள்ளியுடன் கிடைத்தளத்திலமைகின்ற ஒரு புள்ளியில் மோதுகிறது. கிடைத்தளத்தில் பந்தின் தாராள வீச்சு R; பந்துக்கும் சுவர்களுக்குமிடையே மீளியல் குணகம் e; சுவர்களுக்கிடையேயுள்ள தூரம் d எனில் $Re^2 = d(1+e+e^2)$ என்று காட்டு.

(21) கிடைத்தளத்துடன் α கோணத்தில் ஒரு புள்ளியிலிருந்து எறியப்படும் ஒரு துகள் ஒரு வழவழப்பான நிலைக் குத்துச் சுவரின்மீது மோதிப்பின் எறிபுள்ளியை அடைகிறது. பந்து சுவரிலிருந்து துள்ளியெழும் திசை கிடைத்தளத்துடன் β கோணத்திலுள்ளன. மீளியல் குணகம் e எனில்,

$$e(1+e)\tan\beta = (1-e)\tan\alpha$$

என்று காட்டுக.

(22) கிடைத்தளத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரு துகள் ஒரு நிலைக்குத்துச் சுவரின்மீது செங்குத்தாக மோதிப்பின் துள்ளியெழும்பி, கிடைத்தளத்தில் ஒருமுறை மோதியெழும்பிய பின் எறிபுள்ளியை அடையுமாறு எறியப்படுகிறது. துகளின் மீளியல் குணகம் $\frac{1}{2}$ என்று காட்டு.

(23) h உயரமுடைய இரு இணையான நிலைக்குத்துச் சுவர்கள் ஒரு கிடைத்தளத்தின்மேல் நிற்கின்றன. ஒரு சுவரின் அடியிலிருந்து ஒரு பந்து மற்றதன்மீது எறியப்படுகிறது. அச் சுவரிலிருந்து துள்ளியெழும்பியபின் பந்து முதல் சுவரின் உச்சியை உராய்ந்து செல்கிறது. மீட்சிக்கெழு e எனில், இரண்டாவது சுவரில் மோதற்புள்ளி அதன் உச்சியிலிருந்து $\frac{h}{(1+e)^2}$ ஆழத்திலிருக்குமென்று காட்டு.

(24) கிடைத்தளத்தின் ஒரு புள்ளியிலிருந்து எறியப்படும் ஒரு பந்து கிடைத்தளத்தில் ஒருமுறை மோதி எழும்பியபின் ஒரு நிலைக்குத்துச் சுவரின்மீது நேரடியாக மோதுகிறது. சுவரிலிருந்து துள்ளியெழும்பிய பந்து கிடைத்தளத்தில் இன்னும் இரு முறை மோதியெழும்பியபின் எறிபுள்ளியை அடைகிறது. மீட்சிக்கெழு e எனில், $e = 2(1-e^3)$ என்று நிறுவுக.

(25) இரு சமமான பந்துகள் ஒரு வழவழப்பான மேசையின்மேல் தொடுகையிலிருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளன. இவற்றிற்குச் சமமான மூன்ருவது பந்து ஒன்று முன்னிரு பந்துகளின் பொதுத் தொடுகோடு வழியே நகர்ந்து அவற்றின்மீது சமச்சீராக மோதுகிறது. மீட்சிக்கெழு e எனில், மோதலின் விளைவாக இயக்க ஆற்றலில் $\frac{3}{5}(1-e^2)$ பாகம் இழக்கப்படுகிறது என்று காட்டுக.

(26) u திசைவேகத்துடன் நகர்ந்து கொண்டிருக்கும் m பொருண்மையுள்ள ஒரு வழவழப்பான பந்து ஓய்விலிருக்கும் M பொருண்மையுள்ள மற்ருெரு வழவழப்பான பந்துடன் சாய்வாக மோதுகிறது. மோதலின்போது முதற்பந்தின் திசை மையக் கோட்டுடன் α கோணத்திலுள்ளது. e என்பது பந்துகளுக்கிடையேயுள்ள மீளியல் குணகம். $\tan^2\alpha = \frac{eM - m}{M + m}$ எனில் m பொருண்மையுள்ள பந்து ஒரு நேர்கோணத்திற்குத் திசைவிலக்கமாகுமென்று காட்டு.

(27) ஒரு வழவழப்பான கோளம் ஓய்விலிருக்கும் ஒரு சம கோளத்தின்மீது சாய்வாக மோதுகிறது. மோதலுக்குமுன் முதற்கோளத்தின் திசை மோதலின்போது இரு கோளங்களின் மையக் கோட்டுடன் α கோணத்திலுள்ளது. மோதலின் விளைவாக முதற் கோளத்தின் திசையில் β கோணத்தில் விலக்கம் ஏற்பட்டால்,

$$\tan\beta = \frac{(1+e)\tan\alpha}{1-e+2\tan^2\alpha}$$

என்று காட்டுக. மீப்பெரு விலக்கம் $\sin^{-1}\sqrt{\frac{1+e}{3-e}}$ என்றும் காட்டுக. (*e* என்பது மீட்சிக்கெழு)

(28) b இடைவெளியிலுள்ள இரு இணை கோடுகளில் எதிர்த் திசைகளில் a ஆரைகளுடைய இரு சமமான வழவழப்பான கோளங்கள் நகர்ந்து கொண்டிருக்கின்றன. e என்பது அவற்றிற்கிடையேயுள்ள மீட்சிக்கெழு $(1+e)\,b^2 = 4\,a^2e$ எனில் மோதலின் விளைவாக இரு கோளங்களின் திசைகளும் நேர் கோண விலக்கங்களுக்குள்ளாகுமென்று காட்டுக.

(29) நகர்ந்து கொண்டிருக்கும் ஒரு பந்து அதே வேகத்துடன் அதன் திசைக்குச் செங்குத்துத் திசையில் நகர்ந்து கொண்டிருக்கும் மற்றொரு பந்தின்மீது மோதுகிறது. மோதலின் போது அவற்றின் மையக்கோடு இரண்டாவது பந்தின் திசைக்குச் செங்குத்தாகவுள்ளது. e என்பது மீட்சிக்கெழுவெனில், இரண்டாவது பந்தின் திசை $\tan^{-1}\left(\frac{1+e}{2}\right)$ கோணத்திற்குத் திரும்புமென்று காட்டுக.

(30) ஒரு கிடைத்தளத்தின்மீது ஒரு பந்து எந்தக் கோணத்தில் மோதினால், மோதலுக்குப்பின் அதன் திசை மோதலுக்கு முந்திய திசைக்குச் செங்குத்தாகயிருக்கும் ?

(31) ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரு கிடைத்தளத்தின்மீது எறியப்படும் e மீளியல் குணகமுடைய ஒரு பந்து ஒருமுறை மோதி எழும்புகிறது. இரண்டாவது வீச்சு மீப்பெரு உயரத்திற்குச் சமமானால், எறிகோணம் $\tan^{-1}(4e)$ என்று காட்டு.

(32) A, B, C என்னும் மூன்று கோளங்களின் பொருண்மைகள் முறையே $7m$, $7m$, m ஆகும். அவற்றின் மீளியல் குணகம் 1. அவற்றின் மையங்கள் ஒரே நேர்கோட்டிலமைந்துள்ள C-ஆனது A, Bக்கிடையேயுள்ளது. தொடக்கத்தில் A-யும் Bயும் ஓய்விலுள்ளன. C-ஆனது A-யை நோக்கி மையக் கோட்டின் வழியே நகருகிறது. அது A-யின்மீது இறு முறையும் B-யின்மீது ஒரு முறையும் மோதுமென்றும், அதன் பின்னர் அவற்றின் இறுதி வேகங்களின் விகிதங்கள் $21 : 12 : 1$ ஆகியிருக்குமென்றும் காட்டுக.

(33) m_1 பொருண்மையுள்ள ஒரு பந்து, ஓய்விலிருக்கும் m_2 பொருண்மையுள்ள மற்றொரு பந்தின்மீது மோதுகிறது.

மோதலுக்டிப்பின் m_2 பொருண்மையுள்ள பந்து ஓய்விலிருக்கும் m_3 பொருண்மையுள்ள மூன்ருவது பந்தின்மீது மோதுகிறது. மோதலுக்குப்பின் மூன்ருவது பந்தின் வேகம் முதற்பந்து முதன் முதலில் பெற்றிருந்த வேகத்திற்குச் சமமாகவுள்ளது. மூன்று பந்துகளும் முழுமை மீள்சக்தியுடையனவெனில்,

$$(m_1 + m_2)(m_2 + m_3) = 4\, m_1\, m_2$$

என்று காட்டுக.

(34) m பொருண்மையுள்ள ஒரு மீளியல்புடைய பந்து கிடைத்தளத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து u வேகத்துடன் நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கி எறியப்படுகிறது. e என்பது மீளியல் குணகமெனில், n-ஆவது துள்ளல்வரை அது கடந் துள்ள தூரம் $\frac{u^2}{g}\;\frac{1-e^{2n}}{1-e^2}$ என்று காட்டு.

(35) m_1, m_2, m_3 பொருண்மைகளுள்ள மூன்று மீள்சக்திப் பந்துகள் ஒரு கிடைத்தள மேசையின் மேல் ஒரு நேர்கோட்டி லிருக்கின்றன. m_1 பந்து m_2 பந்தை நோக்கி எறியப்படுகிறது. e என்பது மீட்சிக்கெழு.

$$(m^6 + m_2)(m_2 + m_3)\, e = m_1\, m_3\, (1+e)^2$$

எனில், m_2 ஐ மோதியபின் m_1இன் வேகமானது, m_3ஐ மோதிய பின் m_2இன் வேகத்திற்குச் சமமாகயிருக்குமென்று காட்டுக.

(36) மையக்கோட்டுடன் முறையே α_1, α_2 கோணங்களி லுள்ள திசைகளில் நகர்ந்து கொண்டிருக்கும் m_1, m_2 எனும் பொருண்மைகளுள்ள இரு பந்துகள் ஒன்றின்மீது ஒன்று மோது கின்றன. மோதலுக்குப்பின் அவற்றின் இயக்கத் திசைகள் மோதலுக்கு முன்னுள்ள திசைகளுக்குச் செங்குத்தாகயிருந்தால்,

$$e = \frac{m_1 \sin^2 \alpha_2 + m^2 \sin^2 \alpha_1}{m_1 \cos^2 \alpha_2 + m_2 \cos^2 \alpha_1}$$

என்று காட்டு.

(37) ஒரு வழவழப்பான தரையின்மேல் A, B, C என்னும் மூன்று கோளங்கள் ஒரே நேர்கோட்டின்மேல் வைக்கப்பட்டுள் ளன. A-யின் பொருண்மை B அல்லது C-யின் பொருண் மையைப் போல் இரண்டு மடங்கு. A-யானது Bயை நோக்கி u வேகத்துடன் எறியப்படுகிறது. மீளியல் குணகம் $\frac{2}{3}$ எனில், Bயால் மோதப்பட்டபின் Cயின் வேகம் $\frac{25u}{27}$ என்று காட்டு.

(38) $9m$ பொருண்மையுள்ள இரு சம கோளங்கள் ஒரு வழவழப்பான தரையின்மேல் ஓய்விலிருக்கின்றன. அதே அளவு ஆரையும் m பொருண்மையுமுள்ள மற்ருெரு கோளம் அவற்றிற்கிடையே மையக்கோட்டின் வழியே நகர்ந்து கொண்டிருக்கிறது. கோளங்கள் முழுமையான மீள்சக்தியுடையவயாயிருப்பின் அவைகளுக்கிடையே மூன்று மோதல்களிருக்குமென்று காட்டுக.

(39) n வழவழப்பான கோளங்கள் ஒரே வரிசையில் வைக்கப்பட்டுள்ளன. அவற்றுள் எந்த இரு கோளங்களுக்குமிடையேயுள்ள மீட்சிக்கெழு e ஆகும். அவற்றின் பொருண்மைகள் $\frac{1}{e}$ பொதுவிகிதமுள்ள ஒரு பெருக்குக் தொடராக அமையும். முதல் கோளம் ஏதேனுமொரு வேகத்துடன் இரண்டாவது கோளத்தின்மீது நகர்த்தப்பட்டால், அது இரண்டாவது கோளத்தை மோதி ஓய்வடைகிறது. இரண்டாவது மூன்ருவதை மோதி ஓய்வடைகிறது. இவ்வாறு ஒவ்வொறு கோளமும் அதற்கடுத்த கோளத்தின்மீது மோதி ஓய்வடைகிறது. கடைசிக் கோளத்தின் வேகம் ue^{n-1} என்று காட்டுக.

(40) A, B, C என்பன ஒரு வழவழப்பான கிடைத்தள மேசையின்மேல் ஒரு நேர்கோட்டின்மேல் வைக்கப்பட்டுள்ள முறையே m, $2m$, m பொருண்மைகளுள்ள மூன்று சிறிய வழவழப்பான கோளங்கள். A-யானது ABC நேர்கோட்டின் வழியாக u வேகத்துடன் எறியப்படுகிறது. பொதுவான மீட்சிக்கெழு $\frac{1}{2}$ எனில் B-யானது C-யின்மீது மோதியபின் A, B, C ஆகியவற்றின் வேகங்களின் விகிதம் $0 : 1 : 2$ என்று காட்டுக.

(41) e மீட்சிக்கெழுவுடைய ஒரு பந்து ஒரு நீள்வட்டத் தகட்டின் குவியத்திலிருந்து விளிம்பை நோக்கி எறியப்படுகிறது. விளிம்பில் ஒரு தடவை மோதியபின் பந்து பேரச்சின் (major axis) மறுமுனை வழியாகச் செல்கிறது. மீளமைவுக் குணகம் $\frac{2e}{1+e^2}$ஐ விட அதிகமாகயிருக்க முடியாது என்று காட்டுக.

(42) முற்றிலும் மீளசக்தியுடைய ஒரு துகள் ஒரு நீள்வட்டத்தின் குவியத்திலிருந்து ஏதோவொரு திசையில் நீள்வட்டத்தின் மேற்பரப்பின்மீது ஓரத்தை நோக்கி எறியப்படுகிறது. விளிம்பில் இரு இடங்களில் மோதியபின் அது மீண்டும் அதே குவியத்தை வந்தடையுமென்று காட்டு.

(43) கிடைத்தளத்துடன் α சாய்விலுள்ள ஒரு சாய்தளத்தின் அடியிலிருந்து நிலைத்தளத்தில் சாய்தளத்தின் மீப்பெரு சரிவுக் கோட்டின் வழியாக ஒரு துகள் எறியப்படுகிறது. துகளானது சாய்தளத்தில் மோதி nஆவது துள்ளலில் எறிபுள்ளியை அடைகிறது. சாய்தளத்துடன் எறிதிசையின் கோணம் β எனில், $(1-e)\cot\alpha\cot\beta = 1-e^n$ என்று காட்டுக.

(சென்னை எம்.ஏ. 1960, எம்.எஸ்ஸி. 1960)

(44) ஒரு பந்து ஒரு சாய்தளத்தின்மேல் துள்ளித்துள்ளிச் செல்கிறது. கிடைத்தளத்துடன் சாய்தளத்தின் சாய்வு β. சாய்தளத்துடன் எறிதிசையின் சாய்வு α n-ஆவது துள்ளலில் சாய்தளத்துடன் பந்தின் துள்ளுவேகத்தின் சாய்வு θ எனில்

$$e^n \cot\theta = \cot\alpha - 2\tan\beta \frac{1-e^n}{1-e}$$

என்று காட்டுக.

(45) கிடைத்தளத்துடன் α சாய்விலுள்ள ஒரு சாய்தளத்தின் உச்சியிலிருந்து ஒரு பந்து u வேகத்துடன் சாய்தளத்திற்குச் செங்குத்தான திசையில் எறியப்படுகிறது. பந்து துள்ளுவதுநிற்குமுன் செல்லும் தூரம் $\dfrac{2u^2 \sin\alpha}{g\cos^2\alpha\cdot(1-e)}$ என்று காட்டு.

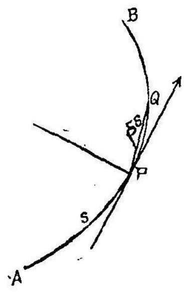
7. வளைவுப் பாதை வழி இயக்கம்
(Motion Along a Curved Path)

பல்வேறு கணங்களில் ஒரு துகளின் நிலைகள் ஒரு வளைவரையில் அமையுமெனில் அத்துகள் ஒரு வளைவுப் பாதை வழியே நகருவதாகச் சொல்லப்படும். நேர்கோட்டியக்கத்திலிருக்கும் பொருட்களின்மீது செயல்படும் விசைகளை விசைப் பிரிப்பு செய்வது போலவே, வளைவரைப் பாதையில் இயங்குகின்ற பொருட்களின்மீது பெயல்படுகின்ற விசைகளையும் இரு செங்குத்துத் திசைகளில் பின்வரும் முறைகளில் விசைப்பிரிப்பு செய்யலாம்

(i) OX, OY ஆகிய x, y அச்சுக்கள் வழியே விசைப்பிரிப்பு செய்தல் ;

(ii) வளைவரைப் பாதையின் ஏதேனுமொரு புள்ளியின் தொடுகோடு செங்கோடு வழியே விசைப்பிரிப்பு செய்தல் ;

(iii) வளைவரைப் பாதையின் ஏதேனுமொரு புள்ளியின் ஆரைத் திசையி, ஆரைத் திசையிக்குச் செங்குத்துக்கோடு ஆகியவற்றின் வழியே விசைப்பிரிப்பு செல்தல்.



படம் 79

இவ்வாறு இத்திசைகளில் பிரிக்கப்படுகின்ற விசைக்கூறுகள் இத் திசைகளில் துகள் பெற்றுள்ள முடுக்கங்களை அளவிடப் பயன்படுவதோடு, வளைவரைப் பாதை வழியே துகள் இயங்குவதற்கும் காரணமாயிருக்கும்.

வளைவுப் பாதை வழியே திசைவேகம் (Velocity along a curved path)

ABஎன்னும் வளைவரையின் வழியே ஒரு துகள் நகர்ந்து கொண்டிருப்பதாகக் கொள்க. A என்பது வளைவரையிலுள்ள ஒரு நிலையான புள்ளி. t நேரத்தில் துகள் வளைவரையின்மேல் P என்னும் புள்ளியிலும்,

$(t+\delta t)$ நேரத்தில் Q என்னும் புள்ளியிலும் இருப்பதாகக் கொள்க. வளைவு $AP = S$ என்றும், வளைவு $AQ = S + \delta S$ என்றும் கொண்டால் δt நேரத்தில் துகள் சென்றுள்ள தூரம் δS ஆகும்.

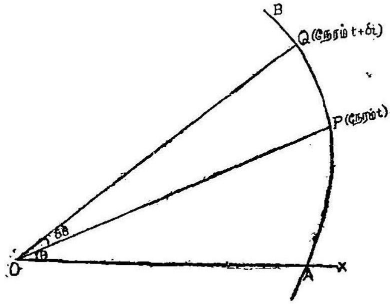
ஆகவே, δt நேரத்தில் துகளின் சராசரி வேகம் $= \dfrac{\delta S}{\delta t}$ ஆகும். இச்சராசரி வேகத்தின் திசை நாண் PQ ஆகும்.

$\delta t \rightarrow O$ ஆகும்போது P-யில் t நேரத்தின்போது துகளின் வேகம் கிடைக்கும். ஆகவே, t நேரத்தில் துகளின்வேகம் $= \underset{\delta t \rightarrow O}{\text{எல்லை}} \left(\dfrac{\delta s}{\delta t}\right) = \dfrac{ds}{dt}$ ஆகும், மேலும் $\delta t \rightarrow O$ ஆகும்போது நாண் PQ ஆனது Pயிலுள்ள தொடுகோடாக மாறிவிடுமாகையால், t நேரத்தின்போது துகளின் வேகம் P-யிலுள்ள தொடுகோட்டின் வழியே $\dfrac{ds}{dt}$ ஆகும். P-யில் வளைவரையின் செங்கோட்டு வழியே துகளின் வேகக்கூறு பூச்சியமாகும்.

சுழல்வேகம் அல்லது கோணத்திசை வேகம் (Angular velocity)

ஒரு தளத்தில் ஒரு வளைவுப்பாதை வழியே நகர்ந்து கொண்டிருக்கும் ஒரு துகளின் சுழல்வேகம் என்பது அத்தளத்திலுள்ள ஒரு நிலையான புள்ளி வழியே செல்லும் ஒரு நிலையான் நேர்கோட்டுடன் அந்நிலையான புள்ளியை நகரும் துகளின் நிலையுடன் சேர்க்கும் நேர்கோடு கொண்டுள்ள கோணத்தின் மாறுபாட்டு வீதமாகும்.

AB என்னும் வளைவரையின் வழியே ஒரு துகள் நகர்ந்து கொண்டிருப்பதாகக் கொள்க. O என்பது அவ்வளைவரையின் தளத்திலமைந்துள்ள ஒரு நிலையான புள்ளி. OX என்பது அத்தளத்தில் O வழியே செல்லும் ஒரு நிலையான நேர்கோடு. t நேரத்தில் துகள் P என்னும் நிலையிலும் $(t+\delta t)$ நேரத்தில் துகள் Q என்னும் நிலையிலுமிருப்பதாகக்



படம் 80

கொள்க. OX-உடன் OP, OQ என்னும் நேர்கோடுகள் கொண்டுள்ள கோணங்கள் முறையே θ, $\theta + \delta\theta$ என்க.

$\therefore$ δt நேரத்தில் ஏற்பட்டுள்ள கோண மாறுபாடு $= \delta\theta$ ஆகும்.

$\therefore$ கோணமாறுபாட்டு வீதம் $= \dfrac{\delta\theta}{\delta t}$

$\delta t \to O$ ஆகும்போது $Q \to P$ ஆகுமாகையால்,

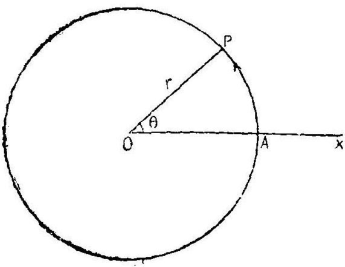
t நேரத்தில் துகளின் சுழல்வேகம் $= \underset{\delta t \to O}{\text{எல்லே}} \left(\dfrac{\delta\theta}{\delta t}\right) = \dfrac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$.

குறிப்பு: சுழல்வேகம் பொதுவாக ω (ஒமேகா) என்னும் கிரேக்க எழுத்தினுல் குறிப்பிடப்படும். $\therefore$ $\omega = \dot{\theta} = \dfrac{d\theta}{dt}$

ω என்பது ஒரு துகள் ஒரு வினுடியில் திரும்புகின்ற கோணத்தை ஆரையன் (radian) மதிப்புக்களில் குறிக்கும். ஆகவே, t வினுடிகளில் துகள் திரும்புகின்ற θ கோணம் என்பது ωt ஆரையன்களுக்குச் சமமாகும்.

வட்டப்பாதை இயக்கம் (Circular Motion)

r ஆரையுள்ள ஒரு வட்டத்தின் பரிதி வழியே ஒரு துகள் v எனும் சீரான வேகத்துடன் நகருமாஞல் வட்ட மையத்தைப் பொறுத்து அதன் சுழல்வேகம் சீராகவும் $\dfrac{v}{r}$ க்குச் சமமாகவுமிருக்கும்.



படம் 81

O என்பது வட்டப் பாதையின் மையம். P என்னும் வட்டத்தின் பரிதி வழியே v எனும் சீர்வேகத்துடன் நகருகிறது. வேகம் v சீராகயிருப்பதால், சம காலங்களில் சமவிற்களைத் துகள் கடந்து செல்லும். ஆனுல் சம விற்கள் வட்ட மையத்தில் சம கோணங்களைத் தாங்குமாகையால், துகளின் சுழல்வேகமும் சீராகயிருக்குமென்றறிகிறேம். இச்சீர் சுழல்வேகத்தை ω என்று குறிப்பிடுக.

துகளானது t நேரத்தில் A-யிலிருந்து Pக்கு நகர்ந்திருப்பதாகக் கொள்க. வில் AP மையம் O-வில் θ கோணத்தைத் தாங்குமெனில்,

$$\text{வில் } AP = r\theta \text{ ஆகும்.}$$

ஆனால் வில் $AP = v$ வேகத்துடன் t நேரத்தில் சென்றதூரம்$= vt$

$$\therefore \quad r\theta = vt$$

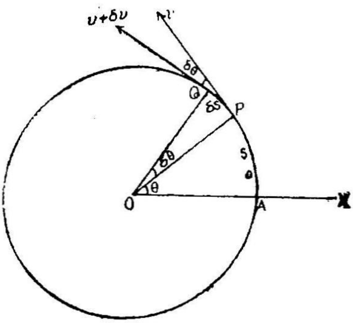
அல்லது,
$$\frac{\theta}{t} = \frac{v}{r}$$

ஆனால் சுழல்வேகம் $\omega = \dfrac{\theta}{t}$ ஆகுமாகையால் $\omega = \dfrac{v}{r}$ என்று காண்கிறோம்.

குறிப்பு : $\theta = \dfrac{v}{r} t = wt.$

தொடுகோட்டு முடுக்கமும் செங்கோட்டு முடுக்கமும் (Tangential acceleration and Normal accleration)

O-ஐ மையமாகவும், r ஆரையுமுள்ள ஒரு வட்டத்தின் பரிதி வழியே ஒரு துகள் நகர்ந்து கொண்டிருக்கிறது. தொடக்கத்தில் துகள் A யிலிருக்கிறது. t நேரத்தில் துகள் P-யில் v வேகத்துடனும், $(t + \delta t)$ நேரத்தில் Q-வில் $(v + \delta v)$ வேகத்துடனும் நகர்ந்து கொண்டிருப்பதாகக் கொள்க. OA என்னும் தொடக்கக் கோட்டுடன் OP, OQ என்னும் நேர்கோடுகள் கொண்டுள்ள கோணங்கள் முறையே, θ, $\theta + \delta\theta$ என்று கொள்க. வில் $AP = S$, வில் $AQ = S + \delta s$ எனில், வில் $PQ = \delta s$ ஆகும்.



படம் 82

மேலும் $P\hat{O}Q = \delta\theta$ ஆகையால், வில் $PQ = r\,\delta\theta$ ஆகும்.

$$\therefore \quad \delta s = r\,\delta\theta$$

$$\therefore \quad \frac{\delta s}{\delta t} = r\,\frac{\delta\theta}{\delta t}$$

அல்லது, $\lim_{\delta t \to O} \left(\frac{\delta s}{\delta t}\right) = r \lim_{\delta t \to O} \left(\frac{\delta \theta}{\delta t}\right)$ (எல்லை)

அதாவது, $\frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}$

ஆனல், $\frac{ds}{dt} = v$, $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ ஆகையால், $v = r\omega$ ஆகும்.

தொடுகோட்டு முடுக்கம் :

P-யிலுள்ள தொடுகோட்டிற்கும், Q-விலுள்ள தொடுகோட்டிற்குமிடையேயுள்ள கோணம் $= P\hat{O}Q = \delta\theta$. மேலும், P, Q ஆகிய நிலைகளில் துகளின் வேகங்களாகிய v, $(v + \delta v)$ என்பன P, Qவிலுள்ள தொடுகோடுகளின் வழியே செயல்படுமாகையால், P-யிலுள்ள தொடுகோட்டின் வழியே வேகங்களை கூறுபடுத்தினல்,

P-யின் தொடுகோடு வழியே $(t + \delta t)$ நேரத்தின் வேகக்கூறு $= (v + \delta v) \cos \delta\theta$.

P-யின் தொடுகோடு வழியே t நேரத்தின் வேகக்கூறு $= v$.

$\therefore$ P-யின் தொடுகோடு வழியே δt நேரத்தின் வேகமாறுபாடு $= (v + \delta v) \cos \delta\theta - v$.

P-யின் தொடுகோடு வழியே வேகமாறுபாட்டு வீதம்
$$= \frac{(v + \delta v) \cos\delta\theta - v}{\delta t}$$

$\therefore$ P-யில் தொடுகோட்டு முடுக்கம்

$$= \lim_{\delta t \to O} \left[\frac{(v+\delta v) \cos\delta x - v}{\delta t}\right]$$

$$= \lim_{\delta t \to O} \left[\frac{(v + \delta v)\, 1 - v}{\delta t}\right]$$

$$= \lim_{\delta t \to O} \left[\frac{\delta v}{\delta t}\right]$$

$$= \frac{dv}{dt}$$

(எல்லை = lim)

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right)$$

$$= \frac{d^2s}{dt^2}$$

செங்கோட்டு முடுக்கம்

P-யிலுள்ள செங்கோடு *PO* ஆகும். எனவே, *PO* வழியே வேகங்களைக் கூறுபடுத்தவும்.

PO வழியே $(t\ \delta t)$ நேரத்தின் வேகக்கூறு $= (v + \delta v) \sin \delta\theta$

PO வழியே t நேரத்தின் வேகக்கூறு $= O$

$\therefore$ *PO* வழியே δt நேரத்தின் வேகமாறுபாடு $= (v+\delta v)\ \text{Sin}\,\delta\theta$

PO வழியே வேகமாறுபாட்டு வீதம் $= \dfrac{(v + \delta v)\ \text{Sin}\ \delta\theta.}{\delta t}$

$\therefore$ *P*-யில் செங்கோட்டு முடுக்கம் $= \underset{\delta t \to O}{\text{எல்லை}} \left[\dfrac{(v + \delta v)\ \text{Sin}\ \delta\theta}{\delta t}\right]$

ஆனல், $\delta\theta$ மிகச் சிறியதாகையால் $\text{Sin}\ \delta\theta = \delta\theta$ (தோராயமாக)

$\therefore$ *P*யில் செங்கோட்டு முடுக்கம் $= \underset{\delta t \to O}{\text{எல்லை}} \left[\dfrac{(v+\delta v)\ \delta\theta}{\delta t}\right]$

ஆனல் $\delta t \to O$ ஆகும்போது $\delta v\ \delta\theta \to O$.

$\therefore$ *P*-யில் செங்கோட்டு முடுக்கம் $= \underset{\delta t \to O}{\text{எல்லை}} \left[\dfrac{v\ \delta\ \theta}{\delta t}\right]$

$$= v\ \frac{d\theta}{dt}$$

$$= v.\ \omega$$

$$= v.\ \frac{v}{r}$$

$$= \frac{v^2}{r}\ \text{(மையத்தை நோக்கி)}$$

குறிப்பு 1. $v = \omega r$ ஆகையால், செங்கோட்டு முடுக்கம் $= \omega^2 r$ ஆகும்.

குறிப்பு 2. ஒரு வட்டத்தின் பரிதியின் வழியே ஒரு துகள் v என்னும் மாருவேகத்துடன் நகர்ந்து கொண்டிருந்தால்,

$$\text{தொடுகோட்டு முடுக்கம்} = \frac{dv}{dt} = O \text{ ஆகும்.}$$

எனவே, மாருவேகத்துடன் ஒரு வட்டத்தின் பரிதி வழியே நகர்ந்து கொண்டிருக்கும் ஒரு துகளின் முடுக்கம் அத்துகளின் நிலைவழிச் செங்கோட்டின் வழியாகச் செயல்படும்.

குறிப்பு 4. துகளானது ஒரு வினடியில் n சுற்றுக்கள் சுற்றினல் $\omega^2 = 2\pi n$ ஆகும்.

$\therefore$ செங்கோட்டு முடுக்கம் $= \omega^2 r = 4\pi^2 n^2 r$.

குறிப்பு 5. வட்ட பாதைக்கு மட்டுமல்லாது எந்த வளை வரைப் பாதைக்கும் தொடுகோட்டு முடுக்கம் $= \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2 s}{dt^2}$ தான். ஆனல் ஏதேனுமொரு வளைவுப்பாதையில் நகர்ந்து கொண்டிருக்கும் ஒரு துகளின் செங்கோட்டு முடுக்கம் காண, மேற்கண்ட செங்கோட்டு முடுக்கச் சூத்திரத்தில் ஆரை rக்குப் பதிலாக, அத்துகளின் நிலையில் அவ்வளைவின் வளைவாரை (curvature) P-ஐப் பதிலிட வேண்டும். ஆகவே, ஏதேனுமொரு வளைவுப்பாதையில் செங்கோட்டு முடுக்கம் $= \dfrac{v^2}{p}$

குறிப்பு 6. தொடுகோட்டு முடுக்கத்தின் விளைவாகத் துகளின் திசைவேகத்தின் அளவு மாறுபடும்; செங்கோட்டு முடுக்கத்தின் விளைவாகத் துகளின் திசைவேகத்தின் திசை மாறுபடும்.

குறிப்பு 7. சீரான வேகம் v-யுடன் r ஆரையுள்ள ஒரு வட்டத்தின் பரிதியில் நகர்ந்து கொண்டிருக்கும் m பொருண்மையுள்ள ஒரு துகளின்மீது மையத்தை நோக்கிச் செயல்படும் செங்கோட்டு விசை $m \dfrac{v^2}{r} = m\omega^2 r$ ஆகும். இச் செங்கோட்டு விசையானது "மைய நோக்கு விசை" (centripetal force) எனப்படும்.

ஒரு கயிற்றின் ஒரு முனையில் ஒரு கனமான பொருளைக் கட்டி, மறுமுனையைக் கையில் பற்றி வேகமாகச் சுழற்றும்போது, அப்பொருளுக்குத் தேவையான மைய நோக்கு விசையைக் கயிற்றின் இழுவிசை அளிக்கிறது. கயிறு திடீரென அறுந்து

போயினும் பொருளானது வட்டத்தின் ஆரை வழியே (அதாவது கயிற்றின் திசை வழியே) செல்ல முயலாது வட்டத்தின் தொடு கோடு வழியேதான் தொடர்ந்து செல்லுமென்பது யாவருமறிந்த உண்மையாகும்.

வளைவான இருப்புப் பாதை வழியே திரும்புகின்ற ஒரு இரயில் வண்டிக்கு அது திரும்புவதற்கான மைய நோக்கு விசையை தண்டவாளங்களின்மீது சக்கரங்களின் அழுத்தம் அளிக்கிறது. ஒரு வளைவுத் திருப்சத்தில் திரும்புகின்ற ஒரு உந்து வண்டிக்கு அது திரும்புவதற்குத் தேவையான மைய நோக்கு விசையை சக்கரங்களுக்கும், தரைக்குமிடையேயுள்ள உராய்வுக் விசை அளிக்கிறது. சூரியனைச் சுற்றி வலம் வருகின்ற எல்லாக் கோள்களுக்கும் மையநோக்கு விசையானது கோள் களின் மீதுள்ள சூரியனின் ஈர்ப்பு விசையினுல் அளிக்கப்படு கிறது.

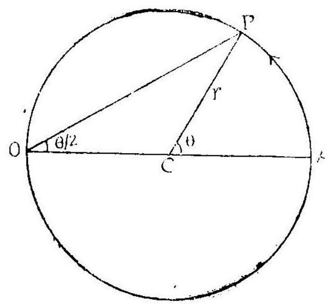
r ஆரையுள்ள ஒரு வட்டத்தின் பரிதியில் m பொருண்மை யுள்ள ஒரு துகள் v திசைவேகத்துடன் நகருவதாகக் கொள்க. துகளின்மீது வேறு எவ்வித விசையும் செயல்படவில்லையெனில் துகளானது ஒரு தொடுகோட்டின் வழியே நகர்ந்து கொண்டி ருக்க வேண்டும். ஆனுல், துகள் தொடுகோட்டின் வழியே நகர்ந்து செல்லாமல் அதனின்றும் சீரான விலக்கம் பெற்று வட்டத்தின் பரிதி வழியே நகருவதால், ஏதோ ஒரு விசை அத் துகளின்மீது செயல்படவேண்டும். மேலும் இவ்வாறு செயல் படும் விசைக்குத் தொடுகோட்டின் வழிக்கூறு பூச்சியமாக வேண்டும். ஆகவே, துகளின்மீது செயல்படும் விசை அத் துகள் வழி ஆரையின் வழியேதான் செயல்பட வேண்டும். தவிர, துகளானது தொடுகோட்டிற்கு உட்புறமாக, விலக்க மடைந்து நகர்ந்து கொண்டிருப்பதால், ஆரத்தின் வழியே செயல்படும் விசை வட்டத்தின் மையத்தை நோக்கித்தான் செயல்பட வேண்டும். எனவே, துகளானது வட்டப் பாதையில் நகருவதற்குக் காரணமான $m\frac{v^2}{r} = m\omega^2 r$ என்னும் மைய நோக்கு விசையானது, துகள் வழி ஆரையில் மையத்தின் வழியே செயல்படும். இவ்விசை F எனில், $F = \omega^2 r$ ஆகும்.

இப்பொழுது, துகள்வழி ஆரத்தில் மையத்திலிருந்து வெளி நோக்கி $m\omega^2 r$ என்னும் விசையைச் செயல்படுத்தினுல், மைய நோக்கு விசையும், அதற்குச் சமமான மையத்திலிருந்து அப்பால் செல்லும் விசையும் ஒன்றையொன்று விளைவு நீக்கம் செய்துவிடுமாகையால், துகளானது சமநிலைபெறும். இவ்வாறு

மையத்திலிருந்து ஆரத்தின் வழியே வெளிநோக்கிச் செயல்படும். விசைக்கு ''மைய விட்டோடும் விசை'' (centrifugal force) என்று பெயர்.

மாதிரி 121. ஒரு துகள் ஒரு வட்டத்தின் பரிதியில் அதன் மையத்தைப் பற்றிய எனும் சீரான சுழல்வேகத்துடன் நகருகிறது. பரிதியின் மேலுள்ள ஏதேனுமொரு புள்ளியைப்பற்றி அத்துகளின் சுழல்வேகமும் சீராகயிருப்பதோடு $\frac{1}{2}\omega$க்குச் சமமாகவுமிருக்கும் என்று காட்டுக.

தீர்வு: P என்னும் துகள் C-ஐ மையமாகவும், r-ஐ ஆரமாகவும் கொண்ட ஒரு வட்டத்தின் பரிதியில் நகர்ந்து கொண்டிருக்கிறது. O என்பது பரிதியின் மேலுள்ள ஏதேனுமொரு புள்ளி. OA என்பது O வழியே வரையப்பட்ட விட்டம். தொடக்கத்தில் துகள் A-யிலிருப்பதாகவும் t நேரத்தில் P என்னும் புள்ளியிலிருப்பதாகவும் கொள்க. $P\hat{C}A = \theta$ எனில், $P\hat{O}A = \frac{1}{2}\theta$ ஆகும். C-யைப் பொறுத்து t நேரத்தில்திரும்பியுள்ள கோணம் $= \theta$.



படம் 83

$\therefore$ C-யைப் பொறுத்துச்சுழல் வேகம் $= \dfrac{\theta}{t} = \omega$ (சீரானது)

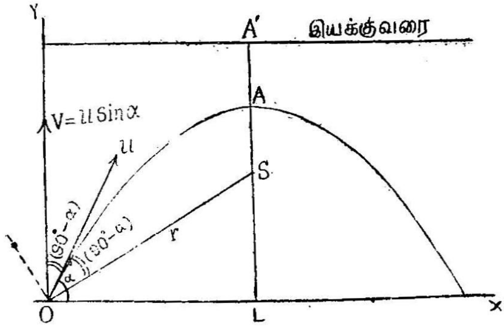
O-வைப் பொறுத்து t நேரத்தில் திரும்பிய கோணம் $= \frac{1}{2}\theta$.

$\therefore$ O-வைப் பொறுத்துச் சுழல்வேபம் $= \frac{1}{2}\dfrac{\theta}{t} = \frac{1}{2}\omega$.

ω சீரானதாகையால், O-வைப் பொறுத்த சுழல்வேகமும் சீரானதாகும்.

மாதிரி 122. ஒரு புள்ளியிலிருந்து எறியப்படும் ஒரு துகளின் திசைவேகத்தின் நிலைக்குத்துக்கூறு தரப்பட்டுள்ளது. எறிபாதையின் குவியத்தைப் பற்றித் தொடக்கச் சுழல்வேகம் எறிகோணம் 45° ஆகயிருக்கும்போது மீப்பெரிதாகயிருக்குமென்று காட்டு.

தீர்வு : எறிபாதை ஒரு பரவளைவு என்று நாமறிவோம். O என்பது எறிபுள்ளி. u என்பது எறிவேகம். α என்பது எறி



படம் 84

கோணம். S என்பது குவியம். $\therefore$ தொடக்க நிலைக்குத்து வேகம் $= u \sin \alpha$ V (என்க). A என்பது மிக உயர்ந்த புள்ளி.

$$AL = \text{அதிகபட்ச உயரம்} = \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

$$AS = \frac{1}{4}\ (\text{செவ்வகலம்}) = \frac{1}{4}\ \frac{(2u^2 \cos^2 \alpha)}{g} = \frac{u^2 \cos^2 \alpha}{2g}$$

$$\therefore\ SL = AL - AS = \frac{u^2 \sin^2 \alpha - u^2 \cos^2 \alpha}{2g} = \frac{-u^2 \cos 2\alpha}{2g}$$

$$OL = \frac{1}{2}\ (\text{வீச்சு}) = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{2g}$$

$$\therefore\ OS^2 = OL^2 + SL^2$$

$$= \frac{u^4 \sin^2 2\alpha}{4g^2} + \frac{u^4 \cos^2 2\alpha}{4g^2}$$

$$= \frac{u^4}{4g^2}$$

$$\therefore\ OS = \frac{u^2}{2g} = r\ (\text{என்க})$$

OSக்குச் செங்குத்துத் திசையில் தொடக்க வேகம் $= u \sin (90° - \alpha) = u \cos \alpha = v$ (என்க)

S-ஐப் பற்றித் தொடக்கச் சுழல்வேகம் $= \frac{v}{r}$ (சூத்திரம்)

அதாவது, $w = \frac{u \cos \alpha}{u^2/2g}$

$= \frac{2g \cos \alpha}{u}$

$= \frac{g\ 2\sin \alpha \cos \alpha}{u \sin \alpha}$

$= \frac{g \sin 2\alpha}{V}$

$\therefore$ மீப்பெரு ω-வுக்கு $\sin 2\alpha$ மீப்பெரிதாகயிருக்க வேண்டும். அதாவது, $\alpha = 45°$.

மாதிரி 123. ஒரு சமதளச் சாலையில் 160 அடி ஆரையுள்ள ஒரு வளைவில் ஒரு உந்துவண்டி பக்கவாட்டில் வழுக்கிவிடாமல் திரும்பக்கூடிய மிக அதிகபட்ச வேகத்தைக் காண்க. சக்கரங்களுக்கும் தரைக்குமிடையே உராய்வுக் குணகம் 0.2 ஆகும்.

தீர்வு : பக்கவாட்டில் வழுக்காமல் உந்து வண்டி திரும்ப வேண்டுமாயின், செங்கோட்டு விசையானது உராய்வு விசைக்குச் சமமாக வேண்டும்.

உந்துவண்டியின் பொருண்மை M எனில், சக்கரங்களுக்கும் தரைக்குமிடையில் செங்குத்தெதிர் விசை $= Mg$.

$\therefore$ உராய்வு விசை $= \mu R = 0.2\ Mg$

செங்கோட்டு விசை $= M\frac{v^2}{r} = \frac{M v^2}{160}$ ராத்தலிகள்

$$\therefore \frac{M v^2}{160} = 0.2\ Mg$$

$$\therefore v^2 = 160 \times 0.2 \times 32$$

$$= 32 \times 32$$

அல்லது, $v = 32$ அடி/வி.

உந்துவண்டியின் அதிகபட்ச வேகம் $= 32$ அடி/விநாடி.

மாதிரி 124. 10 செ.மீ. நீளமுள்ள ஒரு நூல் 20 கிராம் பொருண்மையைச் சரியாகத் தாங்கக்கூடியதாயுள்ளது. அதன்

ஒரு முனையில் 3 கிராம் பொருண்மை இணைக்கப்பட்டு, மறுமுனை நிலையாக வைக்கப்பட்டுள்ளது. இந்த 3 கிராம் பொருண்மையானது ஒரு கிடை வட்டத்தில் சீராகச் சுற்றிவந்தால், ஒரு வினாடிக்கு அது சுழலக்கூடிய மிக அதிகபட்ச சுற்றுக்களின் எண்ணிக்கை யாது?

தீர்வு: நூலின் அதிகபட்ச இழுவிசை = 20 கிராம் எடை = $20g$ டைன்கள். துகள் சுற்றும் வட்டத்தின் ஆரம் = நூலின் நீளம் = 10செ.மீ. ஒரு வினாடியில் சுற்றுகின்ற சுற்றுக்களின் எண்ணிக்கை n என்க.

$\therefore \quad \omega = 2\pi n.$

துகளின் பொருண்மை $m = 3$ கிராம்.

$\therefore$ மையநோக்கு விசை $= m\omega^2 r = 3 \times 4\pi^2 n^2 \times 10 = 120\pi^2 n^2$ டைன்கள். நூல் அறுந்து போகாமல் மீப்பெரு வேகத்துடன் துகள் சுற்றும்போது

மையநோக்கு விசை = அதிக பட்ச இழுவிசை

$$120\pi^2 n^2 = 20g.$$

$$n^2 = \frac{g}{6\pi^2}$$

$$\therefore \quad n = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{g}{6}}$$

மாதிரி **125**. ஒரு வட்ட மேசையின் மையத்திலுள்ள ஒரு துவாரத்தின் வழியே செல்லும் ஒரு கயிற்றின் ஒரு முனையில் 2 கிலோகிராம் பொருண்மை இணைக்கப்பட்டுள்ளது. மேசையின் மேலிருக்கும் அதன் மறுமுனையில் 6 கிலோகிராம் பொருண்மை இணைக்கப்பட்டுள்ளது. தொங்கிக் கொண்டிருக்கும் 2 கிலோ கிராம் பொருண்மையைச் சராசரித் தாங்கக்கூடிய வேகத்துடன் மேசையின் மேலுள்ள 6 கி.கி. பொருண்மை 60 செ.மீ. ஆரையுள்ள வட்டத்தில் சீராகச் சுற்றுகிறது. பெரிய பொருண்மையின் வேகத்தைக் காண்க.

தீர்வு: T = கயிற்றின் இழுவிசை = 2 கி.கி. எடை = $2000\,g$ டைன்கள்.

m = சுற்றுகின்ற பொருண்மை = 6 கி.கி. = 6000 கிராம்.

r = வட்டத்தின் ஆரை = 60 செ.மீ.

6 கி கி. பொருண்மையின் வேகம் v எனில், $T = \frac{mv^2}{r}$ ஆகும்.

$$\therefore \quad \frac{mv^2}{r} = 2000\,g$$

$$\frac{6000 \times v^2}{60} = 2000\,g$$

$$v^2 = \frac{2000\,g}{100}$$

$$= 20g$$

$$= 20 \times 980$$

$$\therefore \quad v = \sqrt{20 \times 980} = 140.$$

பெரிய பொருண்மையின் மீப்பெரு வேகம் = 140 செ.மீ./வி.

மாதிரி 126. ஒரு வழவழப்பான கிடைத்தள மேசையின் மேல்கிடக்கும் ஒரு நூலின் ஒரு முனையிலும் நடுப்புள்ளியிலும் முறையே $3m$, m பொருண்மைகள் இணைக்கப்பட்டு, மறுமுனை நிலையாக வைக்கப்பட்டுள்ளது. இவ்விரு பொருண்மைகளும் சீர்வேகங்களுடன் இரு வட்டங்களில் நகருமாறும் நூலின் இரு பகுதிகளும் நேராகயிருக்குமாறும் எறியப்படுகின்றன. நூலின் இரு பகுதிகளிலுமுள்ள இழுவிசைகளை ஒப்பிடுக.

தீர்வு : நூலின் முழுநீளம் $2r$ என்க.

$3m$ பொருண்மை $2r$ ஆரையுள்ள வட்டத்திலும், m பொருண்மை r ஆரையுள்ள வட்டத்திலும் நகரும்.

$$\therefore \quad \frac{3m \text{ இன் வேகம்}}{m \text{ இன் வேகம்}} = \frac{2\pi\,(2r)}{2\pi\,r} = \frac{2}{1}$$

$\therefore$ mஇன் வேகம் $= v$ எனில், $3m$இன் வேகம் $= 2v$ ஆகும்.

நூலின் இரு பகுதிகளின் இழுவிசைகளை முறையே T_1, T_2 என்க.

mஇன் மையநோக்கு விசை $= T_1 - T_2 = mv^2/r$.

$3m$ இன் வமயநோக்கு விசை $= T_2 = (3m)\,(2v)^2/2r$

$$= \frac{6\,mv^2}{r}$$

$$\therefore \quad T_1 - T_2 = \frac{mv^2}{r}$$

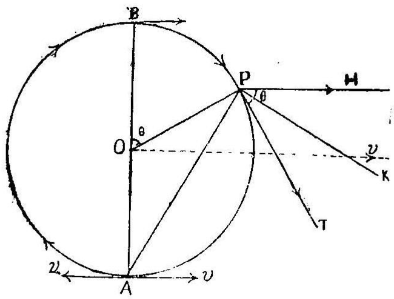
$$T_1 - \frac{6\ mv^2}{r} = \frac{mv^2}{r}$$

$$\therefore \quad T_1 = 7\ \frac{mv^2}{r}$$

$$\therefore \quad \frac{T_1}{T_2} = \frac{7\ mv^2/r}{6\ mv^2/r} = \frac{7}{6}$$

மாதிரி **127.** தரையில் வழுக்காமல் சீராக உருளுகின்ற சக்கரத்தின் விளிம்பின் பல்வேறு புள்ளிகளின் திசைவேகங்களைக் காண்க.

தீர்வு : சக்கரத்தின் மையம் O என்றும், ஆரை r என்றும் கொள்க. சக்கரம் உருண்டு செல்லும்போது மையம் ஒரு நேர் கோட்டில் (கிடைத் திசையில்) நகரும். மையத்தின் நேர் கோட்டு வேகம் v என்க. ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில் தரையுடன் தொடுகையிலுள்ள புள்ளியை A என்க.



படம் 85

விளிம்பிலுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும் சுழற்சி வேகத்துடன் உருளும் போது சக்கரத்தின் மையம் மட்டும் ஒரு நேர்கோட்டின் மேல் நகர்ந்து கொண்டிருக்கும். ஆகவே, சக்கரம் ஒரு சுற்று உருளும் போது, விளிம்பிலுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும் மையத்தைப் பொறுத்து ஒரு சுற்றளவுக்குச் சமமான தூரத்தை வரைகிறது ; அதேநேரம் மையமானது ஒரு சுற்றளவுக்குச் சமமான தூரத்தை மையவழிக் கிடைக்கோட்டின்மேல் வரைகிறது. ஆகவே, விளிம்பிலுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியின் வேகமும் அப்புள்ளியிலுள்ள தொடுகோட்டின் வழியே செயல்படுவதோடு, மையத்தைப் பொறுத்து அதன் அளவு மையவேகத்தின் அளவு v-க்குச் சமமாகயிருக்கும்.

ஆகவே, விளிம்பிலுள்ள ஏதேனுமொரு புள்ளி P-யானது ஒவ்வொன்றும் v அளவு கொண்ட இருவேகங்களைக் கொண்டி

ருக்கும் ; ஒன்று P-யிலுள்ள தொடுகோடு PT வழியே ; மற்றது P வழியே மையத்தின் திசைக்கு இணையான PH திசையில்.

தரையுடன் தொடுகையிலுள்ள A என்னும் புள்ளியில் தொடுகோட்டின் திசையும், மையம் நகருந் திசைக்கு இணையான திசையும் ஒன்றுக்கொன்று நேர் எதிராகயிருப்பதால், புள்ளி A-யின் வேகம் $= v - v = O$. ஆகவே, புள்ளி A-யானது தரையுடன் தொடுகையிலிருக்கும் அந்தக் கணப்பொழுதில் ஓய்விலிருக்கிறது.

இனி ஏதேனுமொரு கணத்தில் சக்கரத்தின் உச்சிப்புள்ளி B-றைக் கருதுக. B-யில் தொடுகோட்டின் திசையும், மையத் திசைக்கு இணையான திசையும் ஒன்ருகயிருப்பதால், B-யின் வேகம் $= v + v = 2v$ ஆகும்.

சக்கரத்தின் விளிம்பிலுள்ள ஏதேனுமொரு புள்ளி P-யானது தொடுகோடு PT வழியே v என்னும் வேகத்தையும், மையத் திசைக்கு இணையான PH திசையில் v என்னும் வேகத்தையும் பெற்றிருக்குமென்று கண்டோம்.

$TPH = \theta$ எனில், $POB = \theta$ ஆகும்.

P-யின் இரு வேகங்களின் விளைவு வேகம் TPH இன் இருசம வெட்டி வழியே செயல்படும் $2v \cos \frac{\theta}{2}$ என்னும் வேகமாகும்.

இப்பொழுது $\triangle AOP$-யில் $O\hat{A}P = O\hat{P}A = \frac{\theta}{2}$

$$\therefore \; A\hat{P}T = 90° - \frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \; A\hat{P}L = A\hat{P}T + T\hat{P}L = 90° - \frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2} = 90°$$

ஆகவே, P-யின் வேகம் APக்குச் செங்குத்துத் திசையில் $2v \cos \frac{\theta}{2}$ அளவுடையதென்று அறிகிறோம்.

A-யைப் பொறுத்து P-யின் சுழல்வேகம்

$$\frac{2v\cos\frac{\theta}{2}}{AP} = \frac{2v\cos\frac{\theta}{2}}{2r\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{v}{r}$$

= O-ஐப் பொறுத்து சக்கரத்தின் சுழல்வேகம்.

ஆகவே, சக்கரத்தின் ஒவ்வொரு புள்ளியும் தரையுடன் சக்கரத்தின் தொடுபுள்ளியைப்பற்றி $\frac{v}{r}$ என்னும் மாருச் சுழல் வேகத்துடன் சுழல்கிறதென்றறிகிரேம்.

மாதிரி 128. 3 அடி ஆரையுள்ள ஒரு வண்டிச் சக்கரம் 12மைல்/மணி வேகத்தில் நகர்ந்து கொண்டிருக்கிறது. சக்கரம் எவ்வித வழுக்கலுமின்றி உருண்டு கொண்டிருந்தால், அதன் கிடைவிட்டத்தின் இருமுனைகளிலுள்ளமுள்ள வேகங்களைக் காண்க.

இங்கு $v = 12$ மை/ம.

θ = கிடைமட்டத்திற்கும் தொடுகோட்டிற்குமிடையேயுள்ள கோணம். ஆனல் கிடைவிட்டத்தின் ஒவ்வொரு முனையிலும் தொடுகோடு நிலைக்குத்தாகயிருக்குமாகையால் $\theta = 90°$ ஆகும்.

ஆகவே, கிடைவிட்ட முனைகளில் வேகம் $= 2v\cos\frac{\theta}{2}$

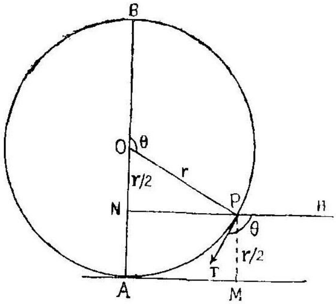
$$= 2 \times 12\cos 45°$$

$$= 2 \times 12 \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= 12\sqrt{2} \text{ மை/மணி.}$$

கிடைவிட்டத்தின் ஒரு முனை உச்சிப்புள்ளியை நோக்கி $12\sqrt{2}$ மை/மணி வேகத்துடனும், மறுமுனை உச்சிப் புள்ளியிலிருந்து விலகி $12\sqrt{2}$ மை/மணி வேகத்திலும் நகரும்.

மாதிபி 129. தரையில் உருண்டு கொண்டிருக்கும் ஒரு சக்கரத்தின் மிக உயர்ந்த புள்ளியின் வேகம் தரையிலிருந்து சக்கரத்தின் ஆரையில் பாதியளவிற்குச் சமமான உயரத்தில் விளிம்பிலுள்ள ஒரு புள்ளியின் வேகத்தைப்போல் இரு மடங்கு என்று காட்டு.



படம் 86

தீர்வு: சக்கரத்தின் வேகம் $= v$ என்க.

$\therefore$ உச்சிப்புள்ளி B-யின் வேகம் $= 2v$.

சக்கரத்தின் ஆரம் $= r$ என்க. P என்பது தரையிலிருந்து $\frac{r}{2}$ உயரத்தில் விளிம்பிலுள்ள ஒரு புள்ளி.

$\angle POB = \theta$ என்க.

$PN \perp OA$ எனில், $ON = NA$

$$= \frac{r}{2} \cos P\hat{O}N = \frac{r/2}{r} = \frac{1}{2} \quad \therefore \quad P\hat{O}N = 60^\circ \quad \therefore \quad \theta = 120^\circ$$

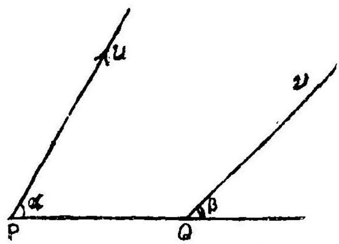
$$P\text{-யின் வேகம்} = 2v \cos \frac{\theta}{2} = 2v \cos 60^\circ = v$$

ஆகவே, B-யின் வேகமானது P-யின் வேகத்தைப்போல் இரு மடங்காகும்.

சார்கோண வேகம் அல்லது சார் சுழல்வேகம் (Relative angular velocity)

ஒரு தளத்தில் இயங்கிக் கொண்டிருக்கும் இருதுகள்களைக் கருதுக.

t எனும் நேரத்தில் இரு துகள்களின் நிலைகள் P, Q என்க. அவற்றின் திசைவேகங்கள் முறையே u, v என்றும், அவற்றின் திசைகள் PQ வுடன் முறையே α, β கோணச் சாய்வுகளிலுள்ளன என்றும் கொள்க.



படம் 87

இவ்விரு திசைவேகங்களின் PQக்குச் செங்குத்துத் திசைக்கூறுகள் முறையே $u \sin \alpha$, $v \sin \beta$ ஆகும்.

$$\therefore \quad P\text{-யைப் பொறுத்து } Q\text{-வின் சுழல்வேகம்} = \frac{v \sin \beta}{PQ}$$

ஆகவே, சுழல்வேகம் கணக்கிடப்படும்போது PQக்குச் செங்குத்தான திசைவேகப்பிரிவு மட்டுமே கணக்கிலெடுத்துக் கொள்ளப் படுகிறதென்றும் PQ வழிப்பிரிவுப் புறக்கணிக்கப்படுகிறதென்றும் காணலாம்.

இப்பொழுது P, Q ஆகிய இருதுகள்களுமே PQக்குச் செங்குத்துத் திசையில் முறையே $u \sin \alpha$, $v \sin \beta$ ஆகிய திசை வேகப் பிரிவுகளுடன் நகர்ந்து கொண்டிருப்பதால் அக்கணத்தில் P-ஐப் பொறுத்து Q-வின் சார்சுழல்வேகம்

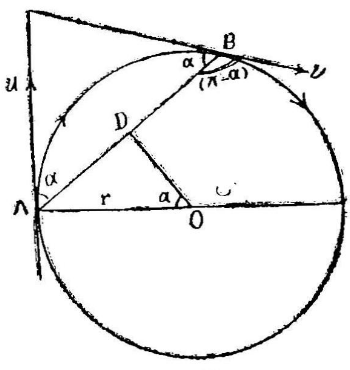
$$= \frac{(PQ\text{க்குச் செங்குத்துத் திசையில் } P\text{-ஐப் பொறுத்து } Q\text{-வின் சார்வேகம்})}{PQ}$$

$$= \frac{(v \sin \beta - u \sin \alpha)}{PQ}$$

இதுபோல், Q-ஐப் பொறுத்து P-யின் சார் சுழல்வேகம்

$$= \frac{(u \sin \alpha - v \sin \beta)}{PQ}$$

மாதிரி 130. இரு துகள்கள் ஒரு வட்டத்தின் மீது w, w^1 என்னும் சீரான சுழல்வேகங்களுடன் ஒரே முகமாக நகர்ந்து கொண்டிருக்கின்றன. அவற்றின் சார் சுழல்வேகத்தைக் காண்க.



படம் 88

தீர்வு : A, B என்னும் இரு துகள்கள் r ஆரையுள்ள ஒரு வட்டத்தின்மீது முறையே ω, ω^1 சுழல் வேகங்களுடன் நகர்ந்து கொண்டிருக்கின்றன.

t நேரத்தில் அவற்றின் நிலைகள் A, B என்க. அவற்றின் தொடுகோட்டு வழித் திசை வேகங்கள் முறையே u, v என்க. AB-யுடன் u-வின் சாய்வு α எனில், v-யின் சாய்வு $(180° - \alpha)$ ஆகும்.

$$\omega = A\text{-யின் சுழல்வேகம்} = \frac{u \sin \alpha}{AB}$$

ω^1 = B-யின் சுழல்வேகம் $= -\dfrac{v\sin(180^\circ - \alpha)}{AB} = -\dfrac{v\sin\alpha}{AB}$

∴ B-யைப் பொறுத்து A-யின் சுழல்வேகம்

$$= \frac{u\sin\alpha}{AB} - \frac{(-v\sin\alpha)}{AB}$$

$$= \frac{u\sin\alpha + v\sin\alpha}{AB}$$

$$= \frac{(u+v)\sin\alpha}{AB}$$

ஆனல், u, v என்பன r ஆரையுள்ள ஒரு வட்டத்தின் மீதுள்ள தொடுகோட்டு வேகங்களாகையாலும், w, w^1 என்பன வட்ட மையத்தைப்பற்றிய சுழல் வேகங்களாகையாலும்,

$u = rw$, $v = r\omega^1$ ஆகும்.

மேலும், $OD \perp AB$ எனில், $AB = 2AD = 2r\sin\alpha$

∴ B-யைப் பொறுத்து A-யின் சார் சுழல்வேகம்

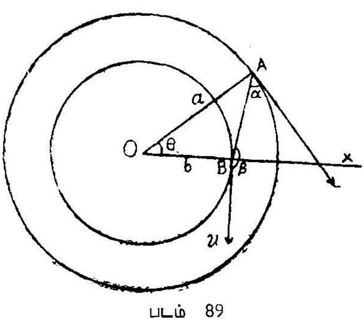
$$= \frac{(rw + r\omega^1)\sin\alpha}{2r\sin\alpha}$$

$$= \frac{(\omega + \omega^1)}{2}$$

மாதிரி **131.** a, b ஆரைகளுடைய இரு ஒரு மைய வட்டங்களின்மீது இரு துகள்கள் முறையே u, v ஆகிய திசைவேகங்களுடன் நகருகின்றன. அவற்றின் சார்கோணவேகம் மறையும் போது பொதுமையத்தில் அவை தாங்கும்கோணம் θ எனில்,

$$\cos\theta = \frac{au + bv}{av + bu}$$

என்று காட்டுக.



படம் 89

தீர்வு: சார் கோண வேகம் மறையும்போது துகள்களின் நிலைகள் A, B என்க. u v, என்பன வட்டங்களின் தொடுகோடுகளின் வழியே செயல்படுமாதலின், அவை முறையே OA, OB ஆகிய ஆரைகளுக்குச் செங்குத்தாகயிருக்கும். AB-யுடன் u, v ஆகியவற்றின் சாய்வுகள் முறையே α, β என்க.

$\angle AOB = \theta.$

$\therefore \quad \alpha = 90° - O\hat{A}B$

$\sin \alpha = \sin (90° - O\hat{A}B)$

$= \cos O\hat{A}B$

$= \dfrac{a^2 + AB^2 - b^2}{2a.\ AB}$

$= \dfrac{a^2 - b^2 + AB^2}{2a.\ AB}$

$= \dfrac{a^2 - b^2 + a^2 + b^2 - 2\ ab \cos \theta}{2a.\ AB}$

$= \dfrac{2a^2 - 2ab \cos \theta}{2a.\ AB}$

$= \dfrac{a - b \cos \theta}{AB}$

$\beta = 270° - O\hat{B}A$

$\therefore \sin\beta = \sin (270° - O\hat{B}A)$

$= - \cos OBA$

$= - \dfrac{(b^2 + AB^2 - a^2)}{2b.\ AB}$

$= - \dfrac{(b^2 + a^2 + b^2 - 2\ ab \cos - a^2)}{2b.\ AB}$

$= - \dfrac{(2b^2 - 2ab \cos \theta)}{2b.\ AB}$

$= - \dfrac{(b - a \cos \theta)}{AB}$

$\therefore$ B-யைப் பொறுத்து A-யின் சார்கோண வேகம்

$= \dfrac{u \sin \alpha - v \sin \beta}{AB} = O$ (கொடுக்கப்பட்டுள்ளது)

$\therefore \quad u \sin \alpha = v \sin \beta$

$$\frac{u\,(a-b\cos\theta)}{AB} = v\left\{-\frac{(b-a\cos\theta)}{AB}\right\}$$

அதாவது, $u\,(a-b\cos\theta) = -v\,(b-a\cos\theta)$

$$au + bv = \cos\theta\,(av + bu)$$

$$\therefore\ \cos\theta = \frac{au+bv}{av+bu}$$

மாதிரி 132. A, B என்னுமிரு கோள்கள் சூரியனைச் சுற்றி a, b ஆரையுள்ள இருவட்டப் பாதைகளில் சுற்றுகின்றன. அவற்றின் வேகங்கள் அவற்றின் இயக்கப் பாதைகளின் ஆரைகளின் வாக்குமூலங்களுக்கேற்ப மாறுபடின், அவற்தன் ஆரைகளுக்கிடையேயுள்ள கோணம் $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{ab}}{a-\sqrt{ab}+b}\right)$ ஆகயிருக்கும்போது அவற்றின் சார் சுழல்வேகம் மறைந்து அவை ஒன்றுக்கொன்று நிலையாகயிருப்பதுபோல் தோன்றுமென்று காட்டுக.

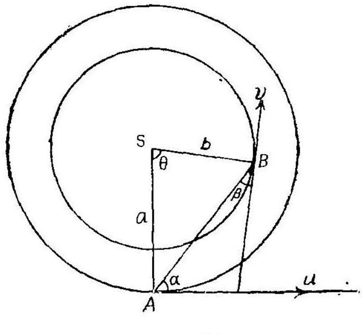
(சென்னை பி. எஸ்ஸி. 1969 ஏப்.)

தீர்வு : A, B ஏன்ற கோள்களின் திசைவேகங்கள் முறையே u, v என்று கொள்க.

k என்பது விகித சம மாறிலியெனில்,

$u = \frac{k}{\sqrt{a}}$ ஆகும். இவ்வேகங்கள் முறையே SA, SB ஆகியவற்றிற்குச் செங்குத்தாகயிருக்கும்.

AB-யுடன் u, v ஆகிய திசை வேகங்களின் சாய்வுகள் முறையே α, β என்க.



படம் 90

$\therefore$ B-யைப் பொறுத்து

A-யின் சார் சுழல்வேகம் $= \frac{u\sin\alpha - (-v\sin\beta)}{AB} = O$

$\therefore\ u\sin\alpha + v\sin\beta = O.$ ... ... (1)

ஆனல் $\sin\alpha = \sin\,(90° - S\hat{A}B)$

$$= \cos S\hat{A}B$$

$$= \frac{a^2 + AB^2 - b^2}{2a.\ AB}$$

$$= \frac{a^2+a^2+b^2-2\,ab\cos\theta - b^2}{2a.\ AB}$$

$$= \frac{2a^2 - 2ab\cos\theta}{2a.\ AB}$$

$$= \frac{a - b\cos\theta}{AB}$$

$$\sin\beta = \sin(90^\circ - S\hat{B}A)$$

$$= \cos S\hat{B}A$$

$$= \frac{b^2 + AB^2 - a^2}{2b.\ AB}$$

$$= \frac{b^2+a^2+b^2-2ab\cos\theta - a^2}{2b.\ AB}$$

$$= \frac{2b^2-2ab\cos\theta}{2b.\ AB}$$

$$= \frac{b-a\cos\theta}{AB}$$

(1) இலிருந்து,

$$\frac{k}{\sqrt{a}}\,\frac{(a-b\cos\theta)}{AB} + \frac{k}{\sqrt{b}}\,\frac{(b-a\cos\theta)}{AB} = O$$

$$\frac{a - b\cos\theta}{\sqrt{a}} + \frac{b-a\cos\theta}{\sqrt{b}} = O.$$

$$a\sqrt{b} - b\sqrt{b}\cos\theta + \sqrt{a}\,b - a\sqrt{a}\cos\theta = O.$$

$$\cos\theta\,[\,(\sqrt{a})^3 + (\sqrt{b})^3] = (a\sqrt{b} + \sqrt{a}\,b)$$

$$\cos\theta\,[\,(\sqrt{a} + \sqrt{b})\,(a - \sqrt{ab} + b) = \sqrt{ab}\,(\sqrt{a} + \sqrt{b})$$

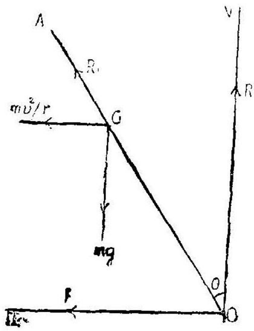
$$\cos\theta\,(a - \sqrt{ab} + b) = \sqrt{ab}$$

$$\therefore\ \cos\theta = \frac{\sqrt{ab}}{a - \sqrt{ab} + b}$$

அல்லது, $\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{ab}}{a-\sqrt{ab}+b}\right)$

வட்டப்பாதையில் மிதிவண்டியோட்டியின் இயக்கம் (Motion of a circular path)

மிதிவண்டியில் செல்லும் ஒருவன் ஒரு வட்டப் பாதை வழியே செல்லும்போது மிதிவண்டியுடன் அவனது உடலும் சேர்ந்து வட்டப் பாதையின் மையத்தை நோக்கிச் சாய்வதைக் காணலாம். இவ்வாறு மிதிவண்டியுடன் உடலும் சேர்ந்து சாய்வதால் வண்டிச் சக்கரங்களுக்கும் தரைக்குமிடையேயுள்ள நேர்குத்தெதிர்விசை R, உராய்வு விசை F ஆகியவற்றின் விளைவு விசை R_1 நிலைக்குத்தாகயில்லாமல் சற்று உட்புறமாகச் சாய்ந்திருக்கும். நிலைக்குத்துடன் இவ் விளைவு விசை R_1 இன் சாய்வு θ எனில், R_1 இன் நிலைக்குத்துக் கூறு மிதிவண்டியுடன் அவனது எடையையும் சேர்த்து ஈடு செய்கிறது ; R_1இன் கிடைக் கூறு மிதிவண்டியானது வட்டப் பாதையில் இயங்குவதற்குத் தேவையான மைய நோக்கு விசையை அளிக்கிறது.



படம் 91

OA என்பது மிதிவண்டியுடன் மிதிவண்டியோட்டின் சாய்ந்த நிலையையும், m, G என்பன முறையே மிதிவண்டியுடன் வண்டியோட்டியின் மொத்த எடையையும், அந்த மொத்த எடை செயல்படும் திணிவு மையத்தையும் குறிப்பிடுகின்றன. மிதிவண்டியின் வேகம் v என்றும், வட்டப் பாதையின் ஆரை r என்றும் கொள்க. எனவே, மையநோக்கு விசை $m\dfrac{v^2}{r}$ ஆகும்.

$$\therefore \quad R_1 \cos\theta = mg,$$

$$\sin\theta = m\frac{v^2}{r}$$

$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{v^2}{rg}$$

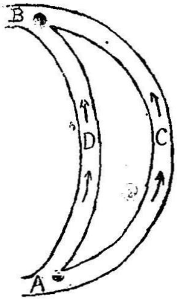
இத்தொடர்பிலிருந்து நிலைக்குத்துடன் மிதிவண்டியோட்டின் சாய்வைக் காணலாம். மேலும், v அதிகமானாலும் அல்லது r குறைந்தாலும் θ இன் மதிப்புக் கூடுமென்பது தெளிவு. ஆகவே, ஒரு வட்டப் பாதையில் மிதிவண்டியோட்டி அதிகமாகச் செல்லும்போதும் அல்லது, மிகக்குறுகிய ஆரையுள்ள வட்டப் பாதையில் திரும்பும்போதும் நிலைக்குத்துடன் மிதிவண்டியோட்டியின் சாய்வு அதிகமாகயிருக்குமென்றும், இச்சாய்வு மிகவும் அதிகமாகும்போது வண்டியோட்டி மிதிவண்டியுடன் கீழே விழ ஏதுவாகிறதென்றும் அறிந்து கொள்ளலாம்.

வட்டப் பாதையில் உந்துவண்டியின் இயக்கம் (Motion of a car on a circular path)

சமதளத்தில் ஒரு வளைவுப் பாதையில் ஒரு உந்து வண்டி திரும்பும்போது, வண்டி அவ்வாறு திரும்புவதற்குத் தேவையான மையநோக்கு விசையானது வண்டியின் சக்கரங்களுக்கும், தரைக்குமிடையேயுள்ள நேர்குத்தெதிர் விசை, உராய்வு விசை ஆகியவற்றின் விளைவு விசையால் தரப்படுகிறது. ஆனால், உராய்வு விசையானது ஒரு எல்லைக்குமேல் (எல்லை உராய்வு விசைக்குமேல்) அதிகரிக்க முடியாதென்று நாமறிவோம் (பார்க்கவும்: ''நிலையியல்—உராய்வு''). எனவே, நேர்குத்தெதிர் விசை, உராய்வு விசை ஆகியவற்றின் விளைவு விசையும் ஓர் எல்லைக்குமேல் அதிகரிக்க முடியாது. அதாவது, வண்டி திரும்ப தேவையான மைய நோக்கு விசையை அளிக்க வல்ல விளைவு விசை ஓர் எல்லைக்குமேல் அதிகரிக்க முடியாதென்பது தெளிவாகிறது. ஆகவே, ஒரு குறிப்பிட்ட எல்லைக்கும் அதிகமான வேகத்துடன் வண்டி வளைவுப் பாதையில் திரும்பினாலும் அல்லது மிகவும் குறுகலான வளைவுப் பாதையில் திருப்பினாலும் வண்டி திரும்புவதற்குத் தேவையான மைய நோக்கு விசை அளிக்கப்பட முடியாதாகையால் வண்டி கவிழக்கூடிய சாத்திய நிலையேற்படுகிறது.

ACB என்னும் வளைவுப் பாதை வழியே ஓர் உந்து வண்டி v என்னும் வேகத்துடன் சென்றால் போதிய மைய நோக்கி விசையின்றிக் கவிழ்ந்து விடுமென்று கொள்வோம். வண்டி கவிழ்வதை இருவழிகளில் தவிர்க்கலாம். ACB வளைவைவிடப் பெரிய வளைவாரையுடைய ADB என்னும் பாதை வழியே வண்டியைச் செலுத்துவதன் மூலம் வண்டி கவிழ்ந்து விடாமல் தடுப்பது ஒருவழி. ஏனெனில், ADB பாதையின் ஆரை ACB

பாதையின் ஆரையைவிட அதிகமாகயிருக்குமாகையால், வண்டியின் வளைவு இயக்கத்திற்குத் தேவையான மையநோக்கு விசையின் அளவு குறைகிறது. இக்குறைந்த அளவு மையநோக்கு விசையைத் தரக்கூடிய அளவிற்கு வண்டியின் சக்கரங்களுக்கும் தரைக்கு மிடையேயுள்ள எல்லையுராய்வு விசை போதுமானதாகயிருக்கலாம். ஆனால், ADB பாதையின் வழியே வண்டியைச் செலுத்துவது சாலைவிதியை மீறுவாதாகுமா யின் இவ்வழியைப்பின் பற்றுது, பின்வரும் முறையினைப் பயன்படுத்தி வண்டி கவிழாத வாறு ACB பாதை வழியே வண்டியைச் செலுத்தலாம்.



படம் 92

வளைவுப் பாதையின் உட்புறப் பகுதியை விட் வெளிப்புறப் பகுதி சற்று உயரமாக யிருக்குமாறு பாதையை அமைப்பதன் மூலம் வண்டி கவிழுவ தைத் தவிர்க்கலாம். ஏனெனில், பாதையின் வெளி ஓரம் சற்று உயர்ந்திருப்பதால், வண்டி திரும்பும்போது உட்புறமாகப் பாதையின் மையத்தை நோக்கிச் சற்று சரிந்த நிலையிலுருக்கு மாகையால், வண்டி திரும்புவதற்கு முன்னைவிடச் சிறிதளவு குறைவான மையநோக்கு விசை போதுமானதாகயிருக்கும்.

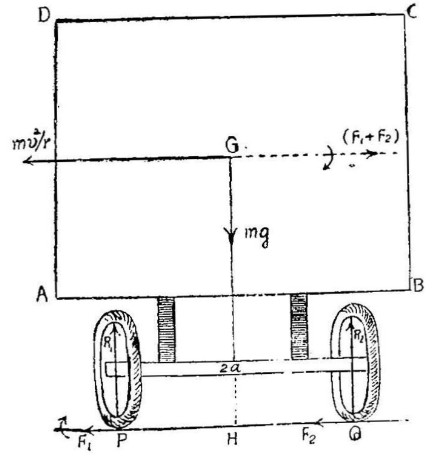
இதுபோலவே, கிடைத்தளத்திலமைந்துள்ள வளைவு இருப்புப் பாதையில் இரயில் வண்டி திரும்பும்போது, தேவை யான மையநோக்கு விசையானது வண்டியின் சக்கரங்களுக்கு உட்புறமாகப் பொருத்தப்பட்டுள்ள தட்டையான பகுதிகளின் மேல் தண்டவாளங்களின் அழுத்தங்களின் மூலம் அளிக்கப்படு கிறது. ஆகவே, அதிவேகமாகத் திரும்ப வேண்டிய வளைவு இருப்புப் பாதைகளிலும், மிகக் குறுகலான இருப்புப் பாதை வெளிப்புறமுள்ள தண்டவாளத்தைச் சற்று உயர்த்தி அமைப் பதன்மூலம் இரயில் வண்டியைக் கவிழாமல் ஓட்டிச் செல்ல முடியும்.

சமதள வளைவு இருப்புப் பாதையில் இரயில் பெட்டியின் இயக்கம் (Motion of a railway carriage along a curved level track)

G என்பது ஓர் இரயில் பெட்டியின் திணிவு மையம்; m என்பது பெட்டியின் பொருண்மை. $ABCD$ என்பது G வழியாக வும், வளைவுப் பாதையின் மையம் வழியாகவும் செல்லும் நிலைத் தளத்தில் இரயில் பெட்டியின் குறுக்கு வெட்டுப்பகுதி. P, Q

என்பன சக்கரங்கள் தண்டவாளங்களுடன் தொடுகையிலுள்ள புள்ளிகள். r வளைவாரையுள்ள பாதையில் இரயில் பெட்டி v வேகத்துடன் செல்வதாகக் கொள்க.

R_1, R_2 என்பன சக்கரங்களின்மீது தண்டவாளங்களின் அழுத்தங்களின் விளைவு நிலைக்குத்துப் பிரிவுகள் ; F_1, F என்பன



படம் 93

அவ்வழுத்தங்களின் விளைவுக் கிடைக் கூறுகள். நிலைக்குத்துக் கூறுகளின் மொத்தமாகிய $R_1 + R_2$ ஆனது பெட்டியின் எடையாகிய mg-ஐ ஈடு செய்கிறது. கிடைக்கூறுகளின் மொத்தமாகிய $F_1 + F_2$ என்பது தேவையான மையநோக்கு விசை $\frac{mv^2}{r}$ -ஐ அளிக்கிறது.

$$\therefore \quad R_1 + R_2 = mg \qquad \dots \qquad \dots \qquad (1)$$

$$F_1 + F_2 = \frac{mv^2}{r} \qquad \dots \qquad \dots \qquad (2)$$

தரையில் சக்கரங்களின் தொடுபுள்ளிகளில் செயல்படுகின்ற $(F_1 + F_2)$ என்னும் விசையானது G வழியே அவற்றிற்கு இணையான திசையில் செயல்படும் $F_1 + F_2 = \frac{mv^2}{r}$ என்னும் சமமான

விசையுடன் $[(F_1 + F_2), GH]$ என்னும் சுழலிணைக்குச் சமமா கும். (பார்க்கரும்: ''நிலையியல்—சுழலிணைகள்'') இச் சுழலிணை யானது பெட்டியை $BADC$ திசையில் திருப்ப முயலும். ஆகவே, உட்புறச் சக்கரம் P தரையின் மீதுள்ள தொடுகையினின்றும் விடுபட்டு மேல்நோக்கித் தூக்கப்பட்டு, பெட்டி Q-வைச் சுற்றி கவிழ முயலும்.

தரையிலிருந்து G-யின் உயரமாகிய $GH = h$ என்க

சக்கரங்களுக்கிடையேயுள்ள தூரம் $PQ = 2a$ என்க.

பெட்டி Q-வைச் சுற்றிக் கவிழ்வதற்குக் காரணமான சுழலிணை யின் திருப்புத்திறன்

$$(F_1 + F_2) \times GH$$

$$= \frac{mv^2}{r} \times h$$

$$= \frac{mv^2h}{r} \text{ ஆகும்.}$$

Q-ஐப் பற்றிப் பெட்டியின் எடையின் திருப்புத்திறன் மேற் கண்ட சுழலிணையின் திருப்புத் திறனுக்கு எதிராகயிருக்குமாகை யால், சுழலிணையினுல் கவிழ முயலுகின்ற பெட்டியினைக் கவிழா வண்ணம் தாங்கி நிற்கும். ஆகவே, பெட்டி கவிழாமலிருக்க வேண்டுமாயின் Q-ஐப் பற்றிப் பெட்டியின் திருப்புத்திறன் சுழலிணையின் திறனை விட அதிகமாகயிருக்க வேண்டும்.

அதாவது, $mg\,a > \dfrac{mv^2h}{r}$

அல்லது, $v^2 < \dfrac{gar}{h}$

அல்லது, $v < \sqrt{gar/h}$ எனில், பெட்டி கவிழாது.

a-ஐ அதிகமாக்கியும், h-ஐக் குறைத்தும் இச்சமனிலி (inequality) யின் சாத்தியத்தை அதிகமாக்கலாம். அதாவது சக்கரங்களுக் கிடையேயுள்ள தூரத்தை அதிகமாக்கியும், தரையிலிருந்து திணிவு மையத்தின் உயரத்தைக் குறைத்தும் வண்டி கவிழக் கூடிய அபாயத்தைக் குறைக்க முடியும். ஒரு குறிப்பிட்ட பெட்டியில் a, h என்பன மாறிலிகளாகயிருக்குமாகையால், பெட்டியின் வேகம் v-ஐக் குறைத்து, வளைவுப் பாதையின் ஆரை

r-ஐ அதிகமாக்கிப் பெட்டி கவிழ்வதைத் தடுக்கலாம். ஆகவே, திருப்பங்களில் திரும்புகையில் வேகத்தைக் குறைப்பது, குறுகலான திருப்பத்தைத் தவிர்ப்பது ஆகியவை வண்டியை ஓட்டுபவர் கவனத்திலிருத்த வேண்டிய எச்சரிக்கைக் குறிப்புகளாகும்.

இப்பொழுது G-ஐப் பற்றிய திருப்புத்திறன்கள் காண்க.

$$R_2 a - R_1 a = (F_1 + F_2) h. = \frac{mv^2}{r} h$$

அதாவது, $$R_2 - R_1 = \frac{mv^2 h}{ra}$$

மேலும், $$R_2 + R_1 = mg$$

தீர்க்கவும். $$2R_2 = m\left(g + \frac{v^2 h}{ra}\right)$$

அல்லது, $$R_2 = \frac{m}{2}\left(g + \frac{v^2 h}{ra}\right)$$

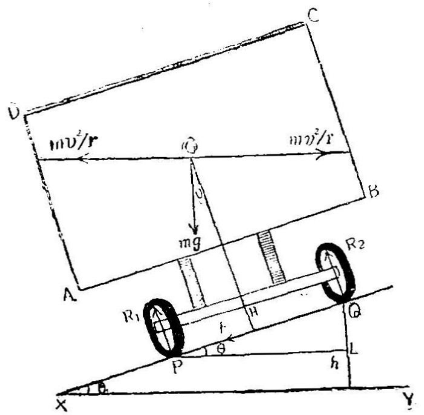
இதுபோல், $$R_1 = \frac{m}{2}\left(g - \frac{v^2 h}{ra}\right)$$

இத் தொடர்புகளிலுருந்து R_2 எப்பொழுதும் நேரடையாளமுடையதாகவே யிருக்குமென்றறிகிறோம். மேலும், v-யும் h-ம் அதிகமாக அதிகமாக, தரையுடன் வெளிச் சக்கரத்தின் அழுத்தம் அதிகமாகுமென்றுமறிகிறோம். ஆனால், v அல்லது h அதிகமாகும்போது R_1 குறையுமென்றும், $v^2 = \frac{gra}{h}$ ஆகயிருக்கும்போது $R_1 = O$ ஆகுமென்றும் காண்கிறோம். தவிர, $v^2 > \frac{gra}{h}$ எனில், $R_1 < O$ ஆகுமாகையால் தரையுடன் உட்சக்கரத்தின் தொடுகை நீங்கி, பெட்டியானது வெளிச் சக்கரத்தைச் சுற்றித் திரும்பத் தொடங்கும்.

உயர்த்தப்பட்ட பாதையில் இயக்கம் (Motion on a banked-up track)

வளைவுப் பாதையில் இரயில் பெட்டி திரும்பும்போது தண்டவாளங்களின்மீது சக்கரங்களின் அழுத்தம் பெட்டி வளைவுப் பாதையில் திரும்புவதற்குத் தேவையான மையநோக்கு

விசையை அளிக்கிறதென்று குறிப்பிட்டோம். நியூட்டனின் மூன்றுவது விதியின்படி, சக்கர விளிம்புகளின்மீது தண்டவாளங்களின் எதிரழுத்தம் செயல்படும். இவ்வழுத்தங்களின் காரணமாக, சக்கரங்களின் விளிம்புகளும், தண்டவாளங்களும் தேய்ந்து போகக்கூடிய சாத்திய மேற்படுகின்றது. பெட்டியானது வளைவுப் பாதையில் திரும்புகின்ற ஒவ்வொரு தடவையும் சக்கரங்களின் விளிம்புகளுக்கும், தண்டவாளங்களுக்குமிடையே பெருமளவில் உராய்வு ஏற்பட்டுச் சக்கரங்களும், தண்டவாளங்களும் நாளடைவில் தேய்ந்து கொண்டேயிருக்கும். இத்தேய்மானத்தைத் தவிர்க்கும் பொருட்டு வளைவுப் பாதைகள் தோறும் வெளிப்புறத் தண்டவாளம் உட்புறத் தண்டவாளத்தைவிட சிறிதளவு உயர் மட்டத்திலமைக்கப்படுவது வழக்கம். இவ்வாறு வெளிப்புறத் தண்டவாளம் உயர்த்தப்பட்ட பாதையில் பெட்டியானது ஒரு குறிப்பிட்ட வேகத்துடன் செல்லும்போது சக்கரங்களின்மீது பக்கவாட்டில் செயல்படும் அழுத்தங்கள் யாவும் தவிர்க்கப்பட்டுவிடும். அக்குறிப்பிட்ட வேகத்திற்கு அதிகமான வேகத்துடன் பெட்டி செல்லுமாயின் வெளிப்புறச் சக்கரத்தின் விளிம்பு அதிக அளவு அழுத்தத்திற்குள்ளாகும்; அக் குறிப்பிட்ட வேகத்தைவிடக் குறைவான வேகத்துடன் பெட்டி செல்லுமாயின் உட்புறச் சக்கரத்தின் விளிம்பு அதிக அளவு அழுத்தத்திற்குள்ளாகும்.



படம் 94

முன்போல், *ABCD* என்பது இரயில் பெட்டியின் குறுக்கு வெட்டுப் பகுதியையும், *G* என்பது பெட்டியின் திணிவு மையத்

தையும், P, Q என்பன சக்கரங்கள் தண்டவாளங்களைத் தொடுகின்ற புள்ளிகளையும் குறிப்பிடுவதாகக் கொள்க. பெட்டியின் பொருண்மை m என்றும், பெட்டியானது r ஆரையுள்ள வளைவுப் பாதையில் v வேகத்துடன் திரும்புவதாகக் கொள்க. தண்டவாளங்களின் மட்டம் கிடைமட்டத்திடன் θ கோணத்தில் சாய்ந்துள்ளதாகக் கொள்க. R_1, R_2 என்பன முறையே உட்புற, வெளிப்புறச் சக்கரங்களின்மீது தண்டவாளங்களின் நேர்குத்தெதிர் அழுத்தங்கள். இவ்வழுத்தங்களின் நிலைக்குத்துப் பிரிவு பெட்டியின் எடையை ஈடு செய்யும்.

$$\therefore \quad (R_1 + R_2)\cos\theta = mg \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

இவ்வழுத்தங்களின் கிடைமட்டக்கூறு பெட்டி திரும்புவதற்குத் தேவையான மையநோக்கு விசை $\frac{mv^2}{r}$-ஐக் கொடுக்கிறது.

$$\therefore \quad (R_1 + R_2)\sin\theta = \frac{mv^2}{r} \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{v^2}{rg} \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

சக்கரங்களுக்கிடையேயுள்ள தூரம் $PQ = a$ என்றும், உட்புறத் தண்டவாளத்தைவிட வெளிப்புறத் தண்டாளத்தின் உயரம் h என்றும் கொள்க.

$$\therefore \quad h = a\sin\theta.$$

ஆனல் θ மிகச் சிறியதாகையால் $\sin\theta$ ஆனது $\tan\theta$-க்குத் தோராயமாகச் சமமென்று கொள்ளலாம்.

$$\therefore \quad h = a\tan\theta = \frac{av^2}{rg}$$

இப்பொழுதி v வேகத்துடன் செல்லும்போது சக்கரங்கள் எவ்விதப்பக்கவாட்டு அழுத்தத்திற்குமுள்ளாகாதெனக் கொள்க.

பெட்டியானது இக்குறிப்பிட்ட வேகத்துடன் செல்லாமல் v_1 என்னும் வேகத்துடன் செல்வதாகக் கொள்க. எனவே, சக்கரங்களின்மீது பக்கவாட்டில் அழுத்தம் ஏற்படும். சக்கரங்களின்மீது QP திசையில் ஏற்படும் இவ்வழுத்தத்தை F என்க. கிடைமட்டத்தில் விசைப்பிரிப்பு செய்க :

$$(R_1 + R_2)\sin\theta + F\cos\theta = \frac{mv_1^2}{r} \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

நிலைக்குத்துத் திசையில் விசைப்பிரிப்பு செய்க :

$$(R_1 + R_2) \cos\theta - F \sin\theta = mg \quad \ldots \quad \ldots \quad (5)$$

$(4) \times \cos\theta - (5) \times \sin\theta$.

$$F = m\left(\frac{v_1^2}{r}\cos\theta - g\sin\theta\right)$$

$$= m\cos\theta\left(\frac{v_1^2}{r} - g\tan\theta\right)$$

$$= m\cos\theta\left(\frac{v_1^2}{r} - \frac{v^2}{r}\right)$$

$$= m\cos\theta\,\frac{(v_1^2 - v^2)}{r}$$

ஆனல், $\tan\theta = \dfrac{v^2}{r}$ ஆகையால், $\cos\theta = \dfrac{rg}{\sqrt{v^4 + r^2 g^2}}$

$$\therefore\quad F = m\,\frac{rg}{\sqrt{v^4 + r^2 g^2}}\,\frac{(v_1^2 - v^2)}{r}$$

அதாவது, பக்க அழுத்தம் $= mg\,\dfrac{v_1^2 - v^2}{\sqrt{v^4 + r^2 g^2}}$

$v_1 > v$ எனில், F நேரடையாளத்துனிருக்குமாகையால், பக்க அழுத்தம் உட்புறச் சக்கரத்தை நோக்கிச் செயல்படும். $v_1 < v$ எனில், பக்க அழுத்தம் வெளிப்புறச் சக்கரத்தை நோக்கிச் செயல்படும். முன்னதில் பக்க அழுத்தம் வெளிப்புறத் தண்டவாளத்தின் மீதுள்ள அழுத்தத்திஞலும் பின்னதில் பக்க அழுத்தம் உட்புறத் தண்டவாளத்தின் மீதுள்ள அழுத்தத்திஞலும் ஏற்படும்.

மாதிரி 133. ஒரு உந்து வண்டி ஒரு பந்தயப் பாதையில் பக்க அழுத்தத்தைச் சரிக்கட்டும் பொருட்டு உயர்த்தப்பட்ட ஓரமுடைய ஒரு திருப்பத்தில் V வேகத்துடன் திரும்புகிறது. பாதையின் பக்கச் சரிவாகிய α என்பது u என்னும் குறைவான வேகத்தின்போது பக்கவாட்டில் நழுவாமலிருக்கும் வண்ணம் அமைக்கப்பட்டுள்ளது. அதிகமானவேகம் V-யின்போது பக்கவாட்டில் நழுவுவதைத் தடுக்கக்கூடிய உராய்வுக் குணகம் குறைப்தது $\dfrac{(V^2 - u^2)\sin\alpha\cos\alpha}{V^2\sin^2\alpha + u^2\cos^2\alpha}$ ஆகயிருக்க வேண்டுமென்று காட்டுக.

தீர்வு : u வேகத்தின்போது பக்க அழுத்தத்தைத் தவிர்க்கும் சரிவு α ஆகையால்,

$$\tan \alpha = \frac{u^2}{rg} \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

ஆகும். r என்பது வளைவுப் பாதையின் வளைவாரை.

உந்துவண்டி V வேகத்துடன் திரும்பும்போது சக்கரங்களின் மீதுதரையின் எதிரழுத்தங்கள் R_1 R_2 என்றும், சக்கரங்கள் உள் நோக்கிய மொத்த உராய்வுவிசை F என்றும் கொள்க.

கிடைமட்டத்தில் விசைப் பிரிப்பு செய்க :

$$(R_1 + R_2) \sin \alpha + F \cos \alpha = m \frac{V^2}{r} \quad \dots \quad (2)$$

நிலைக்குத்துத் திசையில் விசைப் பிரிப்பு செய்க :

$$(R_1 + R_2) \cos \alpha - F \sin \alpha = mg \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

(2), (3) ஆகிய சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கவும்.

$(2) \times \cos\alpha - (3) \times \sin \alpha$:

$$F = m \frac{V^2}{r} \cos \alpha - mg \sin \alpha$$

$$= m \cos\alpha \left(\frac{V^2}{r} - g \tan \alpha \right)$$

$$= m \cos \alpha \left(\frac{V^2}{r} - g \frac{u^2}{ug} \right)$$

$$= m \cos \alpha \frac{(V^2 - u^2)}{r}$$

$(2) \times \sin \alpha + (3) \times \cos \alpha$:

$$R_1 + R_2 = m \frac{V^2}{r} \sin \alpha + mg \cos \alpha$$

$$= m \left(\frac{V^2}{r} \sin \alpha + g \cos\alpha \right)$$

$$= \frac{m}{\sin \alpha} \left(\frac{V^2}{r} \sin^2 \alpha + g \sin \alpha \cos \alpha \right)$$

$$= \frac{m}{\sin \alpha}\left(\frac{V^2}{r}\sin^2 \alpha + \frac{u^2 \cos \alpha}{r} \cos \alpha\right)$$

(1) இலிருந்து,

$$= \frac{m}{\sin \alpha}\left(\frac{V^2 \sin^2 \alpha + u^2 \cos^2 \alpha}{r}\right)$$

சக்கரங்கள் பக்கவாட்டில் நழுவாமலிருக்க $\frac{F}{(R_1 + R_2)} \leq$ உராய்வுக் குணகம் μ.

அதாவது, $\mu \geq \frac{F}{(R_1 + R_2)}$

$$\geq \frac{m \cos \alpha \frac{(V^2 - u^2)}{r}}{\frac{m}{\sin \alpha}\left(\frac{V^2 \sin^2 \alpha + u^2 \cos^2 \alpha}{r}\right)}$$

$$\geq \frac{(V^2 - u^2) \sin \alpha \cos \alpha}{V^2 \sin^2 \alpha + u^2 \cos^2 \alpha}$$

ஆகவே, μ-இன் குறைந்த பட்ச மதிப்பு $= \frac{(V^2 - u^2) \sin \alpha \cos \alpha}{V^2 \sin^2 \alpha + u^2 \cos^2 \alpha}$.

மாதிரி **134.** r ஆரையுள்ள வளைவுப் பாதையில் இரயில் வண்டிகளின் மீப்பெரு, மீச்சிறு வேகங்கள் முறையே v, u ஆகும். வளைவுப் பாதையின் வெளித்தண்டவாளம் $\tan \beta = \frac{v^2 + u^2}{2gr}$ என்ற தொடர்புக்கிணங்க β கோணச் சாய்வில் உயர்த்தப்பட்டிருந்தால், மீப்பெரு வேகத்துடன் செல்லும் இரயிலின் சக்கரங்களில் வெளிப்புறம் நோக்கிய பக்க அழுத்தம் மீச்சிறு வேகத்துடன் செல்லும் இரயிலின் சக்கரங்களில் உட்புறம் நோக்கிய பக்க அழுத்தத்திற்குச் சமமாகுமென்று காட்டு. (இரயில்கள் சம எடையுள்ளவையென்று கொள்க.)

தீர்வு: F_1, F_2 என்பன முறையே v, u வேகங்களுடன் செல்கின்ற இரயில்களின் சக்கரங்களின் மீதுள்ள வெளிப்புற, உட்புற அழுத்தங்கள் என்க.

இரயில்கள் m எனும் சம பொருண்மையுள்ளவையெனக் கொள்க. பக்க அழுத்தம் இல்லாமல் செல்லக்கூடிய வேகம் V எனில்,

$$F_1 = m \cos \beta \, \frac{(v^2 - V^2)}{r}$$

என்றும், $F_2 = m \cos \beta \, \dfrac{(V^2 - u^2)}{r}$

என்றும் நாமறிவோம்,

இவ்விரு அழுத்தங்களும் சமமாகயிருக்க வேண்டுமாயின்,

$$v^2 - V^2 = V^2 - u^2$$ ஆகயிருக்க வேண்டும்.

அதாவது, $2V^2 = v^2 + u^2$

அல்லது, $V^2 = \dfrac{v^2 + u^2}{2}$

ஆனால், V என்பது பக்க அழுத்தமில்லாமற் செல்லக்கூடிய வேகமாதலின்

$$\tan \beta = \frac{V^2}{gr}$$

என்று நாமறிவோம்.

$$\therefore \quad \tan \beta = \frac{\left(\dfrac{v^2 + u^2}{2}\right)}{gr} = \frac{v^2 + u^2}{2\,gr}$$

ஆகவே, $\tan \beta = \dfrac{v^2 + u^2}{2\,gr}$ எனில் இருபக்க அழுத்தங்களும் சமமாகயிருக்குமென்றறிகிறோம்.

மாதிரி 135. *900* கெஜம் ஆரையுள்ள ஒரு வட்ட வளைவுப் பாதையில் ஒரு இரயில் வண்டி *30* மைல்/மணி வேகத்தில் சென்று கொண்டிருக்கிறது. தண்டவாளங்களுக்கிடையேயுள்ள தூரம் *4′ 6″*; தண்டவாளங்களின்மீது பக்க அழுத்தமில்லாதிருக்க வேண்டுமாயின் வெளிப்புறத் தண்டவாளம் உட்புறத் தண்டவாளத்தைவிட எவ்வளவு உயரத்திற்கு உயர்த்தப்பட வேண்டும்?

தீர்வு : $v = 30$ மைல்/மணி $= 44$ அடி/வி.

$r = 900$ கெஜம் $= 2700$ அடி

$a =$ தண்டவாளங்களின் இடைவெளி $= 4' \, 6''$

$= \dfrac{9}{2}$ அடி. $= 54$ அங்.

கிடைமட்டத்திற்குமேல் தண்டவாள மட்டத்தின் சாய்வு θ எனில்,

$$\tan\theta = \frac{v^2}{rg} = \frac{44 \times 44}{2700 \times 32} = \frac{121}{5400}$$

$\therefore$ உட்புறத் தண்டவாளத்தைவிட வெளிப்புறத் தண்டவாளத்தின் உயரம் h எனில்,

$$h = a\sin\theta$$

$$\simeq a\tan\theta$$

$$= 54 \times \frac{121}{5400} \text{ அங்.}$$

$$= 1{\cdot}21 \text{ அங்குலம்.}$$

மாதிரி 136. மிதிவண்டி ஓட்டுபவர் ஒருவர் 60அடி ஆரையுள்ள ஒரு வளைவில் 10 மை/மணி வேகத்தில் மிதிவண்டியை ஓட்டிச் செல்கிறார். மிதிவண்டிப் பக்கவாட்டில் வழுக்காமல் செல்ல வேண்டுமாயின் நிலைக்குத்துடன் மிதிவண்டியின் நிலைக்குத்துடன் மிதிவண்டியின் சாய்வையும், குறைந்தபட்ச உராய்வுக் குணகத்தையும் காண்க.

தீர்வு : $r = 60$ அடி ; $v = 10$ மை/மணி $= 10 \times \frac{22}{15} = \frac{44}{3}$ அடி/வி.

நிலைக்குத்துடன் மிதிவண்டியின் சாய்வு θ எனில்,

$$\tan\theta = \frac{v^2}{rg} = \frac{44 \times 44}{3 \times 60 \times 32} = {\cdot}112$$

அல்லது, $\theta = \tan^{-1}(\cdot 112)$

மிதிவண்டியின்மீது தரையின் விளைவு எதிரமுத்தம் R எனில்,

நிலைக்குத்தெதிரமுத்தம் $= R\cos\theta = R_1$ என்க.

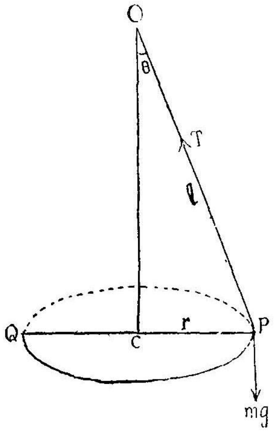
கிடைத்தள அமுத்தம் $= R\sin\theta = F$ என்க.

மிதிவண்டி பக்கவாட்டில் வழுக்காமலிருக்கத் தேவையான குறைந்தபட்ச உராய்வுக் குணகம் μ எனில்,

$$\mu = \frac{F}{R} = \frac{R\sin\theta}{R\cos\theta} = \tan\theta = {\cdot}112.$$

கூம்பூசல் (conical Pendulum)

ஒரு மெல்லிய நூலின் ஒரு முனை O என்னும் நிலையான புள்ளியில் கட்டப்பட்டுள்ளது. அதன் மறுமுனையில் ஒரு துகள் இணைக்கப்பட்டு, நூலும் துகளும் சேர்ந்து O-ஐ உச்சியாகவும் Qவழி நிலைக்குத்துக் கோட்டை அச்சாகவும் கொண்ட ஒரு கூம்பு வடிவத்தை வரையுமாறு நகர்த்தப்படுகிறது. நூலும் துகளும் சேர்ந்து ஒரு கூம்பூசலாக அமைகிறது.



படம் 95

m பொருண்மையுள்ள P என்னும் OP என்னும் நூலில் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. நூலின் மறுமுனை O என்னும் நிலையான புள்ளியில் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. துகள் P-யானது Cயை மையமாகவும், r-ஐ ஆரையாகவும் கொண்ட ஒரு கிடைத்தள வட்டத்தின்மீது நகருகிறது. நூலின் நீளம் l என்க. நிலைக்குத்துடன் நூலின் சாய்வு θ

துகளின்மீது செயல்படும் விசைகளாவன :

(i) துகளின் எடை mg நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கிச் செயல்படுகிறது.

(ii) நூலின் இழுவிசை T நூலின் வழியே PO திசையில் செயல்படுகிறது.

துகளுக்கு நிலைக்குத்தியக்கம் கிடையாதாகையால், இழுவிசையின் நிலைக்குத்துக் கூறு துகளின் எடையை ஈடு செய்யும்.

$$\therefore \quad T\cos\theta = mg \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (1)$$

இழுவிசையின் கிடைக்கூறு துகள் வட்டப் பாதையில் நகருவதற்குத் தேவையான மையநோக்கு விசையை அளிக்கிறது. துகளின் வேகம் v என்னும் சுழல்வேகம் ω என்றும் கொள்வோமானல்,

$$T\sin\theta \ \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r = m\omega^2 l\sin\theta \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2)$$

எனவே, $\sin\theta = O$ அல்லது $T = m\omega^2 l$ என்பன இச்சமன்பாட்

டின் தீர்வு ஆகும். ஆனால், $\sin\theta = O$ எனில் $\theta = O$ ஆகும் ; $\theta = O$ எனில் நூல் நிலைக்குத்தாகத் தொங்குமாகையால் கூம்பூசலாக அமைய முடியாது. எனவே $\sin\theta \neq O$.

$$\therefore\ T = m\omega^2 l \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (3)$$

சமன்பாடு (1) இலிருந்து,

$$\cos\theta = \frac{mg}{m\omega^2 l} = \frac{g}{\omega^2 l} \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (4)$$

θ-வின் மதிப்பு மெய்யாகயிருக்க வேண்டுமாயின் $\cos \not> 1$. ஆகவே, துகள் ஒரு கூம்பூசலாக நகரவேண்டுமாயின் $\frac{g}{\omega^2 l} < 1$ ஆகயிருக்க வேண்டும்.

அதாவது, $\frac{g}{\omega^2 l} < 1$

அல்லது, $\omega^2 l > g$ எனில் துகள் ஒரு கூம்பூசலாக நகரும்.

O-விலிருந்து கிடைத்தளவட்ட மையத்தின் ஆழம் h எனில், $h = l\cos\theta$.

(4) இலிருந்து, $\omega^2 = \frac{g}{l\cos\theta} = \frac{g}{h} \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (5)$

ஆகவே, கூம்பூசலின் துகளின் சுழல்வேகம் நூலின் நீளத்துடன் சார்பற்றதாகயிருக்கிறதென்றும், கூம்பூசலின் உச்சியிலிருந்து துகளின் ஆழத்தின் வர்க்க மூலத்தின் எதிர்மாறு விகிதத்திற் கேற்ப மாறுபடுமென்றும் காண்கிறோம்.

துகள் ஒரு விநாடியில் n சுற்றுக்கள் சுற்றினால், $\omega = 2\pi n$ ஆகும்.

$\therefore$ நூலின் இழுவிசை $T = m.\ 4\pi^2 n^2 l = 4mn^2\pi^2 l$.

துகள் ஒரு சுற்றுச் சுற்றுவதற்காகும் நேரம் t எனில்,

$$\omega = \frac{2\pi}{t}$$

$$\therefore\ t = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{g/h}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$$

$\therefore$ கூம்பூசலின் காலவட்டம் (Period) $= 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}}$

ஆகவே, கூம்பூசலின் காலவட்டம் அதன் நீளத்தின்மீது சார்பற்றதாகயிருக்குமென்றறிக.

குறிப்பு : கூம்பூசலின் துகளானது ஒரு வழவழப்பான கிடைத்தள மேசையின்மீது வட்டப்பாதையில் நகருமாளுல் துகளின்மீது மேசையின் நேர்குத்தெதிர் விசை R செயல்படுமாகையால் சமன்பாடு (1) பின்வருமாறு மாறுபடும்.

$$T\cos\theta + R = mg$$

$$\therefore \quad R = mg - T\cos\theta$$

$$= mg - 4\,mn^2\,\pi^2 l\cos\theta$$

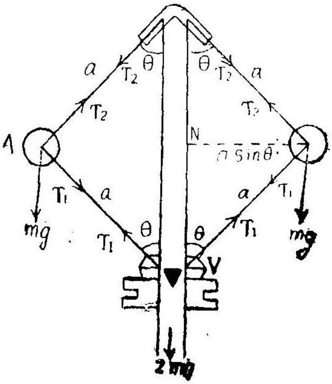
ஆகவே, துகள் மேசையின்மீது தொடர்ந்து தொடுகையிலிருக்க வேண்டுமாயின், $R \geq O$ ஆகயிருக்க வேண்டுமாதலால், $g \geq 4\,n^2\,\pi^2 l\cos\theta$ என்ற நிபந்தனையைப் பெறுகிரேம்.

நீராவி இயத்திரத்தின் வேகக் கட்டுப்பாட்டுப் பொறி (Governor of steam Engine)

பழைய அமைப்புடன் கூடிய நீராவி இயந்திரங்களில் வேகத்தைக் கட்டுப்படுத்தும் பொருட்டுக் கட்டுப்பாட்டுப் பொறியொன்று பொருத்தப்பட்டிருக்கும். இக் கட்டுப்பாட்டுப் பொறியானது கூம்பூசலின் தத்துவத்தின் அடிப்படையில் அமைக்கப்பட்டுள்ளது. கூம்பூசலில் சுழல்வேகம் $\omega = \sqrt{g/h}$ என்று கண்டோம். அதாவது, சுழல்வேகம் அதிகமாகும்போது நிலைப்புள்ளியிலிருந்து துகளின் செங்குத்துயரம் குறைந்து கொண்டேபோகும். சுழல்வேகம் குறையக் குறைய துகளின் செங்குத்துயரம் அதிகரிக்கும். இத்தத்துவமே நீராவி இயந்திரத்தின் வேகக் கட்டுப்பாட்டுப் பொறியின் இயக்கத்தின் அடிப்படையாகும்.

A, B என்னும் இரு கனமான, சிறிய சமகோளங்கள் O என்னும் நிலையான புள்ளியில் வழவழப்பாகப் பிணைக்கப்பட்டுள்ள இரு கோல்களின் முனைகளில் பொருத்தப்பட்டுள்ளன. OO' என்பது நீராவி இயந்திரத்திளுல் சுழற்றப்படுகின்ற ஒரு நிலைக்குத்துச் சுழலச்சுத் தண்டு. இத் தண்டின் மீது மேலும் கீழுமாக நகரக்கூடிய V என்னும் ஒரு வழவழப்பான A, B ஆகிய இரு கோளங்களும் வேறு இரு கோல்களால் இணைக்கப்பட்டுள்

ளன. நான்கு கோல்களும் சம நீளமுள்ளவையாயும், புறக்கணிக்கத்தக்க அளவில் எடை யுள்ளதாகவுமிருக்கும். இவற்றின் சமநீளம் a என்று கொள்வோம். தண்டின்மீது நகரக் கூடிய வளையத்தின் எடையானது ஒவ்வொரு பந்தின் எடையைப் போன்றும் இரு மடங்கு இருக்கும். இவ்வளையத்துடன் ஒரு கவாடம் (Valve) இணைக்கப்பட்டிருக்கும். வளையம் மேல்நோக்கி நகரும்போது இக்கவாடம் மூடிக்கொள்ளக் கூடியதாகவும், வளையம் கீழே இறங்கினால் கவாடம் திறந்து கொள்ளக் கூடியதாகவும் இக் கவாடம் அமைக்கப்பட்டிருக்கும். சுழலச்சு சுழலும்போது,



படம் 96

இரு கோளங்களும் O-ஐ நிலைப் புள்ளியாகவும் OV-ஐ நிலைக்குத்து அச்சாகவும் கொண்டு கிடைத்தள வட்டமாகச் சுழலுமாகையால் அவை கூம்பூசல்களாக அமைகின்றன. சுழலச்சுத் தண்டின் சுழல்வேகம் அதிகரிக்கும்போது கோளங்களின் சுழல் வேகம் அதிகரிப்பதால் கூம்பூசல் தத்துவப்படி O-விலிருந்து அவற்றின் நிலைக்குத்துயரம் குறையும். ஆகவே, கோளங்களிரண்டும் மேல்நோக்கி உயர்த்தப்படுகின்றன. இதன் காரணமாக வளையம் மேல்நோக்கி நகர்ந்து கவாடத்தை மூடிக் கொள்ளுமாகையால் இயந்திரத்திற்கு நீராவி செல்வது நின்று தண்டின் சுழல்வேகம் குறைக்கப்படுகிறது. இவ்வாறு தண்டின் சுழல்வேகம் குறைக்கப்பட்டதும் கோளங்களின் சுழல் வேகமும் குறைந்துவிடுமாதலின், O-விலிருந்து அவற்றின் நிலைக்குத்துயரம் அதிகமாகும். எனவே, தண்டிலுள்ள வளையம் கீழ்நோக்கி இறங்கி, கவாடம் திறந்து நீராவியானது இயந்திரத்திற்குள் தாராளமாகச் செல்ல வழிசெய்யும். இயந்திரத்திற்குள் நீராவி அதிகமாகச் செல்வதால் சுழலச்சு மீண்டும் வேகமாகச் சுழலத் தொடங்கும். இவ்வாறு, சுழலச்சின் வேகம் அதிகமாகும்போது தானாகவே குறைக்கப்படுவதாலும், குறையும்போது தானாகவே அதிகரிக்கப்படுவதாலும், இயந்திரமானது ஒரே சீரான வேகத்துடன் சுழன்று கொண்டிருக்க முடிகிறது.

இப்பொழுது ஒவ்வொரு கோளத்தின் பொருண்மையும் m என்றும், தண்டில் நகருகின்ற வளையத்தின் பொருண்மை $2m$ என்றும் கொள்க.

தண்டு சீரான வேகத்துடன் சுழன்று கொண்டிருக்கும் போது கீழேயுள்ள இரு கோல்களின்மீதும் செயல்படுகின்ற இழு விசைகள் T_1 என்றும், மேலேயுள்ள கோல்களின்மீது செயல் படுகின்ற இழுவிசைகள் T_2 என்றும் கொள்க; தண்டுடன் இக் கோல்களின் அப்போதைய சாய்வு θ என்றும், கோளங்களின் சீரான சுழல்வேகம் ω என்றும் கொள்க.

கோளங்கள் சீரான சுழல்வேகத்துடன் சுழல்வதால் அவை ஒரே கிடைத்தள வட்டத்தின்மீது சுற்றிக் கொண்டிருக்கும். எனவே, தண்டிலுள்ள வளையமானது மேலும் கீழும் நகராமல் சுழன்று கொண்டிருக்கும். அதாவது, வளையத்திற்கு நிலைக் குத்தியக்கம் கிடையாதாகையால், VA, VB ஆகிய கோல்களின் இழுவிசைகளின் நிலைக்குத்துக் கூறுகள் வளையத்தின் எடை யாகிய $2mg$-யைத் தாங்க வேண்டும்.

$$\therefore \quad 2T_1 \cos\theta = 2mg$$

அல்லது, $$T_1 = mg \sec \theta \qquad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

கோளங்களுக்கும் நிலைக்குத்தியக்கம் கிடையாதாகையால்,

$$T_2 \cos \theta = T_1 \cos \theta + mg$$

அல்லது, $$T_2 \cos\theta - T_1 \cos\theta = mg$$

அல்லது, $$T_2 - T_1 = mg \sec\theta \qquad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

மேலும் A, B ஆகிய கோளங்களிரண்டும் $BN = a \sin\theta$ ஆரை யுடைய கிடைத்தள வட்டத்தின்மீது சுற்றி வருவதால், அவை சுற்றுவதற்கான $m\omega^2\, BN$ என்னும் மையநோக்கு விசையை $T_1 \sin\theta + T_2 \sin\theta$ என்னும் கிடைத்தள இழுவிசைப் பிரிவுகளின் மொத்தம் அளிக்கும்.

$$\therefore \quad T_1 \sin \theta + T_2 \sin\theta = m\omega^2\, BN = m\omega^2 a \sin \theta$$

அல்லது, $$T_1 + T_2 = m\omega^2 a \qquad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

(2), (3) ஆகிய சமன்பாடுகளிலிருந்து,

$$2T_1 = m\omega^2 a - mg \sec\theta.$$

$\therefore$ (1) இலிருந்து,

$$2\, mg \sec\theta = m\omega^2 a - mg \sec \theta$$

$$3\, mg \sec\theta = m\omega^2 a$$

$$\sec\theta = \frac{\omega^2 a}{3g}$$

அல்லது, $\cos\theta = \dfrac{3g}{\omega^2 a}$

ஆனல் $\cos\theta < 1$ ஆகையால், $\omega^2 a > 3g$ ஆகயிருந்தால் மட்டுமே மேற்கண்ட இயக்கம் சாத்தியமாகும். ஆகவே, இந் நிபந்தனைக்கிணங்க இப்பொறியினை அமைத்து இயந்திரத்தின் வேகத்தை ஒரே சீராகக் கட்டுப்படுத்தலாம்.

மாதிரி 137. ஒரு கூம்பின் நீளம் 4 அடி ; அதன் ஊசற் குண்டு 8 ராத்தல் எடையுள்ளது. நூலின் அறுந்துபோகும் இழுவிசை 75 ராத்தல். ஊசல் ஒரு நிமிடத்தில் சுழலக்கூடிய மிக அதிகமான சுற்றுக்கள் எத்தனையென்று காண்க.

தீர்வு : $l = 4$ அடி ; $m = 8$ ராத்; $T = 75$ ராத்தல் எடை $= 75 \times 32$ ராத்தலிகள். ஒரு வினாடியில் சுற்றும் சுற்றுக்களின் எண்ணிக்கை n என்க.

$$\therefore \quad T = 4mn^2\pi^2 l.$$

$$75 \times 32 = 4 \times 8 \times n^2\pi^2 \times 4$$

$$n^2 = \frac{75 \times 32}{4 \times 8 \times 4 \times \pi^2} = \frac{75}{4\pi^2}.$$

$$n = \frac{5\sqrt{3}}{2\pi}$$

$\therefore$ ஒரு நிமிடத்தில் சுற்றும் சுற்றுக்களின் எண்ணிக்கை $= 60 \times \dfrac{5\sqrt{3}}{2\pi} = \dfrac{150\sqrt{3}}{\pi}$

மாதிரி 138. ஒரு கூம்பூசலின் 10 அடி நீளக் கயிறு 10 ராத்தல் எடையைச் சரியாகத் தாங்கவல்லது. ஊசற் குண்டின் எடை 4 ராத்தல்களெனில், கயிறு அது சுழலக்கூடிய வேகத்தையும், அதன் சுற்று வட்டத்தின் ஆரையையும் காண்க.

தீர்வு: $t = 10$ அடி ; $m = 4$; $T = 10$ ராத். எடை 10×32 ராத்தலிகள். $T = m\omega^2 l$ என்னும் சூத்திரத்திலிருந்து,

$$4\omega^2 \times 10 = 10 \times 32$$

அல்லது, $\omega^2 = 8$

$$\omega^2 = 2\sqrt{2}$$

இப்பொழுது, $\cos\theta = \dfrac{g}{\omega^2 l} = \dfrac{32}{8 \times 10} = \dfrac{2}{5}$

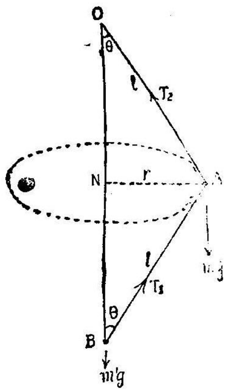
$$\therefore \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

$$r = l\sin\theta = 10 \times \frac{\sqrt{21}}{5} = 2\sqrt{21}$$

ஊசற்குண்டின் சுற்று வட்ட ஆரை $= 2\sqrt{21}$ அடி.

ஊசற்குண்டின் வேகம் $v = r\omega = \sqrt{21} \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{42}$ அடி/வி.

மாதிரி 139. $2l$ நீளமுள்ள ஒரு மெல்லிய நூலின் நடுப் புள்ளியில் m பொருண்மையுள்ள ஒரு துகள் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. நூலின் ஒரு முனை ஒரு நிலையான புள்ளியில் கட்டப்பட்டுள்ளது. அந் நிலையான புள்ளி வழியே செல்லும் ஒரு நிலைக் குத்துக் கோலில் நகரக்கூடிய m' பொருண்மையுள்ள ஒரு சிறு வளையத்துடன் நூலின் மறுமுனை இணைக்கப்பட்டுள்ளது. நூலின் நடுவிலுள்ள துகள் ω எனும் சீரான சுழல்வேகத்துடன் ஒரு கிடைத்தள வட்டத்தை வரைந்தால் நிலைக்குத்துடன் நூலின் இருபகுதிகளின் சாய்வும் $\cos^{-1}\dfrac{(m+2m')}{m\omega^2 l}g$ என்று காட்டுக.



படம் 97

தீர்வு : OAB என்னும் $2l$ நூலின் ஒரு முனை O என்னும் நிலையான புள்ளியில் கட்டப்பட்டுள்ளது. அதன் மறு முனையில் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. B என்னும் சிறுவளையம் OB என்னும் நிலைக் குத்துக் கோலில் நகரக் கூடியது. A என்பது நூலின் நடுப்புள்ளி. A-யில் m பொருண்மையுள்ள ஒரு துகள் கட்டப்பட்டுள்ளது. இத்துகள் கிடைத்தள வட்டமாகச் சுழல்கின்றது. $OA = AB = l$. ஆகையால் $\angle AOB = \angle OBA = \theta$ என்க.

துகளின் சுற்று வட்ட ஆரை r என்றும், AB, AO ஆகிய பகுதி நூற்களின் இழுவிசைகளும் T_1 T_2 என்றும் கொள்க.

வளையத்தின் எடை $m'g$யானது T_1 இன் நிலைக்குத்துப் பிரிவினால் தாங்கப்படுகிறது.

$$\therefore \quad T_1\cos\theta = mg' \qquad \dots \qquad \dots \qquad (1)$$

வளையத்தின் எடையும், துகளின் எடையும் சேர்ந்து T_2-இன் நிலைக்குத்துப் பிரிவினால் தாங்கப்படுகிறது.

$$\therefore \quad T_2 \cos\theta = (m + m')g \qquad \dots \qquad \dots \qquad (2)$$

துகளின் மையநோக்கு விசையாகிய $m\omega^2 r$ என்பது T_1, T_2 ஆகிய இரு இழு விசைகளின் கிடைப் பிரிவுகளினால் அளிக்கப் படுகிறது.

$$\therefore \quad (T_1 + T_2)\sin\theta = m\omega^2 r$$

$$= m\omega^2 l \sin\theta$$

$$\therefore \quad T_1 + T_2 = m\omega^2 l \qquad \dots \qquad \dots \qquad (3)$$

(1), (2) ஆகிய சமன்பாடுகளிலிருந்து,

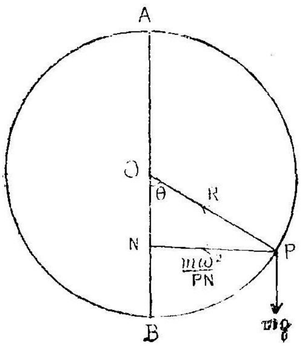
$$(T_1 + T_2)\cos\theta = (m + 2m')g$$

$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{(m+2m')}{T_1 + T_2}\,g$$

$$= \frac{(m+2m')}{m\omega^2 l}\,g$$

அல்லது, $\theta = \cos^{-1}\left\{\dfrac{(m+2m')}{m\omega^2 l}\,g\right\}$

சுழலும் வட்டக் கம்பி அல்லது உள்ளீடற்ற கோளத்தில் ஒரு சார்பமைதி (Relative rest on a circular wire or inside a a hollow sphere)



படம் 98

உள்ளீடற்ற கோளமொன்று அதன் நிலைக்குத்து விட்டத்தை அச்சாகக் கொண்டு ω எனும் சீரான சுழல் வேகத்துடன் சுற்றுகிறது, கோளத்தின் உட் பரப்பின்மீது வைக்கப்பட்ட துக ளின் சார்பமைதி நிலைகளை காணல் :

O-ஐ மையமாகக் கொண்ட உள்ளீடற்ற கோளம் ஒன்று AB என்னும் நிலைக்குத்து விட் டத்தை அச்சாகக் கொண்டு ω எனும் சுழல் வேகத்துடன் சுற்றுகிறது. m பொருண்மை

யுள்ள துகளொன்று கோளத்தினுள் P என்னும் புள்ளியில் சார்பமைதியுடனிருக்கிறது. நிலைக்குத்து விட்டத்துடன் ஆரை OP-யின் சாய்வு θ என்றும் கோளத்தின் ஆரை a என்றும் கொள்க. $PN \perp AB$ எனில்,

$$PN = a \sin \theta \text{ ஆகும்.}$$

ஆகவே, துகள் P-யானது N-ஐ மையமாகவும், $PN=a \sin \theta$-ஐ ஆரையாகவும் கொண்ட வட்டத்தின்மீது சுழலும். ஆகவே, PN திசையில் துகளின் மைய நோக்கு விசை $m\omega^2 PN = m\omega^2 a \sin \theta$ ஆகும். துகளின்மீது செயல்படும் விசைகளாவன :

(i) நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கிச் செயல்படும் துகளின் எடை mg.

(ii) PO வழியே செயல்படும் கோளத்தின் நேர்குத்தெதிர் விசை R. இவ்விசைகள் தாம் துகளின் சுழற்சிக்குக் காரணமான மையநோக்கு விசையை அளிக்கின்றன.

துகளுக்கு நிலைக்குத்துவேகம் கிடையாதாகையால்,

$$R \cos \theta = mg \qquad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

R-இன் கிடைப்பிரிவு மைய நோக்கு விசையை அளிப்பதால்,

$$R \sin \theta = m\omega^2 a \sin \theta \qquad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

(2) இலிருந்து, $\sin \theta = O$ அல்லது $R = m\omega^2 a$ என்று காண்கிறோம். ஆனால் $\sin \theta = O$ எனில், $\theta = O$ அல்லது π. ஆகவே, துகளானது மிகத் தாழ்ந்த புள்ளி B-யிலும், மிக உயர்ந்த புள்ளி A-யிலும் இருக்கும்போது சார்பமைதியுடனிருக்கும். இவ்வாறு சார்பமைதியிலிருக்கும்போது $R = mg$.

$\sin \theta \neq O$ எனில், $R = m\omega^2 a$

$$\therefore \quad \cos \theta = \frac{mg}{R} = \frac{mg}{m\omega^2 a} = \frac{g}{\omega^2 a}$$

அல்லது, $$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{g}{\omega^2 a}\right)$$

ஆகவே, நிலைக்குத்து விட்டத்துடன் $\cos^{-1}(g/\omega^2 a)$ கோணத்தைக் கொண்டுள்ள ஆரையானது கோளத்தைச் சந்திக்கும் புள்ளியில் துகளானது சார்பமைதியுடனிருக்கும்.

θ-வின் மதிப்பு மெய்யாகயிருக்க வேண்டுமாயின் $\cos\theta < 1$ ஆகயிருக்கவேண்டும். அதாவது, $\dfrac{g}{\omega^2 a} < 1$

அல்லது, $\omega^2 > \dfrac{g}{a}$

அல்லது, $\omega > \sqrt{g/a}$

ஆகவே, $\omega < \sqrt{g/a}$ எனில், நிலைக்குத்துடன் $\cos^{-1}\left(\dfrac{g}{\omega^2 a}\right)$ கோணத்தைக் கொண்டுள்ள ஆரையானது கோளத்தைச் சந்திக்கும் புள்ளியானது துகள் சார்பமைதியுடன் இருக்கத்தக்க நிலையாகும்.

$\omega < \sqrt{g/a}$ எனில், துகள் சார்பமைதியுடன் இருக்கக்கூடிய நிலைகள் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியும், மிக உயர்ந்த புள்ளியும் மட்டுமேயாகும். துகளானது சார்பமைதியுடன் இருக்கக் கூடிய சாய்வு நிலை சாத்தியமாயின் அது ஒன்று மட்டுமே உறுதியான சார்பமைதி நிலையாகும். இவ்வாறு சாய்வான சார்பமைதி நிலை சாத்தியமில்லாத போழ்து, மிகத் தாழ்ந்த புள்ளி உறுதிச் சார்பமைதி நிலையாகும்; மிக உயர்ந்த புள்ளி உறுதியற்ற சார்பமைதி நிலையாகும்.

இதுபோல் சுழலும் வட்ட வடிவமான கம்பி அல்லது குழாய் ஒன்றில் ஒரு குன்றிமணியின் சார்பமைதி நிலைகளிம் மேற்கூறப் பட்டவாறே காணலாம்.

புவியீர்ப்பின்மீது பூமியின் சுழற்சியின் விளைவு (Effect of Earth's rotation on gravity)

பூமியானது சுழலாமல் நிலையாகயிருக்குமாயின், பூமியின் மேற்பரப்பில் ஓய்விலிருக்கின்ற m பொருண்மையுள்ள ஒரு துகளின் எடையானது பூமியின் மேற்பரப்பின் நேர்குத்தெதிர் விசையினுல் தாங்கப்படும்.

ஆகவே, பொருளின்மீது பூமியின் நேர்குத்தெதிர் விசை $= mg$ அதாவது, பொருளின் தோற்ற எடை $= mg$.

பூமியின் துருவங்களில் சுழற்சியேது மிருக்காதாகையால், துருவத்தில் ஓய்விலிருக்கும் ஒரு பொருளின் எடையானது அதன்மீது பூமியின் எதிரமுத்தத்திற்குச் சமமாகும். நிலநடுக் கோட்டிலுள்ள ஒரு பொருள் பூமியின் சுழற்சி வேகத்துடன் தானும் சுழல்வதால் அதன் எடையில் சிறு வித்தியாசம் காணப்படும்.

பூமி தன்னைத்தானே ஒருமுறை சுற்றும் காலம் 23 மணி 56 நிமிடம் 4 விஞடிகள் கொண்ட ஒரு மீள்வழி நாள் (sidereal

day) ஆகும். நிலநடுக் கோட்டில் பூமியின் ஆரை 4000 மைல்கள் என்றும், புவியீர்ப்பு முடுக்கம் 32 அடி/(விஞடி)^2 என்றும், ஒரு மீள்வழி நாள் 86,400 விஞடிகள் என்றும் கொண்டு,

$$86{,}400 \times \omega = 2\pi$$

அல்லது, $$\omega = \frac{2\pi}{86{,}400}$$

என்றும், $$\frac{\omega^2 r}{g} = \frac{4\pi^2 \times 4000 \times 5280}{86{,}400 \times 86{,}400 \times 32} = \frac{1}{290}$$

(தோராயமாக)

என்றும் காணலாம்,

நிலநடுக்கோட்டிலுள்ள பொருளின் உண்மையான எடை

பூமியை r ஆரையுள்ள ஒரு கோளமென்றும், நில நடுக் கோட்டுத் தளத்திற்குச் செங்குத்து விட்டத்தை அச்சாகக் கொண்டு ஒரு மீன் வழிநாளில் ஒரு சுற்று வீதம் அது தன்னைத் தானே சுற்றி வருகிறதென்றும் கருதுக. நிலநடுக்கோட்டில் பூமியின் மேற்பரப்பில் ஓய்விலிருக்கும் m பொருண்மையுள்ள ஒரு பொருளின்மீது பின்வரும் இருவிசைகள் செயல்படுகின்றன.

(i) பூமியின் மையத்தை நோக்கிச் செயல்படும் அதன் எடை mg

(ii) ஆரை வழியே வெளிநோக்கிச் செயல்படும் பூமியின் எதிர்விசை R.

ஆனல் பொருளானது பூமியுடன் சேர்ந்து ω என்னும் சுழல் வேகத்துடன் சுழன்று r ஆரையுள்ள வட்டத்தை வரைவதால், மேற்கண்ட விசைகள் அப்பொருளின் சுழல் வேகத்திற்குத் தேவையான மையநோக்கு விசையை அளிக்கின்றன. மேலும், பொருளானது நிலநடுக் கோட்டிலமைந்திருப்பதால், அதன் மையநோக்கு விசையும் அப்பொருளின் வழியே செல்லும் பூமியின் ஆரை வழியே உள்நோக்கிச் செயல்படும்.

$$\therefore \quad mg - R = m\omega^2 r$$

$$\therefore \quad R = mg - m\omega^2 r$$

$$= mg - \frac{\omega^2 r}{g} mg$$

$$= mg - \left(1 - \frac{\omega^2 r}{g}\right)$$

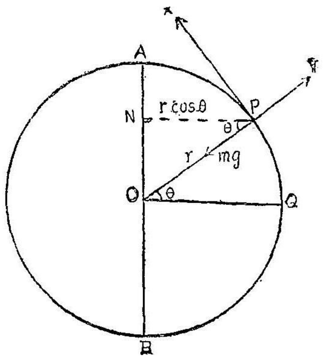
$$= mg\left(1 - \frac{1}{290}\right)$$

அதாவது, பொருளின் உண்மையான எடை $= mg - \frac{1}{290}\ mg$

அதாவது, நில நடுக்கோட்டிலுள்ள ஒரு பொருளின் உண்மை யான எடையானது அதன் தோற்ற எடையைவிட, தோற்ற எடையில் $\frac{1}{290}$ பாகம் குறைவாகயிருக்கும்.

θ அட்சரேகை (latitude)யிலுள்ள ஒரு பொருளின் உண்மையான எடை

AOB என்பது பூமியின் சுழலச்சு. P என்பது பூமியின் மேற் பரப்பில் θ அட்சரேகையிலுள்ள ஒரு புள்ளி. APB என்பது P-யின் உச்சிவட்டம்.



படம் 99

P-யிலுள்ள m பொருண்மை யுள்ள ஒரு பொருளின் எடை mg ஆனது, பூமியின் மையத்தை நோக்கிச் செயல்படும். அப் பொருளின்மீது பூமியின் எதி ரழுத்தத்தின் அப்புள்ளி வழித் தொடுகோடு, ஆரை ஆகிய திசை வழிப் பிரிவுகள் முறையே X, Y என்க.

$PN \perp AB$ எனில், P பூமி யின் சுழற்சி காரணமாக P ஆனது N-ஐ மையமாகவும், $PN = r \cos\theta$ஐ ஆரையாகவும் கொண்ட ஒரு வட்டத்தின்மீது சுற்றும். ஆகவே, பொருளின் இச் சுழச்சிக்குத் தேவையான மைய நோக்குவிசை $m\omega^2 r\cos\theta$ ஆகும். இம் மையநோக்கு விசை PN-ஐ நோக்கிச் செயல்படும்.

$$\therefore\quad X\sin\theta - Y\cos\theta + mg\cos\theta = m\omega^2 r\cos\theta$$

அதாவது, $X\sin\theta - Y\cos\theta = m\cos\theta\,(\omega^2 r - g$ ... (1)

PN-க்குச் செங்குத்துத் திசையில் பொருளுக்கு இயக்கம் கிடையாது.

$$\therefore\quad X\cos\theta + Y\sin\theta = mg\sin\theta \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

(1), (2) ஆகிய சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கவும்.

(1) × sin θ + (2) × cos θ :

$$X = m\omega^2 r \sin\theta\cos\theta = mg\frac{\omega^2 r}{g}\sin\theta\cos\theta$$

(2) × sin θ — (1) × cos θ :

$$Y = mg - m\omega^2 r\cos^2\theta = mg - mg\frac{\omega^2 r}{g}\cos^2\theta.$$

∴ பொருளின்மீது விளைவு எதிரழுத்தம் $= \sqrt{X^2 + Y^2}$

$$= mg\left[\left(\frac{\omega^2 r}{g}\sin\theta\cos\theta\right)^2 + \left(1 - \frac{\omega^2 r}{g}\cos^2\theta\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= mg\left[1 - \frac{\omega^2 r}{g}\cos^2\theta\right] \text{ (தோராயமாக)}$$

(ஈருறுப்புப் பரவல் முறையில் விரித்து $\frac{\omega^2 r}{g}$ யின் வர்க்கமும் அதற்கு மேற்பட்ட அடுக்குகளும் புறக்கணிக்கப்பட்டபின்)

ஆகவே, பொருளின் உண்மையான எடை

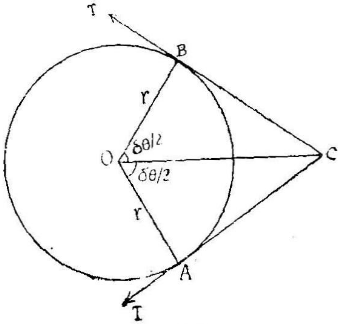
$$= mg\left[1 - \left[\frac{\omega^2 r}{g}\cos^2\theta\right]\right]$$

$$= mg - mg\frac{\omega^2 r}{g}\cos^2\theta$$

$$= mg - mg\frac{1}{290}\cos\theta \text{ (தோராயமாக)}$$

அதாவது, பொருளின் உண்மையான எடையானது அதன் தோற்ற எடையைவிட, தோற்ற எடையில் $\frac{1}{290}\cos\theta$ பாகம் குறைவாகயிருக்கும்.

சுழலும் வட்டக் கம்பியின் இழுவிசை (Tension in a rotating wire)



படம் 100

ஒரு வட்டமான கம்பி அதன் மையத்தின் வழியே அதன் தளத்திற்குச் செங்குத்தான அச்சின்மீது அதன் தளத்திலேயே சீராகச் சுழலுவதாகக் கொள்க. வட்டத்தின் மையம் O என்றும், ஆரை r என்றும் கொள்க. மையத்தில் $\delta\theta$ என்னும் மிகச் சிறிய கோணத்தைத் தாங்கக்கூடிய δs நீளமுள்ள AB என்னும் சிறுபகுதிக் கம்பியைக் கருதுக. ஒரு அலகு நீளக் கம்பியின் பொருண்மை m எனில், AB-யின் பொருண்மை $m\ \delta s = mr\ \delta\theta$ ஆகும். இவ்விற்பகுதியானது r ஆரையுள்ள வட்டப் பாதையில் சுழலுவதால், சுழல்வேகம் ω எனில், அதன் சுழற்சிக்குத் தேவையான மையநோக்கு விசையாகிய $(mr\ \delta\theta)\ \omega^2 r = m\omega^2\ r^2\ \delta\theta$ என்பது A, B ஆகிய புள்ளிகளின் தொடுகோடுகளின் வழியே செயல்படும் T, T என்னும் இழுவிசைகளால் அளிக்கப்படுகின்றன. A, B-யிலுள்ள தொடுகோடுகள் C-யில்சந்திக்குமெனில் $\hat{ACB} = (180° - \delta\theta)$ ஆகும்.

CO வழியே இவ்விரு இழுவிசைகளின் பிரிவுகள் $T \sin \frac{\delta\theta}{2}$ $T \sin \frac{\delta\theta}{2}$. ஆகையால் இவற்றின் விளைவு CO வருயே $2T \sin \frac{\delta\theta}{2}$ ஆகும். $\frac{\delta\theta}{2}$ மிகவும் சிறியதாகையால் $\sin\frac{\delta\theta}{2} = \frac{\delta\theta}{2}$ (தோராயமாக)

$$\therefore\ CO \text{ வழியே விளைவு இழுவிசை} = 2T\,\frac{\delta\theta}{2} = T.\ \delta\theta$$

ஆகும்.

$$\therefore\ T.\ \delta\theta = m\omega^2\ r^2\ \delta\theta$$

அல்லது, $T = m\omega^2 r^2$

$= mv^2$, $v = \omega r =$ கம்பியின் தொடுகோட்டு வேகம்.

$$\therefore\ \text{சுழல்வேகம் } \omega = \sqrt{\frac{T}{mr^2}}$$

பொதுவாக, ஒரு கம்பியின் மீப்பெரு இழுவிசை அதன் ஒரு அலகுக் குறுக்குவெட்டின் இழுவிசையாகும். ஆகவே, கம்பியின் மீப்பெரு இழுவிசை T_M என்று குறிப்பிடின்,

அதன் மீப்பெரு சுழல்வேகம் $\sqrt{\dfrac{T_M}{mr^2}}$ ஆகும்.

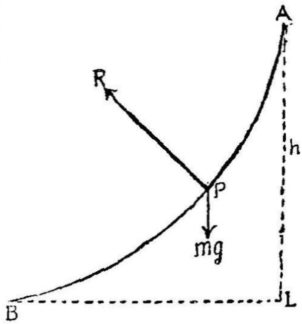
இப்பொழுது, கம்பியின் குறுக்குவெட்டு A என்றும், ஒரு அலகுப் பரப்பளவிற்கு மீப்பெரும் இழுவிசை T_o என்றும், கம்பியின் அடர்த்தி P என்றும் குறிப்பிடப்படின், $m = PA$, $T_M = T_o A$ ஆகும்.

$$\therefore \quad \frac{T_M}{mr^2} = \frac{T_o \cdot A}{PA \cdot r^2} = \frac{T_o}{Pr^2}$$

ஆகவே, மீப்பெரு சுழல்வேகம் $= \sqrt{\dfrac{T_o}{Pr^2}}$ இது கம்பியின் குறுக்கு வெட்டைச் சாராதிருப்பதைக் கவனிக்கவும்.

நிலைக்குத்துத் தளத்தில் வழவழப்பான வளைவரை வழி இயக்கம் (Motion along a smooth curve in a vertical plane)

ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் அமைந்துள்ள AB என்னும் வழவழப்பான வளைவரையின் வழியே A-யிலிருந்து m பொருண்மையுள்ள ஒரு துகள் கீழ்முகமாக u வேகத்துடன் நழுவுகிறது. B-யில் அத்துகளின் வேகம் v என்று கொள்வோம். P-என்பது அதன் பாதையில் ஏதேனுமொரு நிலை. P-யில் துகளின் மீது செயல்படும் விசைகள் நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கிச் செயல்படும் அதன் எடை mgயும், P-யில் வரையின் செங்கோட்டு வழியே செயல்படும் வளைவரையும் நேர்குத்தெதிர் விசை R-ம் ஆகும்.



படம் 101

துகளானது A-யிலிருந்து P-க்கு வரும்வரை அதன் எடை mg செய்யும் வேலை $mg \times A$யிலிருந்து P-யின் ஆழமாகும். நேர்குத்தெதிர் விசை R-ஆனது துகளின் திசைக்குச் செங்குத்தாகயிருப்பதால், R-ஆல் செய்யப்படும் வேலை பூச்சியமாகும். ஆகவே, துகளானது B-யை அடையும்போது செய்யப்படும் மொத்த வேலையானது அதன் எடையினால் செய்யப்படும்

வேலைக்குச் சமமாகும். ஆனால் B-யில் துகளின் எடையினால் செய்யப்படும் வேலையானது $mg \times A$-யிலிருந்து B-யின் நிலைக் குத்து ஆழம் $= mgh$ என்க.

துகள் A-யிலிருந்து u வேகத்துடன் நகரத் தொடங்கி B-யை v வேகத்துடன் வந்தடைவதால், இயக்க ஆற்றல் மாறுபாடு $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mu^2$ ஆகும். ஆகவே, இயக்க ஆற்றல் விதிப்படி,

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mu^2 = mgh$$

அல்லது, $v^2 = u^2 + 2gh$ ஆகும்.

குறிப்பு: துகளானது A-யிலிருந்து B-க்குக் கீழ்முகமாக u வேகத்துடன் நகருவதற்குப் பதிலாக B-யிலிருந்து u வேகத்துடன் மேல்முகமாக எறியப்பட்டு B-யை u வேகத்துடன் அடையுமெனிற்,

$$v^2 = u^2 - 2gh$$

ஆகும். இம்மாதிரியான ஏறியக்கத்தின்போது துகள் ஏறக் கூடிய மீப்பெரு உயரம் h_1 எனில், துகள் மீப்பெரு உயரத்தை அடையும்போது அதன் பூச்சியமாகிவிடுமாகையால், $h_1 = \frac{u^2}{2g}$ ஆகும். இந்த மீப்பெரு உயரமானது, துகளின் தொடக்க வேகத்தை மட்டுமே சார்ந்திருக்குமாகையால் துகளின் பாதை எவ்வாறு இருப்பினும், அதன் இயக்கம் எப்படியிருந்த போதிலும் h_1 உயரத்திற்குச் சென்றதும் அதன் வேகம் மறைந்துவிடும். மேலும், துகளானது ஓய்விலிருந்து கீழ்முகமாக நழுவுமேயானால், $u = O$ ஆகுமாகையால் அதன் தொடக்குப் புள்ளியுடன் கிடை மட்டத்திலிருக்கும் புள்ளியில் துகள் ஓய்வு நிலைக்குவரும்.

வழவழப்பான நிலைக்குத்து வட்டத்தில் வெளிப்புற இயக்கம் (Motion on the outside of a smooth vertical circle)

O-ஐ மையமாகவும், r-ஐ ஆரையாகவும் கொண்ட ஒரு வழவழப்பான நிலைக்குத்து வட்டத்தின் மிக உயர்ந்த புள்ளி A-யிலிருந்து m பொருண்மையுள்ள துகள் ஒன்று வெளிப்புறமாக ஓய்விலிருந்து நழுவுகிறது. அதன் பாதையில் P என்னும் நிலையைக் கருதுக. $A\hat{O}P = \theta$ என்க.

துகளின்மீது செயல்படும் விசைகளாவன:

(i) நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கிச் செயல்படும் அதன் எடை mg.

(ii) OP வழியே வெளிநோக்கிச் செயல்படும் வட்டத்தின் நேர்குத்தெதிர் விசை R. P-யில் அதன்வேகம் v எனில்,

$v^2 = 2gh$, h = A-யிலிருந்து P-யின் நிலைக்குத்துயரம் என்று இதற்கு முந்திய பகுதியில் கண்டோம்.

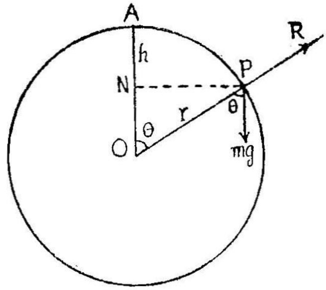
ஆனால், $h = AN$

$= OA - ON$

$= r - r\cos\theta$

$= r(1-\cos\theta)$

$\therefore\ v^2 = 2gr(1-\cos\theta)$



படம் 102

P-யின்மீது செயல்படும் விசைகளின் PO திசைப் பிரிவு $mg\cos\theta - R$ ஆகும். இவ் விசைப் பிரிவே P-யின் வட்ட இயக்கத்திற்குக் காரணமான மையநோக்கு விசை $\dfrac{mv^2}{r}$-ஐ அளிக்கிறது.

$$\therefore\ m\frac{v^2}{r} = mg\cos\theta - R$$

$$\therefore\ R = mg\cos\theta - m\frac{v^2}{r}$$

$$= mg\cos\theta - 2mg(1-\cos\theta)$$

$$= mg(3\cos\theta - 2)$$

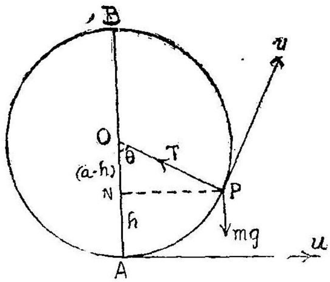
ஆகவே, $\cos\theta\ \frac{2}{3}$ எனில் R மறைகிறது. அதன்பின் $\cos\theta < \frac{2}{3}$ ஆகும்போது R எதிரடையாளம் பெறுகிறது. ஆகவே, துகளானது வட்டப் பாதையைவிட்டுப் பிரிந்து ஒரு பரவளைவுப் பாதையில் இயங்கத் தொடங்கும். துகள் பாதையை விட்டுப் பிரியும்போது $\cos\theta = \frac{2}{3}$ ஆகையால் $v^2 = 2gr(1 - \frac{2}{3}) = \dfrac{2gr}{3}$.

ஆகவே, துகளானது வட்டப் பாதையை விட்டுப் பிரிந்து $\sqrt{2gr/3}$ வேகத்துடன் ஒரு பரவளைவுப் பாதையில் இயங்கத் தொடங்கும். துகள் வட்டப் பாதையைவிட்டுப் பிரியும்போது வட்டத்தின் உச்சிப் புள்ளியிலிருந்து அது இறங்கியுள்ள நிலைக்குத்துயரம் $= r - r\cos\theta = r - \dfrac{2r}{3} = \dfrac{r}{3}$ ஆகும்.

தொங்கவிடப்பட்ட ஒரு துகளின் நிலைக்குத்து வட்ட இயக்கம் (Motion of a suspended particle in a vertical circle)

m பொருண்மையுள்ள ஒரு துகள் a நீளமுள்ள AO என்னும் இலேசான, நீளியல்பற்ற நூலின் ஒருமுனை A-யில் கட்டப் பட்டுள்ளது. நூலின் மறுமுனை O ஆனது நிலையாக வைக்கப் பட்டுள்ளது. இப்பொழுது துகளானது u வேகத்துடன் OA-க்குச் செங்குத்தான திசையில் எறியப்படுகிறது. துகளின் இயக்கத்தை ஆராய்தல் :

துகளானது நூலிற்குச் செங்குத்தாக எறியப்படுவதாலும், நூலின் மறுமுனை நிலையாக வைக்கப்பட்டுள்ளதாலும் நூலின் நீளம் a-ஐ ஆரமாகவும், நிலையான முனையை மையமாகவும் கொண்ட வட்டமான பாதையில் துகள் இயங்கும். அதன் தொடக்கவேகம் u-ஆதுன வட்டப் பாதையில் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியாகிய A-யில் வட்டத்தின் தொடுகோட்டுத் திசையிலிருக்கும். B என்பது வட்டப் பாதையின் மிக உயர்ந்த புள்ளி.



படம் 103

t நேரத்தில் துகள் P என்னும் நிலையில் இருப்பதாகக் கொள்க. $A\hat{O}P = \theta$ என்றும், மிகத் தாழ்ந்த புள்ளி A-யிலிருந்ன P-யின் நிலைக்குத்துயரம் h என்றும், P-யில் துகளின் வேகம் v என்றும், நூலின் மையநோக்கு இழுவிசை T என்றும் கொள்க.

P-யில் துகளின் இயக்க ஆற்றல் மாறுபாடு $= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mu^2$.

P நிலைவரை துகளினுல் செய்யப்பட்ட வேலை $= -mgh$.

ஆற்றல் தத்துவப்படி,

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mu^2 = -mgh$$

அல்லது, $v^2 = u^2 - 2gh$

ஆனுல், $h = AN = OA - ON = a - a\cos\theta = a(1-\cos\theta)$

$$\therefore \quad v^2 = u^2 - 2ga(1-\cos\theta) \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

இச்சமன்பாட்டிலிருந்து எந்த நிலையிலும் துகளின் வேகத்தைப் பெறலாம்.

P-யில் துகளின்மீது செயல்படும் விசைகளாவன :

(i) நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கிச் செயல்படும் அதன் எடை mg.

(ii) PO திசையில் செயல்படும் நூலின் இழுவிசை T.

ஆகவே, PO திசையில் விளைவுவிசை $= T - mg\cos\theta$.

இவ்விளைவு விசைதான் துகள் வட்டப் பாதையில் நகருவதற்குத் தேவையான மையநோக்கு விசை $\frac{mv^2}{a}$-ஐத் தருவதால்,

$$T - mg\cos\theta = m\,\frac{v^2}{a}$$

$$= \frac{m}{a}\,(u^2 - 2gh)$$

$$\therefore\quad T = mg\cos\theta + \frac{m}{a}\,(u^2 - 2gh)$$

$$= mg\,\frac{(a-h)}{a} + \frac{m}{a}\,(u^2 - 2gh)$$

$$= \frac{m}{a}\,[g\,(a-h) + u^2 - 2gh]$$

$$= \frac{m}{a}\,[u^2 + g\,(a - 3h] \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (2)$$

இச்சமன்பாட்டிலிருந்து துகளின் எந்த நிலையிலும் நூலின் இழுவிசையைப் பெறலாம். (1), (2) ஆகிய சமன்பாடுகளிலிருந்து, h அதிகமாகும்போது v, T ஆகியவை குறையுமென்று தெரிகிறது. வட்டத்தின் மிக உயர்ந்த புள்ளி B-யைத் துகளடையும்போது h ஆனது அதன் மீப்பெரு மதிப்பு $2a$யைப் பெறுமாகையால் v, T ஆகியவற்றின் மீச்சிறு மதிப்புக்களாகிய v_B, T_B ஆகியவற்றை $h = 2a$ என்று பிரதியிட்டுப் பெறலாம்.

எனவே, B-யில் துகளின் மீச்சிறு வேகம்

$$v_B = \sqrt{u^2 - 2g\,(2a)} = \sqrt{u^2 - 4ga}$$

B-யில் நூலின் மீச்சிறு இழுவிசை $T_B = \frac{m}{a}\,[u^2 + g\,(a - 6a)]$

$$= \frac{m}{a}\,[u^2 - 5ga]$$

வகை (i) துகளானது முழுமையாகச் சுற்ற வேண்டுமாயின் துகளின் பாதையில் எந்த நிலையிலும் v-யும் T-யும் மறையக் கூடாது. v மறையுமெனில், துகள் மேற்கொண்டு வட்டப் பாதையின்மேல் ஏருது நின்றுவிடும். T மறைந்தாலும் எதி ரடையாளம் பெற்றுலும் துகளானது வட்ட பாதையில் சுழல முடியாமல் பாதையைவிட்டு விலகிவிடும். ஆகவே, v, T ஆகிய வற்றின் மீச்சிறு மதிப்புகளாகிய v_B , T_B ஆகியவை மறையா விடில் மேற்கூறப்பட்ட நிபந்தனைகள் யாவும் நிறைவேற்றப்படு மாகையால், துகள் முழுமையாக வட்டத்தைச் சுற்ற வேண்டிய நிபந்தனைகள் $v_B > O, T_B > O$ ஆகும்.

அதாவது, $u^2 - 4ga > O, u^2 - 5\,ga > O$

அதாவது, $u^2 > 4\,ga, u^2 < 5ga.$

அதாவது, $u^2 > 5ga$ எனில் துகள் வட்டப் பாதையை முழுமையாகச் சுற்றிவரும்.

$u^2 = 5ga$ எனில், B-யில் நூலின் இழுவிசை சரியாக மறை வதால், துகளானது வட்டப் பாதையை மிகக் குறைந்த வேகத்துடன் முழுமையாகச் சுற்றிவரும்.

வகை (ii) $u^2 < 5ga$ எனில் துகளானது மிகத் தாழ்ந்த புள்ளி A-யை அலைவு மையமாகக் கொண்டு அலைவு இயக்கத்தி லிருக்க வேண்டும்; அல்லது துகள் வட்டப் பாதைவிட்டுப் பிரிந்து செல்ல வேண்டும்.

இப்பொழுது $T = O$ எனில், $u^2 + g\,(a - 3h) = O$ ஆகும்.

அதாவது, $h = \dfrac{(u^2 + ga)}{3g}$

$v = O$ எனில், $u^2 - 2gh = O$ ஆகும்.

அதாவது, $h = \dfrac{u^2}{2g}$

அதாவது, மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியிலிருந்து $h_1 = \dfrac{(u^2+ga)}{3g}$ உயரத் தில் நூலின் இழுவிசை T மறைவதாகவும், $h_2 = \dfrac{u^2}{2g}$ உயரத்தில் துகளின் வேகம் மறைவதாகவும் கொள்க.

துகளின்வேகம் மறைவதற்குமுன் நூலின் இழுவிசை மறையு மாயின், துகள் பாதையைவிட்டு அகன்று ஓடிவிடும். ஆகவே, துகளானது பாதையை விட்டுப் பிரிந்து செல்வதற்கான நிபந்தனை $h_1 < h_2$ ஆகும்.

அதாவது, $\frac{u^2 + ga}{3g} < \frac{u^2}{2g}$

அதாவது, $2(u^2 + ga) < 3u^2$

அதாவது, $u^2 > 2ga.$

அதாவது, $u^2 < 2ga$ எனில், துகளானது வட்டப் பாதையினின்றும் விலகிப் பிரிந்து சென்றுவிடும்.

மாறாக, நூலின் இழுவிசை மறையு முன்னர் துகளின்வேகம் மறையுமெனில் துகளானது மிகத் தழ்ந்த புள்ளியை அலைவு மையமாகக் கொண்டு அலைவு இயக்கத்திலிருக்கும். இதற்கான நிபந்தனை

$$h_2 < h_1 \text{ ஆகும். அதாவது } u^2 < 2ga \text{ ஆகும்.}$$

ஆகவே, $u^2 < 2ga$ எனில் துகளானது வட்டப் பாதையின் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியை அலைவு மையமாகக் கொண்டு அலைவு இயக்கத்திலிருக்கும்.

$u^2 = 2ga$ எனில், $h = \frac{(2ga + ga)}{3g} = a$ ஆகும். ஆனல் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியிலிருந்து கிடைமட்ட விட்டத்தின் உயரம் a ஆகும்.

ஆகவே, $u^2 = 2ga$ எனில், துகளானது கிடைமட்ட விட்டத்தின் முனைவரை சென்றதும் அதன்வேகம் மறைந்துவிடுவதால், மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியை அலைவு மையமாகக் கொண்டு ஓர் அரை வட்டப் பாதையில் அலைவு இயக்கத்திலிருக்கும்.

மேற்கண்ட வகைகளைத் தொகுத்துப் பின்வருமாறு கூறலாம்.

(1) $u^2 \leq 2ga$ எனில், துகளானது மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியை அலைவுமையமாகக் கொண்டு அலைவு இயக்கத்திலிருக்கும்.

(2) $2ga < u^2 < 5ga$ எனில், துகள் வட்டப் பாதையினின்றும் நீங்கி ஒரு பரவளைவுப் பாதையில் இயங்கத் தொடங்கும்.

(3) $u^2 \geq 5ga$ எனில் துகள் வட்டப் பாதையை முழுமையாகச் சுற்றும்.

குறிப்பு. துகள் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியிலிருக்கும்போது நூலின் இழுவிசை உச்சமாகயிருக்கும். ஆகவே, நூலின் மீப்பெரு இழுவிசை $m(u^2 + ga)/a$ ஆகும். துகள் வட்டப்

பாதையை முழுமையாகச் சுற்றும்போது $u^2 \geq 5ga$ ஆகையால், நூல் அறுந்து போகக்கூடிய இழுவிசையானது $m(5ga+ga)/a = 6mg$யைவிடக் குறையாமல் இருக்கவேண்டும். அதாவது, துகள் வட்டப் பாதையில் முழுமையாகச் சுற்றிவர வேண்டு மெனில் நூலின் தாங்கு இழுவிசையானது துகளின் எடையைப் போல் ஆறு மடங்குக்குக் குறையாமலிருக்க வேண்டும்.

குறிப்பு 2. துகளானது மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியிலிருந்து h உயரத்தில் பாதையை விட்டுப் பிரிந்து செல்லுமெனில், $h = \dfrac{(u^2 + ga)}{3g}$ ஆகும். ஆனால் துகள் வட்டப் பாதையை விட்டுப் பிரிவதற்கான நிபந்தனை $u^2 < 2ga$ ஆகையால், அது வட்டப் பாதையைப் பிரிந்து செல்லும் உயரம் $\dfrac{(2ga+ga)}{3g} = a$-ஐ விட அதிகமாகும். ஆகவே, துகளானது கிடைத்தள விட்டத் திற்கு மேலுள்ள வட்டப் பாதையிலிருந்துதான் பாதையை விட்டுப் பிரிந்து செல்லுமென்றறிக.

குறிப்பு 3. ஒரு வழவழப்பான நிலைக்குத்து வட்டத்தின் மேல் நகர்ந்து கொண்டிருக்கும் துகளுக்கும் மேற்கூறப்பட்ட விவரங்கள் யாவும் பொருந்தும். இங்கு இழுவிசை T-க்குப் பதிலாக, துகளின்மீது வட்டத்தின் எதிரமுத்தம் R செயல்படுவ தாகக் கொள்ள வேண்டும்.

குறிப்பு 4. ஒரு வழவழப்பான வட்டக் குழாயினுள்ளே அதன் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியிலிருந்து மேல்முகமாக நகரும் துகள் அக்குழாயினை விட்டு வெளியே வர முடியாதாகையால் அது குழாயினுள்ளே முழுமையாகச் சுற்றிவரும்; அல்லது மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியை அலைவு மையமாகக் கொண்டு அலைவு இயக்கத்திலிருக்கும். குழாயின் மிக உயர்ந்த புள்ளி B-யில் துகளின்வேகம் $v_B = \sqrt{u^2-4ga}$ ஆகையால், $u^2 < 4ga$ எனில் துகள் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியின் இருபக்கமும் அலைவு இயக்கத்தி லிருக்கும் என்றும், $u^2 \geq 4ga$ துகள் குழாயினுள் முழுச் சுற்றுகள் சுற்றிவரும் என்றும் அறிந்து கொள்க.

மாதிரி 140. ஒரு நிலையான புள்ளியிலிருந்து a நீளமுள்ள ஓர் இலேசான, நீளியல்பற்ற கயிற்றின்மூலம் தொங்கிக் கொண் டிருக்கும் ஒரு கனமான துகள் ஒரு நிலைக்குத்து வட்டத்தில் ஒரு முழுச் சுற்று சுற்றுமாறு எறியப்படுகிறது. வட்டத்தின் ஏதேனு மொரு விட்டத்தின் இரு முனைகளிலும் துகளின் நிலைகளின்

போது கயிற்றின் இழுவிசைகளின் மொத்தம் ஒரு மாறிலியென்று நிறுவுக.

தீர்வு : துகளின் பொருண்மை m என்றும், மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியிலிருந்து அது எறியப்பட்ட வேகம் u என்றும் கொள்க. மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியிலிருந்து h உயரத்திலுள்ள நிலைகள் துகளின் வேகம் v எனில், அந்நிலையில் கயிற்றின் இழுவிசை T ஆனது

$$T = \frac{m}{a}\ [u^2 + g\,(a - 3h)\ ]$$

என்று கண்டோம்.

ஆனால் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியிலிருந்து அந்நிலையின் கோண தூரம் θ எனில், $h = a\,(1 - \cos\theta)$ ஆகும்.

$$\therefore\quad T = \frac{m}{a}\,[u^2 + ga - 3ga\ (1\ \cos\theta)]$$

$$= \frac{m}{a}\,[u^2 - 2ga + 3ga\cos\theta]$$

இப்பொழுது α_1, α_2 என்பன மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியிலிருந்து ஏதேனுமொரு விட்டத்தின் முனைகளின் கோண தூரமென்றும், T, T_2 என்பன முறையே அம்முனைகளில் கயிற்றின் இழுவிசைகள் என்றும் கொள்க.

$$\therefore\quad T_1 = \frac{m}{a}\,[u^2 - 2ga + 3ga\cos\alpha_1]$$

$$T_2 = \frac{m}{a}\,[u^2 - 2ga + 3ga\cos\alpha_2]$$

ஆனால் $\alpha_2 = (180^\circ + \alpha)$ ஆகும்.

$$\therefore\quad T_2 = \frac{m}{a}\,[u^2 - 2ga + 3g\cos\,(180^\circ + \alpha 1)$$

$$= \frac{m}{a}\,[u^2 - 2ga - 3ga\cos\alpha_1]$$

$$= \frac{m}{a}\,[2u^2 - 4ga]$$

$$= \frac{2m}{a}\,[u^2 - 2ga]$$

இம்மதிப்பு துகளின் பொருண்மை, தொடக்கவேகம், வட்டப் பாதையின் ஆரை, ஈர்ப்பு முடுக்கம் ஆகியவற்றை மட்டிலுமே சார்ந்திருப்பதால் ஒரு மாறிலியாகும்.

மாதிரி **141**. ஒரு நிலையான புள்ளியுடன் ஒரு இலேசான நீளியல்பற்ற கயிற்றின் மூலம் இணைக்கப்பட்டுள்ள W எடையுள்ள ஒரு கனமான துகள் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் வட்டமாகச் சுற்றுகிறது. துகளானது அதன் பாதையில் மிகத்தாழ்ந்த புள்ளியிலும் மிக உயர்ந்த புள்ளியிலும் இருக்கும்போது கயிற்றின் இழுவிசைகள் முறையே nW, mW எனில், $n = m + 6$ என்று காட்டுக.

தீர்வு : துகளானது மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியிலிருந்து u வேகத்துடன் புறப்பட்டு a ஆரையுள்ள வட்டத்தில் சுற்றுவதாகக் கொள்க. துகளின் எடை W ஆகையால் அதன் பொருண்மை $\frac{W}{g}$ ஆகும்.

மிகத்தாழ்ந்த புள்ளியில் இழுவிசை $= \frac{W}{ga}(u^2 + ga)$ ஆகும்.

$$\therefore \quad nW = \frac{W}{ga}(u^2 + ga)$$

அல்லது, $$n = \frac{1}{ga}(u^2 + ga) \qquad \dots \quad \dots \qquad (1)$$

மிக உயர்ந்த புள்ளியில் இழுவிசை $= \frac{W}{ga}[u^2 - 5ga]$

$$\therefore \quad mW = \frac{W}{ga}[u^2 - 5ga]$$

அல்லது, $$m = \frac{1}{ga}[u^2 - 5ga]$$

$$\therefore \quad n = \frac{1}{ga}[u^2 + ga]$$

$$= \frac{1}{ga}[u^2 - 5ga + 6ga]$$

$$= \frac{1}{ga}[u^2 - 5ga) + 6$$

$$= m + 6.$$

மாதிரி 142. a ஆரையுள்ள ஒரு வழவழப்பான நிலைக் குத்து வட்டத்தின் உட்புறமாக, விட்டத்தின் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியிலிருந்து ஒரு துகள் V வேகத்துடன் எறியப்படுகிறது. $V^2 = \frac{7}{2}ag$ எனில், துகளானது வட்டத்தின் உச்சியிலிருந்து $60°$ கோணத் தூரத்திலுள்ள புள்ளியிலிருந்து வட்டத்தினின்றும் விலகிச் செல்லும் என்று காட்டுக.

(சென்னை பி.எஸ்ஸி. 1967 செப்.)

தீர்வு: வட்டத்தின் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியிலிருந்து h உயரத்திலுள்ள புள்ளியில்

$$\text{இழுவிசை} = \frac{m}{a}[V^2+g(a-3h)]$$

$$= \frac{m}{a}[\tfrac{7}{2}ag + ag - 3gh]$$

$$= \frac{m}{a}[\tfrac{9}{2}ag - 3gh]$$

துகள் வட்டத்தினின்றும் பிரியும்போது $T = O$ ஆகுமாகையால்,

$$\tfrac{9}{2}ag = 3gh$$

அல்லது, $h = \frac{3}{2}a$.

ஆகவே, துகளானது மையத்திற்குமேல் $\frac{a}{2}$ உயரத்திலிருக்கும் போது பாதையினின்று பிரிந்து செல்லும். உச்சிப் புள்ளியிலிருந்து கோணத்தூரம் θ எனில்,

$$\cos\theta = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = 60°$$

பயிற்சி 13

1. 6 ராத்தல் பொருண்மையொன் 8 அடி நீளக் கயிற்றின் மூலம் ஒரு நிலையான புள்ளியுடன் இணைக்கப்பட்டு ஒரு வழவழப் பான கிடைத்தளத்தின்மீது 16 அடி/விநாடி வேகத்தில் சுற்று கிறது. கயிற்றின் இழுவிசையைக் காண்க.

2. ஒரு மேசையிலுள்ள ஒரு சிறு துவாரத்தின் வழியே செல்லும் ஒரு மெல்லிய நூலின்மூலம் 1 கிராம், 2 கிராம்

பொருண்மைகளுள்ள இரு துகள்கள் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. 1 கிராம் துகள் மேசையின் மேலும் 2 கிராம் துகள் தொங்கிக் கொண்டுமிருக்கின்றன. 2 கிராம் பொருண்மையை ஓய்வில் வைத்திருக்க வேண்டுமாயின் 1 கிராம் பொருண்மை மேசையின்மேல் 10செ.மீ. ஆரையுள்ள வட்டத்தின்மேல் நிமிடத்திற்கு எத்தனை சுற்றுக்கள் சுற்ற வேண்டும்.

3. ஒரு வழவழப்பான மேசையில் மையத்திலுள்ள ஒரு துவாரத்தின் வழியே செல்லும் ஒரு கயிற்றின் ஒரு முனையில் 2 கிலோகிராம் பொருண்மையொன்று இணைக்கப்பட்டுத் தொங்கிக் கொண்டிருக்க, கயிற்றின் மறுமுனை மேசையின் மேலுள்ள 6 கிலோகிராம் பொருண்மையுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. தொங்கிக் கொண்டிருக்கும் பொருண்மையைச் சரியாகத் தாங்கிக் கொள்ளும் வகையில் மேசையின் மேலுள்ள பொருண்மை மேசையின்மீது 60 செ.மீ. ஆரையுள்ள வட்டத்தில் சீராகச் சுற்றுகிறதெனின், அதன்வேகம் காண்க.

4. ஒரு துகள் r ஆரையுள்ள ஒரு கிடைத்தள வட்டப் பாதையில் α எனும் சீரான சுழல் முடுக்கத்துடன் நகருகிறது. ஓய்விலிருந்து புறப்பட்ட அத்துகள் n சுற்றுக்கள் சுற்றியபின் அதன் முடுக்கம் f எனில், $f = 4\pi r n \alpha$ என்று நிறுவுக.

5. இயல்பான நீளம் 2 அடியுள்ள ஒரு மீளியல்புடைய கயிற்றின் ஒரு முனை ஒரு கிடைத்தளத்தில் ஒரு நிலையான புள்ளியில் கட்டப்பட்டுள்ளது. அதன் மறுமுனையில் இணைக்கப்பட்ட ஒரு ராத்தல் பொருண்மையுள்ள துகள் ஒன்று 6 அடி/விநாடி வேகத்துடன் வட்டமாகச் சுற்றுகிறது. கயிற்றின் மீளியல்புக் குணகம் துகளின் இருமடங்கு எடைக்குச் சமமாயின் கயிற்றின் நீட்சியைக் காண்க.

6. 2 டன் எடையுள்ள ஓர் இரயில்பெட்டி 600 அடி ஆரையுள்ள ஒரு வளைவுப் பாதையில் 20 மை/மணி வேகத்தில் திரும்புகிறது. தண்டவாளங்களின் மீதுள்ள பக்க அழுத்தங்களைக் காண்க.

7. ஒரு மேசையிலுள்ள ஒரு சிறு துவாரத்தின் வழியே செல்லும் ஒரு கயிற்றின் ஒரு முனை மேசையின் மேலுள்ள m பொருண்மையுள்ள ஒரு துகளுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. அதன் மறுமுனையில் $2m$ பொருண்மையுள்ள துகள் ஒன்று இணைக்கப்பட்டுத் தொங்கிக் கொண்டிருக்கிறது. தொங்கிக் கொண்டிருக்கும் துகளைச் சரியாகத் தாங்கிக் கொண்டு a ஆரை

யுள்ள வட்டத்தின்மீது சுற்றுமாறு மேசையின் மேலுள்ள துகள் என்ன வேகத்துடன் வீசப்பட வேண்டுமென்று காண்க.

8. ஒரு கிடைத்தள மேசையிலுள்ள ஒரு நிலையான புள்ளியுடன் λ மீளியல்புக் குணகமுடைய ஒரு மீளியல்புடைய நூலின் மூலம் இணைக்கப்பட்டுள்ள m பொருண்மையுள்ள பொருள் ஒன்று மேசையின்மீது நகருகிறது. நூலின் இயல்பான நீளம் a. பொருளானது மேமையின்மீது ஆரையுள்ள வட்டப் பாதையில் நகர்ந்தால் அதன்வேகம் $\sqrt{\dfrac{\lambda r\,(r-a)}{am}}$ என்று காட்டுக.

9. ஒரு நிலையான புள்ளியுடன் ஓர் இலேசான நீளியல் பற்ற நூலின்மூலம் இணைக்கப்பட்டுள்ள ஒரு துகள் ω என்னும் சுழல்வேகத்துடன் ஒரு கிடைத்தள வட்டப் பாதையில் சுற்றுகிறது. வட்டப் பாதையின் கிடைத்தளமானது நிலையான புள்ளிக்குக் கீழே h ஆழத்திலுள்ளது. $g = h\,\omega^2$ என்று நிறவுக.

10. சம பொருண்மையுடைய இரு துகள்கள் ஒரு இலேசான நூலின் மத்தியில் ஒன்றும், ஒரு முனையில் ஒன்றுமாகக் கட்டப்பட்டு ஒரு கிடைத்தள மேசையின்மீது வைக்கப்பட்டுள்ளன. நூலின் மறுமுனை மேசையின் மேலுள்ள ஒரு நிலையான புள்ளியுடன் கட்டப்பட்டுள்ளது. கயிறு விறைப்பாக இழுக்கப்பட்டு, இரு துகள்களும் எப்பொழுதும் ஒரே நேர்கோட்டிலிருக்குமாறு வீசியெறியப்பட்டால் நூலின் இரு பகுதிகளிலும் இழுவிசைகளின் விகிதம் 3 : 2 என்று காட்டுக.

11. 2 ராத்தல் நிறையுள்ள A என்னும் பந்து ஒன்று ஒரு கயிற்றின் ஒரு முனையில் கட்டப்பட்டு ஒரு கிடைத்தள மேசையின் மேல் உள்ளது. மேசையின் மேல் B என்னும் புள்ளியிலுள்ள ஒரு உராய்வற்ற துவாரத்தின்வழியே செல்லும் அக் கயிற்றின் மறுமுனையில் 10 ராத்தல் நிறைவுள்ள பொருளொன்று தொங்கிக் கொண்டிருக்கிறது. பந்து மேசையின்மீது B-யை மையமாகக் கொண்ட ஒரு வட்டப் பாதையில் விநாடிக்கு 2 சுற்றுக்கள் வீதம் 10 ராத்தல் பொருள் ஓய்விலிருக்குமாறு சுற்றிக் கொண்டிருந்தால் AB-யின் தூரத்தைக் காண்க.

12. ஒரு உந்துவண்டி சமதளச் சாலையில் 150 அடி ஆரையுள்ள வளைவில் திரும்புகிறது. கீழே சாய்ந்து விடாமல் திரும்பக் கூடிய அதிகபட்ச வேகம் என்ன ? உந்து வண்டியின் சக்கரங்களுக்கிடையேயுள்ள தூரம் 4 அடி ; உந்து வண்டியின் புவி

யீர்ப்பு மையம் சக்கரங்களுக்கு நடுவில் தரையிலிருந்து 3 அடி உயரத்திலுள்ளது.

13. மிதிவண்டியோட்டியொருவர் 60 அடி ஆரையுள்ள ஒரு வளைவில் 10மைல்/மணி வேகத்தில் திரும்புகிருர். நிலைக்குத்துடன் மிதிவண்டியின் தளத்தில் சாய்வைக் காண்க. மிதிவண்டி பக்கவாட்டில் வழுக்காமலிருக்க மிதிவண்டிக்கும், சாலைக்குமிடையேயிருக்க வேண்டிய மிகக் குறைந்த உராய்வுக் குணகம் என்ன ?

14. ஒரு மின்சார இரயில் வண்டி சமதள இரயில் பாதையில் 30 அடி ஆரையுள்ள ஒரு வளைவில் 10 மைல்/மணி வேகத்தில் திரும்புகிறது. தண்டவாளங்களுக்கிடையேயுள்ள தூரம் 4 அடி 6 அங். வண்டி கவிழாமலிருக்க வேண்டுமாயின் புவியீர்ப்பு மையம் 10 அடி உயரத்திற்கு மேலிருக்கக் கூடாது என்று காட்டுக.

15. ஒரு இரயில் பெட்டி ஒரு வட்டமான வளைவில் திரும்புகிறது. வளைவின் ஆரை 1320 அடி ; தண்டவாளங்களுக்கிடையேயுள்ள தூரம் 5 அடி ; இரயில் பெட்டியின் வேகம் 45 மைல்/மணி. தண்டவாளங்களின் மீது பக்க அழுத்தம் இருக்கக்கூடாதெனில் உட்புறத் தண்டவாளத்தைவிட வெளிப்புறத் தண்டவாளம் எவ்வளவு உயரத்திற்கு உயர்த்தப்பட வேண்டும்?

16. 120 கெஜ ஆரையுள்ள சமதளமான வளைவு இரயில் பாதையில் 30 மைல்/மணி வேகத்தில் செல்லுகின்ற 300 டன் எடையுள்ள இரயிலின் சக்கரங்களின் மீதுள்ள பக்க அழுத்தம் யாது? சக்கரங்களுக்கிடையேயுள்ள தூரம் 4 அடி $8\frac{1}{2}$ அங்குலம் எனில், 30 மைல்/மணி வேகத்தில் பக்க அழுத்தம் ஏதுமின்றி வளைவில் திரும்ப உட்புறத் தண்டவாளத்திற்குமேல் வெளிப்புறத் தண்டவாளம் எவ்வளவு உயரத்திற்கு உயர்த்தப்பட வேண்டும்? இவ்வாறு வெளிப்புறத் தண்டவாளம் உயர்த்தப்பட்ட பாதையில் 45 மைல்/மணி வேகத்தில் செல்லும்போது பக்க அழுத்தம் என்ன ?

17. V வேகத்திற்கேற்றவாறு உயர்த்தப்பட்ட வெளிப்புறத் தண்டவாளத்தைக் கொண்ட r ஆரையுள்ள ஒரு வளைவு இரயில் பாதையில் M பொருண்மையுள்ள ஒரு இரயில் நின்று கொண்டிருக்கிறது. தண்டவாளங்களின் மீதுள்ள பக்க அழுத்தம் $\frac{V^2 Mg}{\sqrt{V^4 + r^2 g^2}}$ என்று காட்டு.

18. ஒரு வளைவுப் பாதையில் V வேகத்துடன் திரும்பிக் கொண்டிருக்கும் ஓர் இரயில் பெட்டியின் கூரையிலிருந்து W எடையுள்ள துகளொன்று தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. பாதையின் வளைவாரை l எனில், இரயில் பெட்டியைப் பொறுத்துத் துகள் ஓய்விலிருக்கும்போது நூலின் இழுவிசை $W\left(1+\dfrac{V^4}{g^2l^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ என்று காட்டுக.

19. ஒரு இரயில் பாதையின் இடைத்தூரம் 1 மீட்டர். இப்பாதையில் 1 கிலோ மீட்டர் ஆரையுள்ள வளைவில் சராசரி 84 கி.மீ./மணி வேகத்தில் இரயில் செல்லும்போது தண்டவாளங்களின்மீது பக்க அழுத்தம் இருக்கக் கூடாதெனில் வெளித் தண்டவாளம் உட்தண்டவாளத்தைவிட எவ்வளவு உயரமாக இருக்க வேண்டும் ?

20. 770 அடி ஆரையுள்ள சமதள இரயில் பாதை வளைவில் 30மைல்/மணி வேகத்துடன் 2 டன் பொருண்மையுள்ள ஒரு இரயில் பெட்டி சென்று கொண்டிருக்கிறது. வெளித் தண்டவாளம் உட்தண்டவாளத்தைவிட உயர்த்தப்படாவிடில், தண்டவாளங்களின் மீதுள்ள பக்க அழுத்தத்தினைக் காண்க. தண்டவாளங்களுக்கிடையேயுள்ள தூரம் 5 அடியெனில் பக்க அழுத்தம் இருக்கக் கூடாதெனில் வெளித்தண்டவாளம் எவ்வளவு உயரத்திற்கு உயர்த்தப்பட வேண்டுமென்று காண்க.

21. 540 அடி ஆரையுள்ள வளைவுப் பாதையில் 20 டன் எடையுள்ள ஒரு இரயில் இயந்திரம் 60 மைல்/மணி வேகத்தில் செல்கிறது. இரயில் பாதையின் அகலம் 4 அடி 8 அங் ; பாதைக்குமேல் இயந்திரத்தின் புவியீர்ப்பு மையத்தின் உயரமும் 4 அடி 8 அங். தான். இயந்திரம் கவிழுமா என்று காண்க.

22. ஒரு மிதிவண்டியோட்டி ஒரு கோணத் திருப்பத்தில் 16 அடி/விநாடி வேகத்துடன் 8 விநாடியில் திரும்புகிறது. அவன் நிலைக்குத்துடன் 45° கோணத்தில் சாயவேண்டுமென்று காட்டு.

23. இரண்டு சக்கரங்களையுடைய வண்டியொன்று ஒரு சமதளச் சாலையில் R ஆரையுள்ள ஒரு வளைவில் V வேகத்துடன் திரும்புகிறது. சக்கரங்களின் இடைத்தூரம் 4 அடி ; தரைமட்டத்திற்குமேல் வண்டியின் புவியீர்ப்பு மையம் 3 அடி. சக்கரங்களின் மீதுள்ள விசைகளைக் காண்க. $V^2 = \frac{2}{3}gR$ எனில் வண்டி கவிழும் அபாயத்திலிருக்குமென்று நிறுவுக.

24. $7\frac{1}{2}$ மைல்/மணி வேகத்தில் மிதிவண்டியில் செல்லும் ஒருவன் ஒரு திருப்பத்தில் திரும்ப வேண்டியிருக்கிறது. மிதி வண்டிச் சக்கரங்களுக்கும் சாலைக்குமிடையேயுள்ள உராய்வுக் குணகம் 0.3 எனில் திருப்பத்தின் குறைந்தபட்ச ஆரையைக் காண்க.

25. ஒரு உந்துவண்டியின் அச்சுக்களின் நீளம் 4 அடி 6 அங்; அதன் புவியீர்ப்பு மையம் தரைக்குமேல் 2 அடி உயரத்திலுள்ளது. 30 அடி ஆரையுள்ள ஒரு வளைவில் 22·2 மைல்/மணியைவிட அதிகமான வேகத்துடன் வண்டி திரும்புமானால் வண்டியின் வெளிப்புறச் சக்கரங்கள் தரையினின்றும் விலகிவிடுமென்று நிறுவுக.

26. 5 ராத்தல் எடையுள்ள ஓர் ஊசற்குண்டும், 4 அடி நீளக் கயிறும் கொண்ட ஒரு கூம்பூசலின் கயிறு $30°$ சாய்விலிருக்கும்போது கயிற்றின் இழுவிசையையும் காலவட்டத்தையும் காண்க.

27. ஒரு கூம்பூசலின் கயிறு மீளியல்புடையது; அதன் இயல்பான நீளம் 18 அங்குலம். ஊசலி ஓய்வாகத் தொங்கும் போது கயிற்றின் நீளம் $22\frac{1}{2}$ அங். $60°$ அரையுச்சிக் கோணமுடைய ஒரு கூம்பாகக் கயிறு சுழலும்போது ஊசலியின் காலவட்டம் $\frac{3\pi}{8}$ விநாடிகள் என்று காட்டு.

28. 1·5 மீட்டர் நீளமுள்ள கயிற்றில் தொங்கவிடப் பட்டுள்ள 2 கிராம் பொருண்மையொன்று ஒரு கூம்பூசலாக நிமிடத்திற்கு 42 முறை சுற்றுகிறது. பொருண்மை சுற்றும் வட்டத்தின் ஆரையையும், கயிற்றின் இழுவிசையையும் காண்க.

29. ஒரு மீளியல்புள்ள கயிற்றின் இயல்பான நீளம் l அடி; அக்கயிற்றில் m ராத்தல் பொருண்மையொன்று தொங்கவிடப் பட்டால் அதன் நீளம் a அடி அதிகரிக்கும். அதே பொருண்மையுடன் அக்கயிறு ஒரு கூம்பூசலியாக விநாடிக்கு n முறை சுற்றினால், கயிற்றின் நீளத்தைக் காண்க.

30. விநாடிக்கு n சுற்றுக்கள்வீதம் சுற்றுகின்ற ஒரு கூம்பூசலின் கயிற்றின் நீளம் l ஆனால் x என்னும் சிறிய நீளத்தால் குறைக்கப்படுகிறது. நிலைக்குத்துடன் கயிற்றின் சாய்வும், அதன் இழுவிசையும் மாறாதிருந்தால் விநாடிக்கு ஊசல் சுற்று

கின்ற சுற்றுக்களின் எண்ணிக்கைத் தோராயமாக $\frac{nx}{2l}$ அதிக மாகும் என்று காட்டு.

31. m பொருண்மையுள்ள C என்னும் துகள் CA, CB என்னும் கயிறுகளின்மூலம் ஒரே நிலைக்குத்துக் கோட்டிலுள்ள A, B என்னும் நிலையான புள்ளிகளுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. A-யானது B-க்கு மேலேயுள்ளது. AB-யை அச்சாகக் கொண்டு அத்துகளும் கயிறுகளும் சுற்றுகின்றன. கயிறு விறைப்பாகயிருக்க வேண்டுமாயின் $m^2 < \dfrac{g}{b \cos A}$ என்று காட்டுக.

32. 5 ராத்தல் பொருண்மையுள்ள ஒரு சிறு பொருள் ஒரு நிலையான புள்ளியுடன் 6 அடி நீளமுள்ள நூலின்மூலம் இணைக்கப்பட்டு, ஒரு கிடைத்தள வட்டத்தின்மீது சுற்றுகிறது. கயிற்றின் இழுவிசை 24 ராத்தல் எடையெனில் கயிறு ஒரு நிமிடத்தில் சுற்றுகின்ற சுற்றுக்களின் எண்ணிக்கையையும், நிலைக்குத்துடன் கயிற்றின்சாய்வைக் காண்க.

33. AB என்னும் நூலின் முனை A நிலையாக வைக்கப் பட்டுள்ளது ; B-யில் ஒரு துகள் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. A வழி நிலைக்குத்தை அச்சாகக் கொண்டு துகள் ஒரு கூம்பூசலாகச் சுற்ற வேண்டுமாயின் அதன் சுழல்வேகம் AB-யைச் சார்ந்துள்ள ஒரு மதிப்பைவிட அதிகமாயிருக்க வேண்டுமென்று காட்டுக.

துகளின் பொருண்மை 2 அடி ; நூலின் நீளம் 4 அடி ; இழுவிசை 1 ராத்தல் எடையாகயிருக்கும்போது நூல் அறுந்து விடும் ; இவ்விவரங்களைக் கொண்டு சாத்தியமான மிக அதிக பட்ச சுழல்வேகத்தையும், அச்சுழல்வேகத்தின்போது நிலைக் குத்துடன் நூலின் சாய்வையும் காண்க.

34. b நீளமுள்ள AB என்னும் ஒரு கிடைமட்டக்கோல் B-யை மையமாகவும், B வழி நிலைக்குத்தை அச்சாகவும் கொண்டு ω சுழல்வேகத்துடன் சுற்றப்படுகிறது. A-யில் l நீளக் கயிற்றின்மூலம் ஒரு துகள் இணைக்கப்படுகிறது. இயக்கம் ஒரியல்பாயிருக்கும்போது நிலைக்குத்துடன் கயிற்றின் சாய்வு θ எனில்,

$$\tan \theta = \frac{\omega^2}{g}(b + l \sin B)$$

என்று நிறுவுக.

35. m பொருண்மையுள்ள ஓர் ஊசற்குண்டு l நீளமுள்ள கயிற்றின்மூலம் தொங்கு புள்ளியிலிருந்து h_1 ஆழத்தில் ஒரு கிடைத்தள வட்டத்தின்மீது சுற்றுகிறது. அதன் இயக்கத்திற் கேற்பட்டுள்ள ஒரு தடையின் காரணமாக ஊசற்குண்டின் பாதையானது h_2 ஆழத்திலுள்ள ஒரு கிடைவட்டமாக மாற்றப் பட்டால் ஆற்றல் இழப்பு $mg\,(h_2 - h_1)\left(\dfrac{l}{2h_1\,h_2} + \dfrac{3}{2}\right)$ என்று காட்டுக.

36. ஒரு இலேசான கயிற்றின் முனைகளிரண்டும் ஒரே நிலைக்குத்துக் கோட்டில் a இடைவெளியிலுள்ள A, B என்னுமிரு நிலையான புள்ளிகளுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. AB-யின் தூரம் கயிற்றின் நீளத்தைவிடக் குறைவு. கயிற்றின் நடுப் புள்ளியில் ஒரு துகள் கட்டப்பட்டு, கயிறும் துகளும் சேர்ந்து AB-யை அச்சாகக் கொண்டு P சுழல்வேகத்துடன் சுற்று கின்றன. $ap^2 > 2g$ எனில், கயிற்றின் இரு பகுதிகளின் இழு விசைகளின் விகிதம் $ap^2 + 2g : ap^2 - 2g$ என்று காட்டுக.

37. ஒரு நிலைக்குத்தான வழவழப்பான வட்டவளையத்தின் உட்புறமாக m பொருண்மையுள்ள ஒரு துகள் சுற்றி வருகின்றது. கீழ்முகமான நிலைக்குத்துடன் அத்துகள் வழி ஆரை θ கோணத்தைக் கொண்டிருக்கும்போது அதன்வேகம் v. வளை யத்தின் உட்புற ஆரை r எனில், துகளுக்கும் வளையத்திற்கு மிடையேயுள்ள எதிரழுத்தம் $\left(\dfrac{mv^2}{r} + mg\cos\theta\right)$ என்று நிறுவுக.

துகள் வளையத்தில் முழுமையாகச் சுற்றும்போது, மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியில் எதிரழுத்தம் மிக உயர்ந்த புள்ளியின் எதிரழுத்தத்தைப்போல் நான்கு மடங்கு எனில், மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியில் அதன் வேகம் $\sqrt{7gh}$ என்று காட்டுக.

38. a ஆரையுள்ள ஒரு வழவழப்பான கோளத்தின் உச்சி யில் ஒரு துகள் ஓய்விலிருக்கிறது, துகளுக்கு வரையப்படும் ஆரை $\cos^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ கோணத்திற்குத் திரும்பியதும் துகள் கோளத்தைவிட்டுப் பிரிய வேண்டுமெனில் துகளானது எந்த வேகத்துடன் எறியப்பட வேண்டும்?

39. r ஆரையுள்ள ஒரு நிலைக்குத்து வட்டத்தின்மீது ஒரு துகள் நகருகிறது. வட்டத்தின் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியில் துகளின் எந்த மீச்சிறு வேகம் துகளை வட்டத்தைச் சுற்றி முழுமையாகக் கொண்டு செல்லுமென்று காண்க. (i) துகளா

னது ஓர் இலேசான கயிற்றின் முனையிலிருப்பதாகக் கொள்க. (ii) ஓர் இலேசான கோலின் முனையிலிருப்பதாகக் கொள்க.

40. 8 ராத்தல் எடையை அறுந்துபோகும் இழுவிசையாகக் கொண்ட 3 அடி நீளக் கயிற்றின் ஒரு முனையில் 1 ராத்தல் பொருண்மையுள்ள ஒரு கல் சமநிலையில் தொங்கிக் கொண்டிருக்கிறது. கல்லானது ஒரு நிலைக்குத்து வட்டத்தை வரையுமாறு v வேகத்துடன் கிடைத்திசையில் எறியப்படுகிறது. v-இன் அதிகபட்ச மதிப்பைக் காண்க.

41. m பொருண்மையுள்ள ஒரு துகள் l நீளக் கயிற்றின் மூலம் ஒரு நிலையான புள்ளியிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. கீழ்முக நிலைக்குத்துடன் கயிறு 60° கோணத்தில் விசைப்பாகயிருக்கும்போது துகள் ஓய்விலிருந்து விடப்பட்டால், அது பெறக்கூடிய மீப்பெரு வேகத்தைக் காண்க. நிலைக்குத்துடன் கயிறு 30° சாய்விலிருக்கும்போது அதன் இழுவிசையைக் காண்க.

42. r நீளமுள்ள ஒரு நீளியல்பற்ற ஒரு கயிற்றின் ஒரு முனையில் ஒரு துகள் ஓய்வு நிலையில் தொங்கிக் கொண்டிருக்கிறது. துகளானது கிடைத்திசையில் $\sqrt{4gr}$ வேகத்துடன் எறியப்படுகிறது. வட்டப் பாதையினின்றும் துகள் எந்தப் புள்ளியில் பிரிந்து செல்லுமென்று காண்க.

43. m பொருண்மையுள்ள ஒரு சிறு துகள் ஓர் இலேசான கோலின்மூலம் ஒரு நிலையான புள்ளியுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. சமநிலையில் அது ஓய்விலிருக்கும்போது ஒரு நிலைத்தளத்தில் ஒரு முழு வட்டமாகச் சுற்றுமாறு கிடைத்திசையில் $7u$ வேகத்துடன் எறியப்படுகிறது. பாதையில் உச்சிப்புள்ளியில் அதன்வேகம் $3u$ எனில் அதன்வேகம் $5u$ ஆகயிருக்கும்போது நிலைக்குத்துடன் கோலின் சாய்வைக் காண்க. கோல் கிடையாகயிருக்கும்போது இழுவிசை $\frac{29}{10} mg$ என்று நிறுவுக.

44. O என்னும் புள்ளியிலிருந்து a நீளக் கயிற்றின்மூலம் ஒரு துகள் தொங்குகிறது. $u^2 = (2 + \sqrt{3})\, ag$ என்ற தொடர்பிற்கேற்ப அது u எனும் வேகத்துடன் கிடைத்திசையில் எறியப்படுகிறது. அது $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ கோணத் தூரத்திற்குச் சென்றதும் கயிறு தொய்ந்து விடுமென்று காட்டுக.

45. l நீளமுள்ள ஒரு கயிற்றின் ஒரு முனை ஒரு நிலையான புள்ளியில் கட்டப்பட்டுள்ளது. அது மறுமுனையில் இணைக்கப் பட்டுள்ள ஒருதுகள் $\sqrt{ngl}$ வேகத்துடன் கிடைத் திசையில் எறியப்படுகிறது. துகளானது வட்டப்பாதையின் உச்சியை அடையுமுன் கயிறு தொய்ந்து விடுகிறதெனில் கயிறு தொய்ந்து போகும்போது துகளானது மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியிலிருந்து $\frac{l}{3}(n+1)$ உயரத்திலிருக்குமென்று காட்டு.

46. a நீளக் கயிற்றின்மூலம் ஒரு கனமான துகள் ஒரு நிலை யான புள்ளியுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. அது மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியிலிருந்து கிடைத்திசையில் $\sqrt{ag\left(2+\frac{8\sqrt{3}}{2}\right.}$ வேகத் துடன் வீசியெறியப்படுகிறது. கயிறானது மேல்முக நிலைக் குத்துடன் 30° கோணத்திலிருக்கும்போது அது முதன் முதலில் தொய்ந்துவிடும் என்றும், பின்கிடையாக இருக்கும்போது மீண்டும் விறைப்பாகி விடுமென்றும், பின் மேல்முக நிலைக் குத்துடன் $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{8}\right)$ கோணத்திலிருக்கும்போது மீண்டும் தொய்ந்து விடுமென்றும் நிறுவுக.

47. a நீளக் கயிற்றின் மூலம் ஒரு கனமான துகள் ஒரு நிலையான புள்ளியுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. அது மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியிலிருற்து கிடைத் திசையில் $\sqrt{(2gh)}$ வேகத் துடன் எறியப்படுகிறது. $\frac{5}{2}a > h > a$ எனில், துகள் $\frac{1}{3}, (a+2h)$ உயரத்தை அடைந்ததும் அதன் வட்ட இயக்கம் நின்றுவிடு மென்றும், எறிபுள்ளிக்குமேல் துகள் சென்ற மிக அதிக உயரம் $\frac{(4a-h)(a+2h)^2}{27a^2}$ என்றும் நிறுவுக.

48. 2 அடி ஆரையுள்ள ஒரு மெல்லிய வட்டவளையம் அதன் தளத்தில் மையத்தைப்பற்றிச் சுழலுகிறது. அதன் மீப் பெரு இழுவிசை ஒரு சதுர அங்குலக் குறுக்கு வெட்டுக்கு 50,000 ராத்தல்; அதன் அடர்த்தி ஒரு கன அடிக்கு 500 ராத்தல். வளையம் நொறுங்கிப் போகாமல் ஒரு விநாடியில் சுற்றக்கூடிய சுற்றுக்கள் $\frac{120\sqrt{2}}{\pi}$ என்று காட்டுக.

49. O-ஐ மையமாகவுடைய ஒரு வழவழப்பான கோளத் தின் மேற்பரப்பின் உச்சிப்புள்ளி A-யாகும். B என்பது

$A\hat{O}B = \alpha$ என்றவாறு அதன் மீதுள்ள மற்றொரு புள்ளியாகும். B-யில் ஓய்வு நிலையிலிருக்கும் ஒரு துகள் கோளத்தின் மேற்பரப்பின்மீது கீழ்முகமாக நழுவுகிறது. A-யிலிருந்து $\cos^{-1}\left(\frac{2\cos\alpha}{3}\right)$ கோண தூரத்திலுள்ள புள்ளியில் துகள் கோளத்தைவிட்டுப் பிரியும் என்று காட்டு.

50. 2 அடி நீளமுள்ள கயிற்றின் ஒரு முனையில் இணைக்கப்பட்ட ஒரு கனமான துகள் சம நிலையிலிருந்து எறியப்பட்டு, கயிற்றின் மறுமுனையை மையமாகக் கொண்ட ஒரு நிலைக்குத்து வட்டப் பாதையில் சுற்றுகிறது. துகள் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியிலிருக்கும்போது கயிற்றின் இழுவிசையானது, துகள் மிக உயர்ந்த புள்ளியிலிருக்கும் போதுள்ள கயிற்றின் இழுவிசையைப் போல் மூன்று மடங்குகளெனில், துகளின் எறிவேகம் $4\sqrt{g}$ என்று காட்டுக.

51. நிலைத்தளத்திலுள்ள ஒரு வட்டக் குழாயினுள்ளே மிக உயர்ந்த புள்ளியில் ஓய்வு நிலையிலிருக்கும் ஒரு துகள் இலேசாக அசைக்கப்படுகிறது. அதையடுத்து அத்துகள் குழாயினுள் நகர்ந்து செல்லும்போது கிடைத்தளவிட்ட முனையைக் கடக்கும் போதும், மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியை அடையும்போதும் குழாய்க்கும், துகளுக்குமிடையேயுள்ள அழுத்தம் 2 : 5 என்ற விகிதத்திலிருக்குமென்று காட்டு.

52. ஒரு வழவழப்பான நிலைக்குத்து வட்டத்தின் உட்புறமாக ஒரு துகள் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியிலிருந்து எறியப்படுகிறது. வட்டப் பாதையைவிட்டுப் பிரிந்ததும் துகளானது மையத்தின் வழியே செல்ல வேண்டுமாயின் எறிவேகம் $(\sqrt{3}+1)\sqrt{ga/2}$ இருக்க வேண்டுமென்று காட்டுக.

53. a ஆரையுள்ள ஒரு வழவழப்பான கோளத்தின் மேற்பரப்பின்மீது அதன் உச்சியில் ஓய்வு நிலையிலுள்ள ஒரு துகள் நழுவுகிறது. அது கோளத்தைவிட்டுப் பிரிந்து, மிகத் தாழ்ந்த புள்ளி வழியே செல்லும் கிடைத்தளத்தில் மோதுகின்ற புள்ளி நிலைக்குத்து விட்டத்திலிருந்து $\frac{5(\sqrt{5}+4\sqrt{2})a}{27}$ தூரத்திலிருக்குமென்று காட்டு.

54. a ஆரையுள்ள ஓர் உள்ளீடற்ற கோளத்தின் உச்சியில் வைக்கப்பட்டுள்ள ஒரு கனமான துகள் அதன் மேற்பரப்பின்

மீது நழுவுகிறது. அதே சமயம், கோளத்தின் உட்புறமாக, மிகத் தாழ்த்த புள்ளியிலிருந்து மற்ருெரு கனமான துகள் அதே நிலேத்தளத்தில், அதே பக்கத்தில் $2\sqrt{ga}$ வேகத்துடன் எறியப் படுகிறது. இரு துகள்களும் கோளத்தைவிட்டு ஒரே புள்ளியி லிருந்து பிரிந்து செல்லுமென்றும், பிரிந்து சென்றபின் அவை ஒரே பரவளேவுப் பாதையின் பகுதிகளேயே வரையுமென்றும் காட்டுக.

55. ஒரு நிலேத்திலுள்ள ஒரு வழவழப்பான வட்டக் குழாயி னுள்ளே உச்சியில் ஒய்வு நிலேயிலிருக்கும் m பொருண்மையுள்ள ஒரு பந்து மெதுவாக அசைத்துவிடப்படுகிறது. அது குழாயி னுள்ளே நகர்ந்து சென்று அதன் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியிலிருக்கும் $2m$ பொருண்மையுள்ள பந்தின்மீது மோதுகிறது. இரு பந்து கட்குமிடையேயுள்ள மீளியல் குணகம் 5 எனில், இரண்டாவது மோதலுக்குப்பின் இரு பந்துகளும் முறையே $\frac{a}{8}$, $\frac{a}{2}$ தூரங் களுக்கு எழும்பும் என்று காட்டுக. (a என்பது குழாயின் ஆரை).

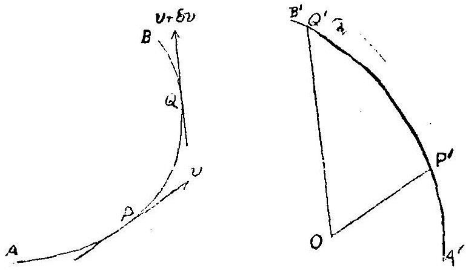
56. P என்னும் ஒரு புள்ளி r ஆரையுள்ள ஒரு வட்டத்தை ω என்னும் சீரான கோண வேகத்துடன் வரைகிறது. மையத்தி லிருந்து $\frac{1}{2}$ r தூரத்திலுள்ள Q என்னும் புள்ளியைப்பற்றி P-யின் கோணவேகம் $\frac{2}{3}\omega$க்கும் 2ωக்குமிடையே மாறுபடுமென்று காட்டுக,

57. இரு துகள்கள் ஒரே புள்ளியிலிருந்து ஒரே நேரத்தில் இரு நேர்கோடுகளின் வழியே ஒன்று u எனும் சீரான வேகத் துடனும், மற்றது f எனும் சீரான் முடுக்கத்துடனும் புறப்படு கின்றன. அவற்றின் சார்வேகம் $\frac{u \cos \alpha}{f}$ நேரத்திற்குப்பின் மீச்சிறியதாக யிருக்குமென்றும், மீச்சிறு சார்வேகம் $u \text{ Sin } \alpha$ என்றும் காட்டுக ; α என்பது இரு கோடுகளுக்குமிடையே யுள்ள கோணம்.

ஒழுங்குப்படம் (Modograph)

ஒரு துகள் ஏதேனுமொரு பாதையில் நகர்ந்து கொண்டிருந் தால், அப் பாதையில் P என்னும் ஏதேனுமொரு நிலேயில் துகள் பெற்றிருக்கும் திசைவேகமானது, O என்னும் ஒரு நிலேயான புள்ளி வழியே வரையப்படும் OP^1 என்னும் நேர்கோட்டுத் துண்டினல் அளவிலும் திசையிலும் குறிப்பிடப்படின் முனே P^1

ஆல் வரையப்படும் வளைவரையானது அத்துகளின் பாதையின் ஒழுங்குப் படம் எனப்படும்.



படம் 104

AB என்னும் ஒரு வளைவரைப் பாதையில் ஒரு துகள் நகர்ந்து கொண்டிருக்கிறது, P, Q என்பன முறையே $t, t+\delta t$ நேரங்களில் துகளின் நிலைகள் ; $\vec{v}$, $\vec{v}+\delta\vec{v}$ என்பன அந்நிலைகளில் துகள் பெற்றுள்ள திசைவேகங்கள்.

இப்பொழுது O என்னும் ஒரு நிலையான புள்ளியிலிருந்து $\vec{v}$, $\vec{v}+\delta\vec{v}$ ஆகிய திசைவேகங்களை அளவிலும் திசையிலும் குறிப்பிடுமாறு முறையே $\vec{OP^1}$, $\vec{OQ^1}$ என்னும் ஆரைத் திசையிக்கள் வரைக. இதுபோல், துகளின் பாதை AB-யில் ஒவ்வொரு நிலையிலும் துகள் பெற்றிருக்கும் திசைவேகத்தை அளவிலும், திசையிலும் குறிப்பிடுமாறு O-விலிருந்து ஆரைத் திசையிக்கள் வரையலாம். இவ்வாரைத் திசையிக்களின் முனைகள் யாவும் $A^1 B^1$ என்னும் ஒரு வளைவரையில் அமையும். அதாவது, துகளானது AB என்னும் பாதையில் நகரும்போது அதன் வேகத்தை அளவிலும், திசையிலும் குறிப்பிடுகின்ற ஆரைத் திசையி OP^1இன் முனையாகிய P^1 ஆனது $A^1 B^1$ என்னும் வளைவரையின்மீது நகரும். இவ்வாறு ஒரு துகளின் வேகத்தை அளவிலும் திசையிலும் குறிப்பிடுமாறு ஒரு நிலையான புள்ளி வழியே வரையப்படுகின்ற ஆரைத் திசையியின் முனையின் நியமப் பாதையே துகளின் பாதையின் ஒழுங்குப்படம் எனப்படுகிறது. இங்கு $A^1 B^1$ என்பது ABயின் ஒழுங்குப் படமாகும்.

இப்பொழுது, $\overrightarrow{OP^1} = \vec{v}$; $\overrightarrow{OQ^1} = \vec{v} + \overrightarrow{\delta v}$.

ஆகவே, P, Q ஆகிய நிலைகளில் துகளின் வேகங்களின் மாறுபாடு ஒழுங்குப் படத்தில் நாண் P^1Q^1ஆல் அளவிலும் திசையிலும் குறிப்பிடப்படும்.

$$\text{ஏனெனில்,} \quad \overrightarrow{OP^1} + \overrightarrow{P^1Q^1} = \overrightarrow{OQ^1}$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{P^1Q^1} = \overrightarrow{OQ^1} - \overrightarrow{OP^1}$$

$$= (\vec{v} + \overrightarrow{\delta v}) - \vec{v}$$

$$= \text{திசைவேக மாறுபாடு.}$$

இத்திசைவேக மாறுபாடு ஏற்படுகின்ற நேரம் δt ஆகையால்,

$$\text{திசைவேக மாறுபாட்டு வீதம்} = \frac{(\vec{v} + \overrightarrow{\delta v}) - \vec{v}}{\delta t}$$

$$\therefore \quad P\text{-யில் துகளின் முடுக்கம்} = \lim_{\delta t \to O} \left[\frac{(\vec{v} + \overrightarrow{\delta v}) - \vec{v}}{\delta t} \right]$$

$$= \lim_{\delta t \to O} \left[\frac{\text{நாண் } P^1Q^1}{\delta t} \right]$$

$$= \lim_{\delta t \to O} \left[\frac{\text{நாண் } P^1Q^1}{\text{வில் } P^1Q^1} \cdot \frac{\text{வில் } P^1Q^1}{\delta t} \right]$$

$$= \lim_{\delta t \to O} \left[\frac{\text{நாண் } P^1Q^1}{\text{வில் } P^1Q^1} \right] \cdot \lim_{\delta t \to O} \left[\frac{\text{வில் } P^1Q^1}{\delta t} \right]$$

$= 1.$ P^1இல் வேகம்

$=$ ஒழுங்கு படத்தில் P^1 இன் வேகம்.

ஆகவே, ஒழுங்குப் படத்தில் ஏதேனுமொரு புள்ளியில் வேகமானது அவ்வொழுங்குப் படத்திற்குரிய பாதையில் அப்புள்ளியைக் குறிப்படுகின்ற புள்ளியில் துகளின் முடுக்கத்திற்கு அளவிலும் திசையிலும் சமமாகயிருக்கும். இது ஒழுங்கு படத்தின் முக்கியச் சிறப்பியல்பு ஆகும்.

குறிப்பு: O வழிவே செல்லும் ஏதேனுமிரு செங்குத்து அச்சுக்களைக் குறித்து P, P^1 ஆகிய புள்ளிகளின் அச்சுத் தூரங்

கள் முறையே (x, y), (X, Y) என்க. வரையறையின்படி $\overrightarrow{OP^1} = P$யின் திசைவேகம். ஆகவே, λ என்பது ஒருமாறிலி யாயின்,

$$X = \lambda \frac{dx}{dt}, \; Y = \lambda . \frac{dy}{dt} \qquad \dots \qquad (1)$$

ஆகும்.

$$\therefore \quad \frac{dX}{dt} = \lambda . \frac{d^2 x}{dt^2}, \; \frac{dY}{dt} = \lambda . \frac{d^2 y}{dt^2} \qquad \dots \qquad (2)$$

சமன்பாடு (2) இலிருந்து ஒழுங்குப் படத்தின் சிறப்பியல்பினைக் காணலாம்.

இப்பொழுது Oஐத் துருவமாகவும், x அச்சைத் தொடக்கக் கோடாகவும் கொண்டு (r, θ) என்பன P^1-இன் துருவ ஆயத் தொலைகளெனில்,

$$\begin{aligned} r &= OP^1 \\ &= \sqrt{X^2 + Y^2} \\ &= \sqrt{\lambda^2 \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \lambda^2 \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \\ &= \lambda v, \text{ ஏனெனில் } \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = v^2 \end{aligned}$$

மேலும் x அச்சுடன் v-இன் திசையின் சாய்வு Ψ எனில்,

$\tan \Psi = \dfrac{dy}{dx}$.

$$\therefore \quad \tan \theta = \frac{Y}{X} = \frac{\lambda \left(\frac{dy}{dt}\right)}{\lambda \left(\frac{dx}{dt}\right)} = \frac{dy}{dx} = \tan \Psi$$

$$\therefore \quad \theta = \Psi.$$

ஆகவே, துகளின் பாதையிலிருந்து ஒழுங்குப் படத்தின் சமன் பாட்டைக் காண, முதலில் துகளின் வேகம் v-க்கும், ஒரு நிலை யான திசையுடன் (x-அச்சுடன்) v-இன் திசையின் சாய்வு Ψ-க்குமிடையே யுள்ள தொடர்பு $v = f(\Psi)$ ஐக் காணவும், இத்தொடர்பில் $v = \dfrac{r}{\lambda}$ என்றும், $\Psi = \theta$ என்றும் பிரதியிட்டு

$\frac{r}{\lambda} = f(\theta)$ அல்லது $r = \lambda f(\theta)$ என்று ஒழுங்குப் படத்தின் துருவச் சமன்பாட்டைப் பெறலாம்.

மாதிரி **143.** புவியீர்ப்பின் கீழ் ஒரு துகள் ஒரு பரவளைவை வரைகிறது. அதன் பாதையின் ஒழுங்குப் படம் பரவளைவின் அச்சுக்கு இணையான ஒரு நேர் கோடு என்றும், சீரான வேகத்துடன் வரையப்பட்டதென்றும் காட்டுக.

தீர்வு: புவியீர்ப்பின் கீழ் துகள் நகருவதால், கிடைத்திசை முடுக்கம் பூச்சியமென்றும், நிலைக்குத்து முடுக்கம் $-g$ என்றும் காணலாம்.

கிடைத்திசையை x-அச்சாகவும், நிலைக்குத்தை y-அச்சாகவும் கொள்க.

$$\therefore \text{ கிடைத்திடை முடுக்கம் } \frac{d^2x}{dt^2} = 0; \qquad \ldots \quad (1)$$

$$\text{நிலைக்குத்து முடுக்கம் } \frac{d^2y}{dt^2} = -g \qquad \ldots \quad (2)$$

(1)ஐத் தொகையீடு செய்க.

$$\frac{dx}{dt} = \text{மாறிலி} = c \text{ என்க.}$$

இப்பொழுது, துகளின் பாதையில் (x, y) என்னும் புள்ளிக்குரிய ஒழுங்குப் படப்புள்ளி (X, Y) எனில்,

$X = (x, y)$ புள்ளியில் துகளின் வேகத்தின் x-அச்சுக்கூறு என்றும்,

$Y = (x, y)$ புள்ளியில் துகளின் வேகத்தின் y-அச்சுக்கூறு என்றும் அறிவோம்.

$$\therefore \quad X = k.\frac{dx}{dt} = kc$$

$kc = a$ என்று கொண்டால்,

$$X = a \text{ ஆகும்.}$$

ஆகவே, (X, Y) என்ற புள்ளியின் நியமப்பாதை $X = a$ என்ற நிலைக்குத்துக்கோடு ஆகும். இது பரவளைவுப் பாதையின் அச்சுக்கு இணையான நேர்கோடு.

மேலும், ஒழுங்குப் படத்திலுள்ள ஏதேனுமொரு புள்ளியில் வேகமானது துகளின் பாதையில் அதற்குரிய புள்ளியின் முடுக்கத்திற்குச் சமமென்றிவோம்.

$$\therefore \quad \frac{dX}{dt} = k.\frac{d^2 x}{dt^2} = O, \qquad (1) \text{ இலிருந்து}$$

$$\frac{dY}{dt} = k\,\frac{d^2 y}{dt^2} = -kg, \quad (2) \text{ இலிருந்து.}$$

$\therefore$ ஒழுங்குப் படத்தில் (X, Y) புள்ளியின் வேகம்

$$= \sqrt{\left(\frac{dX}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dY}{dt}\right)^2}$$

$$= \sqrt{O + k^2 g^2}$$

$$= kg$$

= மாறிலி.

மாதிரி 144. ஒரு கயிற்றுவளை (catenary)யின் அச்சுக்கு இணையான முடுக்கத்தின் கீழ் வரையப்பட்ட அக்கயிற்றுவளைப் பாதையின் ஒழுங்குப்படம், அப்பாதையிலுள்ள திசை வேகத்திற்கு விகித சமமான திசை வேகத்துடன் வரையப்படும் ஒரு நேர்கோடு என்று நிறுவுக.

தீர்வு : கயிற்றுவளையின் அச்சு நிலைக்குத்தாகயிருக்கும்.

$\therefore$ துகளின் முடுக்கம் நிலைக்குத்தாகயிருக்கும்.

ஆகவே, கிடைத்திசையில் முடுக்கம் எதுவும் கிடையாது.

அதாவது, $\dfrac{d^2 x}{dt^2} = O$

தொகையீடுகாணின், $\dfrac{dx}{dt}$ = மாறிலி = a என்க

கயிற்றுவளைப் பாதையிலுள்ள (x, y) என்னும் புள்ளிக்குரிய புள்ளி ஒழுங்குப் படத்தில் (X, Y) என்று கொள்க. எனவே, X, Y என்பன (x, y) புள்ளியில் துகளின் வேகத்தின் கிடைத்திசை, நிலைக்குத்துத்திசைக் கூறுகளாகும்.

அதாவது, $X = \lambda.\,\dfrac{dx}{dt} = \lambda\, a.$

ஆகவே, (X, Y) என்ற புள்ளியின் நீயமப்பாதை $X = \lambda a$ என்னும் நேர்கோடாகும். இக்கோடு y-அச்சுக்கு, அதாவது கயிற்றிவளையின் அச்சுக்கு இணையான நேர்கோடு ஆகும். அதாவது, கயிற்றுவளைப் பாதையின் ஒழுங்குப் படம், அதன் அச்சுக்கு இணையான ஒரு நேர்கோடாகும்.

கயிற்றுவளையின் சமன்பாடு $y = c \cos h \dfrac{x}{c}$.

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \sin h \frac{x}{c} \qquad \ldots \qquad (1)$$

கயிற்றுவளையில் (x, y) புள்ளியில் திசைவேகம் v எனில்,

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

ஆனல் $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy}{dx} \cdot \dfrac{dx}{dt} = \left(\sin h \dfrac{x}{c}\right) \cdot a = a \sin h \dfrac{x}{c}$.

$$\therefore \quad v^2 = a^2 + a^2 \sin h^2 \frac{x}{c}$$

$$= a^2 \cos h^2 \frac{x}{c}$$

$$\therefore \quad v = a \cos h \frac{x}{c}$$

இப்பொழுது, $X = \lambda \cdot \dfrac{dx}{dt} = \lambda a$,

$$\therefore \frac{dX}{dt} = O,$$

$$Y = \lambda \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$\therefore \frac{dY}{dt} = \lambda \cdot \frac{d^2 y}{dt^2}$$

ஆனல், $\dfrac{dy}{dt} = a \sin h \dfrac{x}{c}$

$$\therefore \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{a}{c} \cos h \frac{x}{c} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{a}{c} \cos h \frac{x}{c} \cdot a$$

$$= \frac{a^2}{c} \cos h \frac{x}{c}$$

$$\therefore \quad \frac{dY}{dt} = \lambda . \ \frac{a^2}{c} \cos h \frac{x}{c}$$

$\therefore$ ஒழுங்குப் படத்தில் (X, Y) புள்ளியில் வேகம்

$$= \sqrt{\left(\frac{dX}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dY}{dt}\right)^2}$$

$$= \sqrt{O + \frac{\lambda^2 a^4}{c^2} \cos h^2 \frac{x}{c}}$$

$$= \frac{\lambda a^2}{c} \cos h \frac{x}{c}$$

$$= \frac{\lambda a}{c} a \cos h \frac{x}{c}$$

$$= \left(\frac{\lambda a}{c}\right) v$$

$$\propto v.$$

மாதிரி **145.** ஒரு ஒழுங்குப்படம் அதன் மீதுள்ள ஏதேனுமொரு புள்ளியைச் சுற்றி மாருச் சுழல்வேகத்துடன் வரையப்படும் ஒரு வட்டமெனில் அப்படத்திற்குரிய பாதை ஓர் உருள் வளை (Cycloid) என்று காட்டுக.

தீர்வு : ஒழுங்குப்படம் அதன் மேலுள்ள O என்னும் புள்ளியைச் சுற்றி ω என்னும் மாருச் சுழல்வேகத்துடன் வரையப் படுவதாகக் கொள்க.

O-ஐத துருவமாகவும், Oவழி விட்டத்தைத் தொடக்கக் கோடாகவும் கொள்க. வட்டத்தின் ஆரை a எனில், அதன் சமன்பாடு

$$r = 2a \cos \theta \qquad \dots \quad \dots \quad (1)$$

ஆகும். $P(r, \theta)$ என்பது ஒழுங்குப் படத்தில் ஏதேனுமொரு புள்ளியெனில்,

$$r = \lambda v, \quad \theta = \Psi$$

என்று நாம் அறிவோம். இங்கு λ ஒரு மாறிலி ; v என்பது பாதையிலுள்ள புள்ளியில் வேகம் ; Ψ என்பது தொடக்கக் கோட்டுடன் v-இன் சாய்வு.

இப்பொழுது, $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ ஆகையால், $\frac{d\Psi}{dt} = \omega$.

சமன்பாடு (1)இல் $r = \lambda v$, $\theta = \Psi$ என்று பிரதியிடவும்.

$$\gamma v = 2a \cos \Psi.$$

ஆனல் $v = \frac{ds}{dt}$ $\therefore \gamma \frac{ds}{dt} = 2a \cos \Psi$

$$\therefore \frac{ds}{dt} = \frac{2a}{\lambda} \cos \Psi$$

$$\frac{ds}{d\Psi} \cdot \frac{d\Psi}{dt} = \frac{2a}{\lambda} \cos \Psi$$

$$\frac{ds}{d\Psi} \cdot \omega = \frac{2a}{\gamma} \cos \Psi.$$

$$\therefore ds = \frac{2a}{\lambda\omega} \cos \Psi \, d\Psi.$$

தொகையீடு காண்க. $S = \frac{2a}{\lambda\omega} \sin \Psi + A$, A என்பது மாறிலி.

இப்பொழுது $S = O$, $\Psi = O$ என்று கொண்டால் $A = O$.

$$\therefore S = \frac{2a}{\lambda\omega} . \sin \Psi$$

$\frac{2a}{\lambda\omega} = 4b$ என்று கொண்டால், பாதையின் சமன்பாடு

$$S = 4b \text{ Sin } \Psi$$

என்று காணலாம். இது ஒரு உருள்வளையின் உள்ளீட்டுச் சமன்பாடு.

பயிற்சி 14

1. ஒரு எறிபொருளின் பாதையின் ஒழுங்குப்படம் ஒரு நிலைக்குத்து நேர்கோடு என்று நிறுவுக.

2. மாரு முடுக்கத்துடன் வரையப்படும் ஒரு நேர்கோட்டுப் பாதையின் ஒழுங்குப்படம் ஒரு இணைநேர்கோடு என்றும், மாரு வேகத்துடன் வரையப்படும் ஒரு நேர்கோட்டுப் பாதையின் ஒழுங்குப்படம் ஒரு புள்ளியென்றும் காட்டுக.

3. t நேரத்தில் $x = t^3/_3$, $y = t^2/_2$ என்ற அச்சுத் தூரங்களைக் கொண்ட புள்ளியால் வரையப்படும் பாதையின் ஒழுங்குப் படம் ஒரு பரவளைவு என்று நிறுவுக.

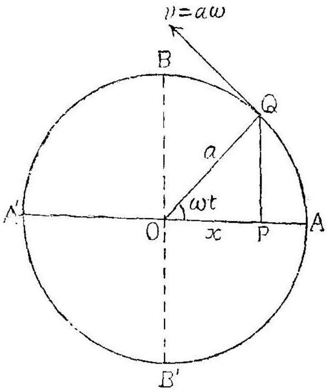
4. அச்சு நிலைக்குத்தாகவும், மிக உயர்ந்த புள்ளியை உச்சியாகவும் கொண்ட ஒரு உருள்வளை வடிவமான குழாயின் மிக உயர்ந்த புள்ளியிலிருந்து நழுவுகின்ற ஒரு துகளின் பாதையின் ஒழுங்குப்படம் ஒரு வட்டம் என்று நிறுவுக.

5. ஒரு வழவழப்பான நிலைக்குத்து வட்டத்தின் மிக உயர்ந்த புள்ளியிலிருந்து ஒரு குன்றிமணி நழுவுகிறது. அதன் பாதையின் ஒழுங்குப்படம் $r = \lambda \sin \frac{\theta}{2}$ என்ற அமைப்பிலிருக்குமென்று காட்டுக.

8. சாமானிய சீரிசை இயக்கம்
(Simple Harmonic Motion)

சாமானிய சீரிசை இயக்கம் பற்றி விளக்கம்

a ஆரையுடைய ஒரு வட்டத்தின் பரிதியின்மீது Q என்னும் துகள் மாறு வேகத்துடன் நகர்ந்து கொண்டிருப்பதாகக் கொள்க. O என்பது வட்டக்தின் மையம். AA^1 என்பது வட்டத்தின் ஒரு நிலையான விட்டம். துகளானது மாறுவேகத் துடன் நகர்ந்து கொண்டிருப்பதால், வட்ட மையத்தைப் பொறுத்து அதன் சுழல் வேகம் ஒரு மாறிலியாகயிருக்கும். பரிதியின்மீது அதன்வேகம் v என்றும், மையத்தைப் பொறுத்து அதன் சுழல்வேகம் ω என்றும் கொண்டால் $v = a\omega$ ஆகும். தொடக்கத்தில் துகள் A-யிலிருந்து புறப்படுவதாகவும், t நேரத்தில் அது Q என்னும் புள்ளியிலிருப்பதாகவும் கொள்க.



படம் 105

$\therefore$ $A\hat{O}Q = \omega t$, வில் $AQ = vt$ $= a\omega t$ ஆகும்.

P என்பது Q-விலிருந்து விட்டம் AA^1க்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோட்டின் அடி என்று கொள்க. துகளானது A-யிலிருக்கும்போது P-யின் நிலையும் A ஆகும். துகளானது பரிதியில் AQ வழியே நகரும்போது P-யானது AO வழியே நகரும். துகள் B-யை அடையும்போது P-யானது வட்ட மையம் O-ஐ அடையும். பின் துகளானது B-யிலிருந்து பரிதி வழியே நகர்ந்து A^1ஐ அடையும்போது P-யானது O-விலிருந்து OA^1 வழியே நகர்ந்து A^1 ஐ அடையும். அதன் பின்னர், துகளானது, A^1-இலிருந்து புறப்பட்டு B^1ஐ அடையும்போது P-யானது O-ஐ அடைகிறது. பின்னர், துகள் B^1இலிருந்து பரிதி வழியே நகர்ந்து A-யை மீண்டும் அடையும் போது P-யும் O-விலிருந்து புறப்பட்டு OA வழியே நகர்ந்து Aயை

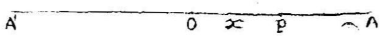
மீண்டும் அடைகிறது. இவ்வாறு துகளானது A-யிலிருந்து புறப்பட்டு வட்டத்தின் பரிதிவழியே நகர்ந்து வட்டத்தை ஒரு முறை சுற்றி மீண்டும் A-ஐ அடையும்போது, துகளின் நிலையிலிருந்து விட்டம் AA^1க்கு வரையப்படும் செங்குத்தினடி A-யிலிருந்து புறப்பட்டு விட்டம் AA^1மீது நகர்ந்து வட்ட மையம் O-ஐக் கடந்து விட்டத்தின் மறுமுனை A^1ஐ அடைந்து, பின் மீண்டும் நகர்ந்து வந்த வழியே திரும்பி, வட்ட மையத்தைக் கடந்து திரும்பவும் புறப்பட்ட இடம் A-யை அடைகிறது. இவ்வாறு P-ஆனது A-யிலிருந்து புறப்பட்டு விட்டம் AA^1 வழியே நகர்ந்து A^1ஐ அடைந்துபின் வந்த பாதையில் திரும்பி மீண்டும் A^1ஐ அடைவதற்கு ஒரு முழு அலைவு (complete oscillation) என்று பெயர். P-யின் இத்தகைய இயக்கத்திற்குச் சாமானிய சீரிசை இயக்கம் என்று பெயர். P-யின் ஒரு முழு அலைவுக்கு ஆகும் நேரம் Q-ஆனது வட்டத்தை ஒரு முறை சுற்றுவதற்கு ஆகும் நேரமேயாகும். துகளின் சுழல்வேகம் விநாடிக்கு ω ஆரையன்களாகையால், ஒரு முழுச் சுற்றின்போது 2π ஆரையன்கள் சுற்றுவதற்கு ஆகும் நேரம் $\frac{2\pi}{\omega}$ விநாடிகளாகும். இந்த அலைவு நேரமே துகளின் சாமானிய சீரிசை இயக்கத்தின் "காலவட்டம்" (Period) அல்லது "காலவட்ட நேரம்" (Periodic Time) ஆகும். P-யின் பாதைக்கோட்டின் இரு முனைகளாகிய A-யும், A^1-ம் P-யின் எல்லை நிலைகளாகும். இவ்விரு எல்லை நிலைகளுக்கும் நடுவிலுள்ள புள்ளியாகிய O என்பது P-யின் "அலைவு மையம்" (centre of oscillation) ஆகும். அலைவு மையத்திற்கும் ஏதேனுமொரு எல்லை நிலைக்குமிடையேயுள்ள தூரமானது சாமானிய சீரிசை இயக்கத்தின் "வீச்சு" (amplitude) எனப்படும். இங்கு வீச்சு என்பது சாமானிய சீரிசை இயக்கத்தை வருவிக்கின்ற வட்டப் பாதையின் ஆரையாகும். ஒரு விநாடியில் நிகழ்கின்ற அலைவுகளின் எண்ணிக்கையே அலைவு எண் (frequency) ஆகும். மேற்கூறப்பட்ட உதாரணத்தில் அலைவு எண் $\frac{\omega}{2\pi}$ ஆகும். P-ஆனது ஒரு முழு அலைவின்போது A-க்கும் A^1க்குமிடையேயுள்ள எந்தப் புள்ளியையும் இருமுறை எதிரெதிர் விசைகளில் கடந்து செல்லும். Q-ஆனது வட்டப் பாதையில் இடஞ்சுழியாகச் சுற்றுமெனில், அது AA^1க்கு மேலரை வட்டம் அல்லது கீழரைவட்டம் ஆகியவற்றின்மீது நகருவதற்கேற்ப P-ஆனது சா. சீ. இயக்கப் பாதையில் வலமிருந்து இடமாகவோ அல்லது இடமிருந்து வலமாகவோ நகரும்.

சாமானிய சீரிசை இயக்கம் (சா. சீ. இ.)–வரையறை

ஒரு நேர்கோட்டின்மீது நகருகின்ற ஒரு துகளின் முடுக்கம் எப்பொழுதும் அக்கோட்டின் மேலுள்ள ஒரு நிலையான புள்ளியை நோக்கியே செயல்படுமாறும், அப்புள்ளியிலிருந்து அத்துகளின் தூரத்திற்கு விகித சமத்திலிருக்குமாறும் இருப்பின், அந்நேர் கோட்டின்மீதுள்ள அத்துக்களின் இயக்கம் ''சாமானிய சீரிசை இயக்கம்'' (Simple Harmonic Motion) எனப்படும். இதைச் சுருக்கமாக சா. சீ. இ. (S. H. M.) என்று குறிப்பிடலாம்.

சாமானிய சீரிசை இயக்கத்தின் சமன்பாடு காணல் :

O என்பது A^1A என்னும் நேர்கோட்டின் நடுப்புள்ளி. *O*-ஐ அலைவு மையமாகவும், A, A^1 என்னும் புள்ளிகளை எல்லை நிலைகளாகவும் கொண்டு ஒரு துகள் சாமானிய சீரிசை இயக்கத்திலிருப்பதாகக் கொள்க.



படம் 106

துகளானது *A*-யிலிருந்து புறப்பட்டு *O*-ஐ நோக்கிய முடுக்கத்துடன் A, A^1 ஆகிய புள்ளிகளுக் கிடையே அலைவு இயக்கத்திலிருப்பதாகவும், *t* நேரத்தில் துகள் *P* என்னும் நிலையிலிருப்பதாகவும் கொள்க.

$OP = x$ எனில் துகளின் முடுக்கம் x–க்கு விகித சமமாகவும், *O*-ஐ நோக்கியுமிருக்கும். துகளின் தூரம் x-ஆனது *O*-விலிருந்து அளவிடப்படுவதாலும், முடுக்கமானது *O*-ஐநோக்கிச் செயல் படுவதாலும் *t* நேரத்தில் அதன் முடுக்கமாகிய $\frac{d^2x}{dt^2}$-ம், அதன் தூரமாகிய x-ம் எதிரடையாளங்களுடனிருக்கும். ஆகவே, μ என்பது நேரடையாளமுடைய விகிதசம மாறிலியெனில், துகளின் இயக்கத்தை

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu x \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (1)$$

என்ற சமன்பாட்டின்மூலம் குறிப்பிடலாம்.

ஆனல் $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v$ ஆகையால்,

$$v \cdot \frac{dv}{dx} = -\mu x$$

அல்லது, $v . dv = -\eta x\, dx.$

தொகையீடுகாணின், $\frac{v^2}{2} = -\mu \frac{x^2}{2}$ + தொகையீட்டு மாறிலி

அதாவது, $v^2 = -\mu x^2 + C,$

துகளானது A, A^1 ஆகிய புள்ளிகளை எல்லை நிலைகளாகக் கொண்டு சா. சீ. இயக்கத்திலிருப்பதால் இப்புள்ளிகளில் துகளின் வேகம் பூச்சியமாகும். ஆகவே, $OA = a$ எனில், துகள் A-யிலிருக்கும்போது $x = a, v = O$ ஆகும்.

$$\therefore \quad O = -\mu a^2 + C$$

அல்லது, $C = \mu a^2$

$$\therefore \quad v^2 = -\mu x^2 + \mu a^2$$
$$= \mu (a^2 - x^2)$$

அல்லது, $v = + \sqrt{\mu} \sqrt{a^2 - x^2}$

இப்பொழுது துகளானது A-யிலிருந்து O-ஐ நோக்கி நகரும்போது அதன் வேகம் அதிகரிக்கிறது. ஆனால் O-விலிருந்து அதன் தூரம் குறைகிறது. அதாவது, நேரம் t அதிகமாக அதிகமாக, தூரம் x குறைந்து கொண்டேயிருக்குமாகையால் $\frac{dx}{dt} = v$ என்பது எதிரடையாள முடனிருக்கும்.

$$\therefore \quad v = -\sqrt{\mu} \sqrt{a^2 - x^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

இச்சமன்பாட்டிலிருந்து துகளின் எந்த நிலையிலும் அதன் வேகத்தைக் காணலாம்.

இப்பொழுது, $v = \frac{dx}{dt}$ ஆகையால்,

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{\mu} \sqrt{a^2 - x^2}$$

அல்லது, $\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\sqrt{\mu} \cdot dt$

தொகையீடு காணின், $-\cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) = -\sqrt{\mu} + t$ தொகையீட்டு மாறிலி.

அதாவது, $\cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) = \sqrt{\mu}\, i + C_1$

தொடக்கத்தில் துகள் A-யிலிருக்கும்போது, $t = O$, $x = a$

$$\therefore \quad C_1 = O.$$

$$\therefore \quad \cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) = \sqrt{\mu}\, t$$

அல்லது, $\dfrac{x}{a} = \cos \sqrt{\mu}\, t$

$$x = a \cos \sqrt{\mu}\, t \qquad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

இச் சமன்பாட்டிலிருந்து எந்த நேரத்திலும் O-விலிருந்து துகளின் தூரத்தைக் கணக்கிடலாம்.

காலவட்ட நேரம் (Periodic time)

$$x = a \cos \sqrt{\mu}\, t$$

$$= a \cos (\sqrt{\mu}\, t + 2\pi)$$

$$= a \cos \sqrt{\mu}\left(t + \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}\right)$$

ஆகவே, t-ஆனது $t + \dfrac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$ ஆக மாறும்போதும் துகளானது O-விலிருந்து அதே தூரத்திலிருக்குமென்று காண்கிறோம். அதாவது, துகளானது t நேரத்தின்போது எந்த நிலையிலிருக்கின்றதோ அதே நிலையை மீண்டும் $\dfrac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$ நேரத்திற்குப்பின் அடைகிறது. இவ்வாறு துகளானது இதன் இயக்கப் பாதையில் ஏதேனுமொரு நிலையை அடுத்து மீண்டும் அடைவதற்கு எடுத்துக் கொள்ளும் நேரமே அதன் இயக்கத்தின் காலவட்டம் (Period) அல்லது காலவட்ட நேரம் (Periodic Time) எனப்படுமாகையால், மேற்கூறப்பட்ட சாமானிய சீரிசை இயக்கத்தின் காலவட்டநேரம் $\dfrac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$ என்று காண்கிறோம். இக்காலவட்டமானது சாமானிய சீரியக்கத்தின் வீச்சு (amplitude) ஆகிய $a\ (= OA)$-ஐச் சாராதிருப்பதைக் கவனிக்கவும்.

இக் காலவட்டமானது, துகள் A-யிலிருந்து O வரை செல்வதற்கு எடுத்துக் கொள்ளும் நேரத்தைப்போல் நான்கு மடங்காகும். ஏனெனில், துகள் O-விலிருக்கும்போது $x = O$ ஆகும். அப்போதைய நேரம் t_1 எனில்,

சமன்பாடு (3) இலிருந்து,

$$O = a \cos \sqrt{\mu}\, t_1$$

$$\therefore \quad \sqrt{\mu}\, t_1 = \pi/2$$

அல்லது, $t_1 = \dfrac{\pi}{2\sqrt{\mu}}$

$$\therefore \quad 4t_1 = 4 \times \frac{\pi}{2\sqrt{\mu}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\eta}} = \text{காலவட்டம்.}$$

துகள் O-ஐ அடைந்ததும் $x = O$ ஆகிவிடுவதால் முடுக்கம் பூச்சியமாகி விடுகிறது. ஆனால் சமன்பாடு (2) இலிருந்து அதன் வேகம்

$$v = -\sqrt{\mu}\,(\sqrt{a^2 - O}) = -\sqrt{\mu}\, a$$

என்று காண்கிறோம். வேகம் எதிரடையாளமுடனிருப்பதால் AO^1 திசையை நோக்கியிருப்பதாக அறிந்து கொள்க. ஆகவே, துகள் O-ஐ அடைந்ததும் அதன் முடுக்கம் மறைந்து விடுகிறது; ஆனால் அதன்வேகம் உச்சமடைகிறது. அதன் பின்னர் துகள் இந்த வேகத்துடனும், O-ஐ நோக்கிய எதிர் முடுக்கத்துடனும் OA^1 திசையில் நகருவதால் அதன் வேகம் குறைந்து கொண்டேயிருக்கும். துகள் A^1-ஐ அடைந்ததும் அதன் வேகம் மறைந்து விடுகிறது. ஆனால் அது O-விலிருந்து மிக அதிக தூரத்திலிருப்பதால் அதன் O-ஐ நோக்கிய முடுக்கம் உச்சமடைகிறது. இவ்வுச்ச முடுக்கத்துடன் துகளானது A^1இலிருந்து புறப்பட்டு A^1O-ஐ நோக்கி நகரும். துகள் மீண்டும் O-ஐ அடையும்போது அதன் முடுக்கம் பூச்சியமாகி, வேகம் உச்சமடைகிறது. இவ்வுச்ச வேகத்துடன் O-விலிருந்து OA திசையில் துகள் நகரும் போது அதன் இயக்கத்திற்கெதிரான O-ஐ நோக்கிய எதிர் முடுக்கம் செயல்படுவதால் அதன் வேகம் குறைந்து கொண்டேயிருக்கும். துகள் A-யை மீண்டும் அடையும்போது அதன் வேகம் மறைந்து O-ஐ நோக்கிய முடுக்கம் உச்ச நிலை பெறுகிறது. இவ்வுச்ச முடுக்கத்துடன் துகள் மீண்டும் தன் இயக்கத்தை முன்போலவே தொடரும் இவ்வாறு துகளானது A-க்கும் A^1க்குமிடையே அலைவு இயக்கத்தில் நகர்ந்து கொண்டிருக்கும். துகள் A-யிலிருந்து புறப்பட்டு A^1ஐ அடைவது ஓர் அதிர்வு எனப்படும். A-யிலிருந்து புறப்பட்டு O வழியே A^1ஐ அடைந்து, பின் அதே பாதையில் O வழியே திரும்பி மீண்டும் A^1ஐ அடைவது ஓர் அலைவு (oscillation) என்று சொல்லப்படுகிறது. ஆகவே, துகளின் ஓர் அலைவுக் காலமே காலவட்டமாகிறது. ஒரு வினாடி நேரத்தில் துகள் செய்கின்ற அலைவுகளின்

எண்ணிக்கையே அலைவெண் (Frequency) எனப்படும். கால வட்டம் $\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$ ஆகையால் அலைவெண் $\frac{\sqrt{\mu}}{2\pi}$ ஆகும்.

காலகட்டமும் கலையும் (Epoch and Phase)

மேற்கண்ட சாமானிய சீரிசை இயக்கச் சமன்பாடு வருவிக்கும்போது துகளானது A என்னும் நிலையிலிருந்து புறப் படுவதாகக் கொள்ளப்பட்டது. அதன் இயக்க காலமும் அதே நிலையிலிருந்து அளவிடப்பட்டன. மாருக, துகளானது எல்லை நிலை A-யிலிருந்து புறப்பட்டு t^1 நேரத்திற்குப் பின்னர் காலம் அளவிடப்படத் தொடங்குவதாகக் கொள்வோம். எனவே, $-t^1$ நேரத்தில் துகள் எல்லைநிலை A-யில் இருந்திருக்கும். ஆனால் A-யில் துகளின் வேகம் பூச்சியமாகும். O-விலிருந்து அதன் தூரம் $x = a$ ஆகும்.

ஆகவே, $\cos^{-1} \frac{x}{a} = \sqrt{\mu}\, t + C_1$

என்ற தொகையீட்டுச் சமன்பாட்டில் $x = a$, $t = -t^1$ என்று பிரதியிட,

$$\cos^{-1} \frac{a}{a} = -\sqrt{\mu}\, t^1 + C_1$$

அல்லது, $C_1 = \sqrt{\mu}\, t^1$ என்று காணலாம்.

$$\therefore \cos^{-1} \frac{x}{a} = (\sqrt{\mu}\, t + \sqrt{\mu}\, t^1)$$

$$\therefore \frac{x}{a} = \cos (\sqrt{\mu}\, t + \sqrt{\mu}\, t^1$$

அல்லது, $x = a \cos (\sqrt{\mu}\, t + \sqrt{\mu}\, t^1)$

$\sqrt{\mu}\, t^1 = \epsilon$ என்று கொள்வோமாயின்,

$$x = a \cos (\sqrt{\mu}\, t + \epsilon) \qquad \dots \quad \dots \qquad (4)$$

என்ற "தூர-நேரச் சமன்பாட்டை"ப் பெறுகிரோம். இங்கு $\epsilon = \sqrt{\mu}\, t^1$ என்னும் கணியம் தொடக்கக் காலத்தைச் சார்ந் திருப்பதால் "காலகட்டம்" (Epoch) என்றழைக்கப்படுகிறது.

சாமானிய சீரிசை இயக்கத்திலிருக்கும் ஒரு துகள் ஒரு எல்லை நிலையை நேர்த்திசையில் தாண்டியபின் கடந்துள்ள

கால அளவு அவ்வியக்கத்தின் ''கலை'' (Phase) என்றழைக்கப் படுகிறது.

துகளானது t_o நேரத்தில் எல்லை நிலையிலிருப்பதாகக் கொள்க. எனவே, சமன்பாடு (4)இல் $x = a$, $t = t_o$ என்று பிரதியிட,

$$a = a \cos(\sqrt{\mu}\, t_o + \epsilon)$$

அல்லது, $\sqrt{\mu}\, t_o + \epsilon = O$

அல்லது, $t_o = -\dfrac{\epsilon}{\sqrt{\mu}}$

என்று காணலாம். எனவே t நேரத்தின்போது இயக்கத்தின் கலை என்பது எல்லை நிலையைத் தாண்டியபின் ஆகும்நேரம் $= t - t_o$ ஆகும்.

$$\therefore \ t \text{ நேரத்தின்போது கலை} = t - \left(\frac{-\epsilon}{\sqrt{\mu}}\right)$$

$$= t + \frac{\epsilon}{\sqrt{\mu}}$$

$$= \frac{\sqrt{\mu}\, t + \epsilon}{\sqrt{\mu}}$$

குறிப்பு: ஒரே காலவட்டத்தையுடைய இரு சாமானிய சீரிசை இயக்கங்களை

$$x_1 = a_1 \cos(\sqrt{\mu}\, t + \epsilon_1),$$

$$x_2 = a_2 \cos(\sqrt{\mu}\, t + \epsilon_2)$$

ஆகிய சமன்பாடுகளின் மூலம் குறிப்பிடலாம். இவ்விரு இயக்கங்களின் t நேரத்திய கலைகள் முறையே

$$\frac{\sqrt{\mu}\, t + \epsilon_1}{\sqrt{\mu}}, \quad \frac{\sqrt{\mu}\, t + \epsilon_2}{\sqrt{\mu}} \text{ ஆகும்.}$$

இவ்விரு கலைகளின் வித்தியாசம்

$$\frac{\sqrt{\mu}\, t + \epsilon_1}{\sqrt{\mu}} - \frac{\sqrt{\mu}\, t + \epsilon_2}{\sqrt{\mu}}$$

$$= \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\sqrt{\mu}}$$

ஆகும். ஆகவே, $\epsilon_1 = \epsilon_2$ எனில் இரு இயக்கங்களும் ஒரே கலையுடனிருப்பதாகவும், $\epsilon_1 - \epsilon_2 = \pi$ எனில் இரண்டும் எதிர்க்கலைகளுடனிருப்பதாகவும் சொல்லப்படுகின்றன.

இரு சாமானிய சீரிசை இயக்கங்களின் தொகுப்பு (Composition of two simple Harmonic Motions)

ஒரே நேர்கோட்டின்மீது ஒரே கால வட்டத்துடன் a_1, a_2 ஆகிய வெவ்வேறு வீச்சுக்களைக் கொண்ட இரு சாமானிய சீரிசை இயக்கங்களைக் கருதுக. இவ்விரு இயக்கங்களின் காலகட்டங்கள் முறையே ϵ_1, ϵ_2 என்று கொண்டால் அவற்றின் சமன்பாடுகளை முறையே

$$x_1 = a_1 \cos(\sqrt{\mu}\, t + \epsilon_1),$$

$$x_2 = a_2 \cos(\sqrt{\mu}\, t + \epsilon_2)$$

என்று குறிப்பிடலாம். x_1, x_2 என்பன t நேரத்தில் இவ்விரு இயக்கங்களிலும் ஏற்பட்டுள்ள இடப் பெயர்ச்சிகளாகும். இப்பொழுது இவ்விரு சாமானிய சீரிசை இயக்கங்களும் ஒன்றுக இணைந்து ஒரே சாமானிய சீரிசை இயக்கமாக இயங்குவதாகக் கொள்வோம். இவ்வாறு இணையப் பெற்ற விளைவு இயக்கத்தின் t நேரத்திய இடப்பெயர்ச்சி x எனில்,

$$x = x_1 + x_2$$

$$= a_1 \cos(\sqrt{\mu}\, t + \epsilon_1) + a_2 \cos(\sqrt{\mu}\, t + \epsilon_2)$$

$$= a_1 (\cos \sqrt{\mu}\, t \cos \epsilon_1 - \text{Sin} \sqrt{\mu}\, t \sin \epsilon_1)$$

$$+ a^2 (\cos \sqrt{\mu}\, t \cos \epsilon_2 - \sin \sqrt{\mu}\, t \sin \epsilon_2)$$

$$= (a_1 \cos \epsilon_1 + a_2 \cos \epsilon_2) \cos \sqrt{\mu}\, t - (a_1 \sin \epsilon_1 + a_2 \sin \epsilon_2) \sin \sqrt{\mu}\, t$$

இப்பொழுது, $a_1 \cos \epsilon_1 + a_2 \cos \epsilon_2 = A \cos \epsilon$,

$$a_1 \sin \epsilon_1 + a_2 \sin \epsilon_2 = A \sin \epsilon$$

என்று கொள்வோமானுல்,

$$x = A \cos \epsilon \cos \sqrt{\mu}\, t + B \sin \epsilon \cdot \sin \sqrt{\mu}\, t$$

$$= A \cos(\sqrt{\mu}\, t + \epsilon)$$

ஆகும். இச்சமன்பாடு A-யை வீச்சாகவும், தரப்பட்டுள்ள இரு சாமானிய சீரிசை இயக்கத்தின் காலவட்டத்தையே காலவட்டமாகவும் கொண்ட ஒரு சாமானிய சீரிசை இயக்கத்தைக் குறிக்கும்.

விளைவுச் சாமானிய சீரிசை இயக்கத்தின் வீச்சு

$$A = \sqrt{(A \cos \epsilon)^2 + (A \sin \epsilon)^2}$$
$$= \sqrt{(a_1 \cos \epsilon_1 + a_2 \cos \epsilon_2)^2 + (a_1 \sin \epsilon_1 + a_2 \sin \epsilon_2)^2}$$
$$= \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos (\epsilon_1 - \epsilon_2)}$$

மேலும், $\tan \epsilon = \dfrac{A \sin \epsilon}{A \cos \epsilon} = \dfrac{a_1 \sin \epsilon_1 + a_2 \sin \epsilon_2}{a_1 \cos \epsilon_1 + a^2 \cos \epsilon_2}$ ஆகும்.

ஆகவே, விளைவு இயக்கத்தின் வீச்சு A ஆனது தரப்பட்டுள்ள இரு இயக்கங்களின் வீச்சுக்களாகிய a_1, a_2 ஆகியவற்றை அடுத்துள்ள பக்கங்களாகவும், இரு இயக்கங்களின் காலகட்ட வித்தியாசமாகிய $(\epsilon_1 - \epsilon_2)$ஐ இரு அடுத்துள்ள பக்கங்களுக்கிடையேயுள்ள கோணமாகவும் கொண்டு வரையப்படும் இணைகரத்தின் மூலைவிட்டமாகும். ஆகவே, ஒரே நேர்கோட்டின்மீது ஒரே காலவட்டத்துடன் இயங்கும் இரு சாமானிய சீரிசை இயக்கத்தின் விளைவு அதே நேர்கோட்டின்மீது அதே காலவட்டத்துடன் இயங்கும் மற்றொரு சாமானிய சீரிசை இயக்கம் என்று காண்கிறோம்.

இயற்கையில் இத்தகைய சாமானிய சீரிசை இயக்கத் தொகுப்புகள் எவ்வாறு ஏற்படுகின்றன என்பதற்கு உதாரணங்கள் பல காட்ட முடியும். காற்று மண்டலத்திலுள்ள ஒலி அலைகள் செல்லும்போது காற்று மண்டலத் துகள்கள் சாமானிய சீரிசை இயக்கத்தில் இயங்குகின்றன. எனவே, ஒரே திசையில் காற்று மண்டலத்தினுள் செல்லுகின்ற இரு ஒலி அலைகள் காற்று மண்டலத் துகள்களை ஒரே காலவட்டமுடைய இரு சாமானிய சீரிசை இயக்கங்களுடன் இயங்கச் செய்யுமெனில் இவ்விரு இயக்கங்களும் அதே காலவட்டமுடைய மற்றொரு சாமானிய சீரிசை இயக்கமாக இணைந்து செயல்படுமாகையால், காற்று மண்டலத் துகள்கள் இருவகை இயக்கங்களுடன் செயல்படாது அவற்றின் விளைவு இயக்கமெனும் ஒரே இயக்கத்துடன் செயல்பட்டு இரு ஒலிகளும் இணைந்து விளைவு ஒலியாக வெளிப்படவகை செய்கின்றன.

சூரியன், சந்திரன் ஆகியவற்றின் ஈர்ப்புச் சக்திகளின் விளைவாகக் கடலில் அலைகள் ஏற்படுகின்றன என்பது யாவரும் அறிந்த உண்மையாகும். சூரியனின் ஈர்ப்புச் சக்தியின் காரணமாகக் கடலின் மேற்பரப்பில் நிலைக்குத்துக் கோட்டில் ஒவ்வொரு அலையும் சாமானிய சீரிசை இயக்கத்துடன் மேலும் கீழுமாக நகர்ந்து கொண்டிருக்கும். இவ்வாறு சூரிய, சந்திர ஈர்ப்புச்

சக்திகளின் விளைவாக ஏற்படுகின்ற ஏறத்தாழ சமகால வட்டங்களுடன் கூடிய இரு சாமானிய சீரிசை இயக்கங்களின் விளைவு இயக்கத்துடன் மேலும் கீழுமாக எழும்பித் தாழ்ந்து வீசுகின்ற அலைகளையே நாம் கடலில் காண்கிறோம்.

இரு செங்குத்துக் கோடுகளின் மீதுள்ள சமகாலவட்ட சா. சீ. இயக்கங்களின் தொகுப்பு

இரு செங்குத்துத் திசைகளில் சமகால வட்டத்துடன் a, b ஆகிய வீச்சுக்களைக் கொண்டு இயங்குகின்ற இரு சாமானிய சீரிசை இயக்கங்களைக் கருதுக. இரு செங்குத்துத் திசைகளையும் முறையே x, y அச்சுக்களாகக் கொள்க.

t நேரத்தில் இத்திசைகளிலேற்படுகின்ற இடப்பெயர்ச்சிகளை முறையே

$$x = a\cos(\sqrt{\mu}\, t), \qquad \dots \quad \dots \quad (1)$$

$$y = b\cos(\sqrt{\mu}\, t + \epsilon) \qquad \dots \quad \dots \quad (2)$$

என்று கொள்ளலாம்.

(1) இலிருந்து, $\cos\sqrt{\mu}\, t = \dfrac{x}{a}$, $\sin\sqrt{\mu}\, t \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}}$ என்று காணலாம்.

(2) இலிருந்து $\dfrac{y}{b} = \cos(\sqrt{\mu}\, t + \epsilon)$

$$= \cos\sqrt{\mu}\, t\cos\epsilon - \sin\sqrt{\mu}\, t\sin\epsilon$$

$$= \frac{x}{a}\cos\epsilon - \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\sin\epsilon$$

$$\therefore \left(\frac{y}{b} - \frac{x}{a}\cos\epsilon\right) = -\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\ \text{Sin}\,\epsilon$$

அல்லது, $\left(\dfrac{y}{b} - \dfrac{x}{a}\cos\epsilon\right)^2 = \left(1 - \dfrac{x^2}{a^2}\right)\sin^2\epsilon$

அல்லது, $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{2xy}{ab}\cos\epsilon + \dfrac{x^2}{a^2}\cos^2\epsilon + \dfrac{x^2}{a^2}\sin^2\epsilon = \sin^2\epsilon$

அதாவது, $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{2xy}{ab}\cos\epsilon + \dfrac{y^2}{b^2} = \sin^2\epsilon \qquad \dots \quad \dots \quad (3)$

இதுவே, தரப்பட்டுள்ள இரு சாமானிய சீரிசை இயக்கங்களின் விளைவு இயக்கப் பாதையைக் குறிப்பிடுகின்ற சமன்பாடு ஆகும்.

குறிப்பு 1. $a = b, \epsilon = \frac{\pi}{2}$ எனில் சமன்பாடு (3) $x^2 + y^2 = a^2$ என்னும் வட்டமாகும். ஆகவே இரு செங்குத்துத் திசை சாமானிய சீரிசை இயக்கங்களைக் கொண்ட ஒரு துகள் ஒரு வட்டப் பாதையில் நகர வேண்டுமாயின் அவ்விரு சா. சீ. இயக்கங்களின் விச்சுகள் சமமாகயிருப்பதோடு அவற்றின் கலை களின் வித்தியாசம் ஒரு நேர் கோணமாகயிருக்க வேண்டும்.

குறிப்பு 2. $\epsilon = 0$ எனில் சமன்பாடு (3) $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$ என்னும் நேர்கோடாக மாறும் $\epsilon = \pi$ எனில், விளைவு இயக்கப் பாதை யானது $\frac{x}{a} = -\frac{y}{b}$ என்னும் நேர்கோடாகும்.

ஹூக்-இன் விதி (Hooke's Law)

மீளியல்புடைய கயிறு அல்லது வில் நீட்சிபெறும்போது அக் கயிறு அல்லது வில்லிலுள்ள இழுவிசையானது ஒரு அலகு இயல் பான நீளத்திற்கு ஏற்பட்டுள்ள நீட்சி வீதத்திற்கு விகித சமத்தி லிருக்கும். λ என்பது விகிதசம மாறிலியெனில்,

$$\text{இழுவிசை } T = \lambda \frac{\text{நீட்சி}}{\text{இயல்பான நீளம்}}$$

ஆகும். அதாவது, a எனும் இயல்பான நீளமுடைய ஒரு கயிறு, அவ்வியல்பான நீளத்திற்குமேல் l நீளத்திற்கு நீட்சி பெற்றால், அக்கயிற்றில் செயல்படும் இழுவிசை $T = \lambda \frac{l}{a}$ ஆகும்.

இவ்விகித சமமாறிலியாகிய λ என்பது மீளியல் குணகம் (modulus of elasticity) எனப்படும்.

கிடைத்தள வில்லின்மூலம் சாமானிய சீரிசை இயக்கம் (S. H. M. by a horizontal spring)



படம் 107

ஒரு கிடைக்கோட்டின்மேல் வைக்கப்பட்டுள்ள ஒரு மீளியல்புடைய வில்லின் ஒரு முனை அக்கோட்டிலுள்ள O என்னும் நிலையான புள்ளியில் பொருத்தப்பட்டுள்ளது. $OA = l$ என்பது வில்லின் இயல்பான நீளம். வில்லின் மறுமுனை A-யில் m பொருண்மையுள்ள துகள் ஒன்று இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இத்துகளானது OA திசையில் சிறிது நகர்த்தப்பட்டு விடப்படுகிறது. இப்பொழுது துகளானது சாமானிய சீரிசை இயக்கத்துடன் நகருமென்று காண்போம்.

துகள் A-யிலிருக்கும்போது ஓய்வு நிலையிலிருக்கும். OA திசையில் அது P என்னும் நிலைக்கு நகர்த்தப்பட்டு விடப்படுவதாகக் கொள்வோம். $AP = x$ எனில், துகள் P-யிலிருக்கும்போது வில்லின் இழுவிசை $T = \lambda \frac{x}{l}$ ஆகும். (λ என்பது மீளியல் குணகம்). இவ்விழுவிசை A-யை நோக்கிச் செயல்படும். $AP = x$ ஆதலின், AP திசையில் துகளின் முடுக்கம் $\frac{d^2x}{dt^2}$ ஆகும்.

ஆகவே, $$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\lambda \frac{x}{l}$$

என்பது துகளின் இயக்கச் சமன்பாடு ஆகும்.

அதாவது, $$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\lambda}{ml}x$$

$\frac{ml}{\lambda} = \mu$ எனில், துகளின் இயக்கச் சமன்பாடு $\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu x$ ஆகும். இது ஒரு சாமானிய சீரிசை இயக்கச் சமன்பாடு ஆகும்.

ஆகவே, துகளானது A-ஐ அலைவு மையமாகக் கொண்டு $\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{\lambda}}$ காலவட்டத்துடன் சாமானிய சீரிசை இயக்கத்துடன் நகருமென்று காணலாம்.

துகளானது A-யிலிருந்து B என்னும் நிலைவரை இழுக்கப்பட்டுப்பின் விடப்பட்டால், அது A வழியே மறுபுறம் $AB' = AB$ என்னும் தூரத்திலுள்ள B' என்னும் புள்ளிவரை சென்றுபின் மறுபடியும் A வழியே B-ஐ அடையும். இவ்வாறு துகளானது

A-ஐ அலைவு மையமாகவும் $AB = AB'$ஐ வீச்சாகவும் கொண்டு சாமானிய சீரிசை இயக்கத்துடன் நகர்ந்து கொண்டிருக்கும்.

குறிப்பு : மேற்கண்ட பரிசோதனையில் வில்லுக்குப் பதிலாக ஒரு மீளியல்புடைய கயிறு பயன்படுத்துவதாகக் கொள்க. B-யிலிருந்து விடப்படும் கயிறு A வரை இழுவிசையினாலுண்டாகும் முடுக்கத்துடன் நகரும். A-ஐ அடைந்ததும், தான் பெற்றுள்ள வேகத்தைச் சீர்வேகமாகக் கொண்டு O வழியே அதே நேர்கோட்டில் மறுபுறம் $OA' = OA$ என்னும் தூரத்திலுள்ள A' என்னும் புள்ளிவரை சென்று பின் கயிற்றின் இழுவிசையின் காரணமாக ஏற்படுகின்ற எதிர் முடுக்கத்திற்குள்ளாகி $OB' = OB$ என்னும் தூரத்திலுள்ள B' என்னும் புள்ளிவரை செல்லும். பின்னர், இதுபோல் B'இலிருந்து கயிற்றின் இழுவிசையினாலுண்டாகும் முடுக்கத்துடன் A' வரை வந்து, பின் A'இலிருந்து A வரை சீரான வேகத்துடன் நகர்ந்து, பின் A-யிலிருந்து கயிற்றின் இழுவிசையினாலுண்டாகும் எதிர் முடுக்கத்திற்குள்ளாகி மீண்டும் B-ஐ அடையும். ஆகவே, துகளானது B, A ஆகிய நிலைகளுக்கிடையேயும், B', A' ஆகிய நிலைகளுக்கிடையேயும் சாமானிய சீரிசை இயக்கத்துடன் நகரும். A, A' ஆகிய நிலைகளுக்கிடையே துகளானது சீரான வேகத்துடன் நகரும்.

ஆகவே, மீளியல்புடைய வில் பயன்படுத்தப்பட்டால் இயக்கம் முழுமையும் சாமானிய சீரிசையாகயிருக்கு மென்பதையும், வில்லுக்குப் பதிலாக மீளியல்புடைய கயிறு பயன்படுத்தப் பட்டால் இயக்கத்தின் ஒரு பகுதி மட்டுமே சாமானிய சீரிசையாகயிருக்குமென்பதையும் கவனத்திலிருத்திக் கொள்க.

நிலைக்குத்தாகத் தொங்கும் வில்லின்மூலம் சாமானிய சீரிசை இயக்கம்

ஒரு நிலையான புள்ளியுடன் இணைக்கப்பட்ட ஒரு வில்லின் மூலம் m பொருண்மையுள்ள ஒரு துகள் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. துகளானது சிறிய தூரம் நிலைக்குத்தாகக் கீழே இழுத்து விடப்பட்டால் சாமானிய சீரிசையுடனியங்குமென்று காணல்.

AB என்பது l_0 என்னும் இயல்பான நீளம் கொண்ட ஒரு வில். இதன் ஒருமுனை A என்னும் நிலையான புள்ளியுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. அதன் மறுமுனை B-யில் m பொருண்மையுள்ள ஒரு துகள் இணைக்கப்பட்டுத் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. துகளின் எடை காரணமாக வில் நீட்சி பெற்று AO என்னும்



படம் 108

நீளத்தைப் பெறுகிறது. இந்த நீளம் $AO = l$ என்க. இப்பொழுது துகளானது O-வில் சமநிலையிலிருக்கும்: இப்பொழுது துகளானது O என்னும் நிலையிலிருந்து P என்னும் நிலைவரை நிலைக்குத்தாகக் கீழே இழுக்கப் பட்டு விடப்படுகிறது. இவ்வாறு கீழ் நோக்கி இழுக்கப்பட்ட தூரம் $OP = x$ என்க.

O-வில் துகள் சமநிலையிலிருப்பதால் வில்லின் இழுவிசை T ஆனது துகளின் எடை mg-ஐத் தாங்கிக் கொள்கிறது.

$$\therefore \quad T = mg \qquad \ldots \quad \ldots \qquad (1)$$

ஆனால், ஹூக்கின் விதிப்படி, λ மீளியல் குணக மெனில்,

$$T = \lambda \left(\frac{l - l_o}{l_o} \right) \qquad \ldots \quad \ldots \qquad (2)$$

$$\therefore \quad \lambda \left(\frac{l - l_o}{l_o} \right) = mg \qquad \ldots \quad \ldots \qquad (3)$$

துகளானது P-யிலிருக்கும்போது வில்லின் மேல் நோக்கிய இழு விசை T_1 என்க. துகளின் எடை mg நிலைக்குத்தாக மேல் நோக்கிச் செயல்படும். ஆகவே, துகளின் மீது செயல்படும் மேல்நோக்கிய விளைவு விசை $T_1 - mg$ ஆகும். O-விலிருந்து P-யின் தூரம் x ஆனது கீழ்நோக்கி அதிகரிப்பதால் துகளின் கீழ்நோக்கிய முடுக்கம் $\frac{d^2 x}{dt^2}$ ஆகும். எனவே, P-யில் துகளின் மேல் நோக்கிய முடுக்கம் $\frac{-d^2 x}{dt^2}$ ஆகும்.

$$\therefore \quad m \left(\frac{-d^2 x}{dt^2} \right) = T_1 - mg$$

அல்லது, $$m. \frac{d^2 x}{dt^2} = mg - T_1.$$

இங்கு $$T_1 = \lambda. \left(\frac{BP}{AB} \right)$$

$$= \lambda. \frac{(l + x) - l_0}{l_0}$$

$$= \lambda . \frac{(l - l_0) + x}{l_0}$$

$$= \lambda . \left(\frac{l - l_0}{l_0}\right) + \lambda \frac{x}{l_0}$$

$$= mg + \lambda . \frac{x}{l_0}, \text{ (3) இலிருந்த.}$$

$$\therefore \quad m . = \frac{d^2 x}{dt^2} = mg - \left(mg + \lambda \frac{x}{l_0} \right)$$

$$= - \lambda \frac{x}{l_0}$$

அல்லது, $\frac{d^2 x}{dt^2} = - \frac{\lambda}{ml_0} x$

$\frac{\lambda}{ml_0} = \mu$ எனில், $\frac{d^2 x}{dt^2} = - \mu x$

இது ஒரு சாமாளிய சீரியக்கச் சமன்பாடு ஆகும். எனவே, துகளானது அதன் சம நிலைப்புள்ளியாகிய O-ஐ அலைவு மையமாகக் கொண்டு சாமானிய சீரிசையுடன் இயங்கும். அதன் அதன் காலவட்டம் $= \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} = 2\pi \sqrt{\frac{ml_0}{\lambda}}$

குறிப்பு. மீளியல்புடைய வில்லுக்குப் பதிலாக மீளியல்புடைய கயிறு பயன்படுத்தப்படுமாயின், துகளானது நிலை B வரை மட்டிலுமே சாமானிய சீரிசையாக இயங்கும். B-க்கும் மேலே துகள் செல்லுமாயின் B-க்கு மேலுள்ள இயக்கமானது ஈர்ப்பு விசையை எதிர்த்து மேல்நோக்கிச் செல்லும் சாதாரண இயக்கமாகவே இருக்கும். ஆனால் துகளானது O-க்குக் கீழே BO-ஐவிட அதிகமான தூரத்திற்கு இழுத்து விடப்பட்டால் மட்டுமே B-க்கு செல்லுமென்பதைக் கவனிக்கவும்.

மாதிரி 146. சாமானிய சீரிசையில் இயங்குகின்ற ஒரு துகளின் மீப்பெருவேகம் 2 அடி/விஞடி ; அதன் காலவட்டம் $\frac{1}{6}$ விஞடி. இயக்கத்தின் வீச்சைக் காண்க.

(சென்னை 1966 ஏப்).

தீர்வு : சா. சீ. இயக்கச் சமன்பாடு $v^2 = \mu (a^2 - x^2)$ என்க.

துகளான்து அலைவு மையத்திலிருக்கும்போது அதன் வேகம் மீம்பெரிதாகயிருக்கும். ஆகவே, மீப்பெரு வேகம் V_1 எனில்,

$$V_1^2 = \mu (a^2 - O) = \mu a^2.$$

ஆனுல் $V_1 = 2$ அடி/வி.

$$\therefore \quad \mu a^2 = 4$$

அல்லது, $\mu = \dfrac{4}{a^2}$

காலவட்டம் $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\mu}} = \dfrac{2\pi}{2/a} = \pi a$ விஞடி.

ஆனுல் காலவட்டம் $= \frac{1}{5}$ விஞடி.

$$\therefore \quad \pi a = \tfrac{1}{5}$$

$$\therefore \quad \text{வீச்சு } a = \frac{1}{5\pi} \text{ அடி.}$$

மாதிரி 147. சாமானிய சீரிசையில் இயங்கிக் கொண்டிருக்கும் ஒரு துகள் ஒரு நிமிடத்தில் 100 முழு அலைவுகளைச் செய்து முடிக்கிறது. அதன் மீப்பெரு வேகம் 15 அடி/விஞடி. அதன் பாதையின் நீளத்தையும், அதிகபட்ச முடுக்கத்தையும் காண்க.

தீர்வு : காலவட்டம் = ஒரு அலைவுக் காலம் $= \dfrac{60}{100} = \frac{3}{5}$ விஞடி.

அதாவது, $\dfrac{2\pi}{\sqrt{\mu}} = \frac{3}{5}$

அல்லது, $\sqrt{\mu} = \dfrac{10\pi}{3}$

அல்லது, $\mu = \dfrac{100\pi^2}{9}$

சாமானிய சீரிசை இயக்கச் சமன்பாடு $v^2 = \mu (a^2 - x^2)$ என்க.

துகளானது அலைவு மையத்திலிருக்கும்போது வேகம் மீப்பெரிதாகயிருக்கும். ஆகவே, $x = O$ ஆகயிருக்கும்போது $v = 15$ அடி/வி.

$$\therefore \quad 15^2 = \frac{100\pi^2}{9} (a^2 - 0)$$

அல்லது, $a^2 = \frac{9 \times 15^2}{100\,\pi^2}$

$$\therefore \quad a = \frac{3 \times 15}{10\,\pi} = \frac{9}{2\pi}$$

$\therefore$ பாதையின் நீளம் $= 2a = \frac{9}{\pi}$ அடி.

இப்பொழுது $\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu x$ என்ற சமன்பாட்டைக் கருதுக.

துகளானது எல்லை நிலையில் $(x = a)$ இருக்கும்போது முடுக்கம் மீப்பெரிதாயிருக்கும்.

$$\therefore \quad \text{மீப்பெரு முடுக்கம் } \frac{d^2x}{dt^2} = -\mu a$$

$$= -\frac{100\,\pi^2}{9} \times \frac{9}{2\,\pi}$$

$$= -50\,\pi$$

அதாவது அலைவு மையத்தை நோக்கிய மீப்பெரு முடுக்கம் $= 50\,\pi$ அடி/(விநாடி)^2.

மாதிரி **148.** சாமானிய சீரிசை இயக்கத்திலிருக்கும் ஒரு துகள் அதன் மீப்பெரு இடப்பெயர்ச்சி நிலையிலிருந்து, பாதி வீச்சுக்குச் சமமான இடப்பெயர்ச்சி நிலைக்கு நகருவதற்குக் கால வட்டத்தில் ஆறில் ஒரு பங்குக் காலம் தேவைப்படுமென்று காட்டுக.

தீர்வு : துகள் ஓர் எல்லை நிலையிலிருந்து புறப்படுவதாகவும் அதன் சா. சீ. இயக்கச் சமன்பாடு $x = a \cos \sqrt{\mu}\, t$ என்றும் கொள்க.

அதன் கால வட்டம் $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$

அதன் வீச்சு $= a$.

பாதி இடப்பெயர்ச்சியின்போது $x = \frac{a}{2}$ ஆகவே, $x = \frac{a}{2}$ ஆக யிருக்கும்போது நேரம் T_1 எனில்,

$$\frac{a}{2} = a \cos \sqrt{\mu}\ T_1.$$

$$\therefore \cos \sqrt{\mu}\ T_1 = \tfrac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \quad \sqrt{\mu}\ T_1 = \frac{\pi}{3}$$

$$T_1 = \frac{\pi}{3\sqrt{\mu}}$$

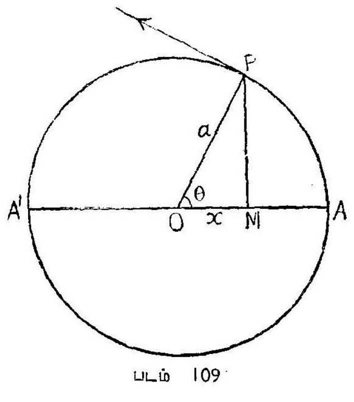
$$= \tfrac{1}{6}\left(\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}\right)$$

$$= \tfrac{1}{6}\, T$$

$= \tfrac{1}{6} \times$ காலவட்டம்.

மாதிரி 149. ஒரு துகள் ஒரு வட்டத்தின் பரிதியின்மீது சீரான வேகத்துடன் நகருகிறது. ஒரு நிலையான விட்டத்தின் மீது அதன் வீச்சு (Projection) சாமானிய சீரிசை இயங்குமென்று காட்டுக. (சென்னை பி. எஸ்ஸி. 1967 செப்)

தீர்வு : AA^1 என்பது O-ஐ மையமாகவும் a-ஐ ஆரையாகவும் கொண்ட ஒரு வட்டத்தின் நிலையான விட்டம். P என்னும் துகள் பரிதியின்மீது சீர்வேகத்துடன் நகர்ந்து கொண்டிருக்கிறது. எனவே, மையத்தைப் பொறுத்து அதன் சுழல் வேகமும் சீராகயிருக்கும். இச் சீர் சுழல்வேகத்தை ω என்று குறிப்பிடுக. எனவே மையத்தை நோக்கிய அதன் செங்கோட்டு முடுக்கம் $\omega^2 a$ ஆகும்.



படம் 109

இப்பொழுது t நேரத்தில் துகளானது P என்னும் நிலையிலிருப்பதாகக் கொள்க. $PM \perp AA^1$ வரைக. OM என்பது AA^1 என்ற விட்டத்தின்மீது OP-யின் வீச்சு ஆகும்.

$A\hat{O}P = \theta$ எனில், $OM = a \cos \theta$ ஆகும்.

PO திசையில் துகளின் செங்கோட்டு முடுக்கம் $\omega^2 a$ ஆகையால் AO திசையில் அதன் பிரிவு $\omega^2 a \cos\theta$ ஆகும். AO திசையில் துகளின் முடுக்கம் $\omega^2 a \cos\theta$ ஆகும்.

ஆனால், $OM = x$ எனில், OA திசையில் முடுக்கம் $= \dfrac{d^2x}{dt^2}$ ஆகும்.

$$\therefore \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 a \cos\theta$$

$$= -\omega^2 x \quad (\text{ஏனெனில்}, x = a\cos\theta)$$

ஆகவே, வீச்சு OM-இன் இயக்கம் சாமானிய சீரிசையாகும்.

அதன் காலவட்டம் $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

மாதிரி 150. ஒரு நேர்கோட்டின்மீது ஒரு துகளின் இடப்பெயர்ச்சி

$$x = a\cos nt + b\sin nt$$

என்னும் சமன்பாட்டின்மூலம் குறிப்பிடப்படுகின்றது. அத்துகள் சாமானிய சீரிசையுடன் இயங்குகின்றதென்றும், அதன் வீச்சு $\sqrt{a^2+b^2}$, அலைவுகாலம் $\dfrac{2\pi}{n}$ என்றும் காட்டுக.

தீர்வு: $x = a\cos nt + b\sin nt \quad \dots \quad \dots \quad (1)$

வகையீடு காணின், $\dfrac{dx}{dt} = -an\sin nt + bn\cos nt$

மீண்டும் வகையீடு காணின், $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -an^2\cos nt - bn^2\sin nt$

$$= -n^2(a\cos nt + b\sin nt)$$

$$= -n^2 x.$$

$\mu = n^2$ எனில், $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\mu x$.

இது ஒரு சாமானிய சீரிசை இயக்கச் சமன்பாடு ஆகும்.

அதன் காலவட்டம் $= \dfrac{2\pi}{\sqrt{\mu}} = \dfrac{2\pi}{n}$

வீச்சு என்பது துகள் எல்லை நிலையிலிருக்கும் போதுள்ள இடப்பெயர்ச்சி ஆகும். ஆனால், துகள் எல்லை நிலையிலிருக்கும்போது அதன் வேகம் மறைந்துவிடுமாகையால் $\frac{dx}{dt} = O$ ஆகும்.

$$\therefore \quad -an \sin nt + bn \cos nt = O$$

அல்லது, $bn \cos nt = an \sin ut$

அல்லது, $\tan nt = \frac{b}{a}$

$$\therefore \quad \sin nt = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \cos nt = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

இம் மதிப்புக்களைச் சமன்பாடு (1) இல் பிரதியிட,

$$\text{வீச்சு} = a\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) + b\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}$$

மாதிரி 151. ஒரு சாமானிய சீரிசை இயக்கத்தின் காலவட்டம் $2\pi/\omega$. அதன் தொடக்க இடப் பெயர்ச்சி x_0, தொடக்க வேகம் u_0 எனில் அதன் வீச்சு $\sqrt{x_0^2 + \frac{u_0^2}{\omega^2}}$ என்று காட்டு.

தீர்வு : சா. சீ. இயக்கச் சமன்பாடு $x = a\cos(\sqrt{\mu}\,t + \epsilon)$ என்க.

காலவட்டம் $\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} = \frac{2\pi}{\omega}$ ஆகையால், $\sqrt{\mu} = \omega$.

$\therefore$ சா. சீ. இயக்கச் சமன்பாடு $x = a\cos(\omega t+\epsilon)$ ஆகும். ... ... (1)

வகையீடு காணின், $\frac{dx}{dt} = -a\omega \sin(\omega t+\epsilon)$ ... ... (2)

தொடக்கத்தில் $t = O$, $x = x_0$ எனவே, (1) இலிருந்து

$$x_0 = a\cos\epsilon \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

இதுபோல், தொடக்கத்தில் $t = O$, $\frac{dx}{dt} = u_0$ எனவே,

(2) இலிருந்து, $u_0 = -a\,\omega \sin \epsilon$

அல்லது, $$-\frac{u_0}{\omega} = a \sin \epsilon \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

(3), (4) ஆகிய சமன்பாடுகளின் வர்க்கங்களைக் கூட்டவும்.

$$a^2 = x_0^2 + \frac{u_0^2}{\omega^2}$$

அல்லது வீச்சு $a = \sqrt{x_0^2 + \dfrac{u_0^2}{\omega^2}}$

மாதிரி 152. ஒரு துகள் O என்னும் புள்ளியை அலைவு மையமாகக் கொண்டு T என்னும் காலவட்டத்துடன் சாமானிய சீரிசையில் இயங்கிக் கொண்டிருக்கிறது. அது $OP = b$ என்னும் தூரத்திலுள்ள P என்னும் புள்ளி வழியே V வேகத்துடன் OP திசையில் சென்று கொண்டிருக்கிறது. அது P-க்குத் திரும்புவதற்கு ஆகும் நேரம் $\dfrac{T}{\pi} \tan^{-1}\left(\dfrac{VT}{2\pi b}\right)$ என்று நிறுவுக.

(சென்னை பி.எஸ்ஸி. 1967 ஏப்.)

தீர்வு: சா. சீ. இ. சமன்பாடு $v^2 = \mu\,(a^2 - x^2)$ என்று கொள்க.

$$\therefore \quad v = \pm \sqrt{\mu}\,\sqrt{a^2 - x^2}$$

இங்கு x அதிகரிக்கும் திசையும் துகள் நகரும் திசையும் ஒரே திசை (OP)யாக இருப்பதால்,

$$\frac{dx}{dt} = v = \sqrt{\mu}\,\sqrt{a^2 - x^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$\therefore \quad x = OP = b$ எனில், $\dfrac{dx}{dt} = V$ தரப்பட்டுள்ளது.

$$\therefore \quad V = \sqrt{\mu}\,\sqrt{a^2 - b^2}$$

அல்லது, $$\sqrt{a^2 - b^2} = \frac{V}{\sqrt{\mu}} \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

மேலும் (1) இலிருந்து, $$\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sqrt{\mu}\,dt.$$

P-யிலிருந்து எல்லை நிலையை அடையும் வரையுள்ள நேரம் t_1 என்று கொள்க. P-யில் இடப்பெயர்ச்சி $x = b$ ஆகும்; எல்லை நிலையில் இடப்பெயர்ச்சி $x = a$ ஆகும். ஆகவே, (2)-ஐ தொகையீடு செய்யின்,

$$\int_b^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sqrt{\mu} \int_o^t dt.$$

அதாவது,
$$\left[-\cos^{-1}\frac{x}{a}\right]_b^a = \sqrt{\mu}\; t_1$$

அதாவது,
$$\cos^{-1} 1 + \cos^{-1}\frac{b}{a} = \sqrt{\mu}\, t_1$$

அல்லது,
$$\sqrt{\mu}\, t_1 = \cos^{-1}\frac{b}{a}$$
$$= \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}\right)$$
$$= \tan^{-1}\left(\frac{V}{b\sqrt{\mu}}\right), \text{ (2) இலிருந்து.}$$

ஆனால் $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$ ஆகையால், $\sqrt{\mu} = \frac{2\pi}{T}$.

$$\therefore \frac{2\pi}{T} \cdot t_1 = \tan^{-1}\left(\frac{VT}{2\pi b}\right)$$

$$\therefore t_1 = \frac{T}{2\pi} \tan^{-1}\left(\frac{VT}{2\pi b}\right)$$

இதுபோல், எல்லை நிலையிலிருந்து Pக்குத் திரும்புவதற்கும் இதே நேரமாகுமாகையால், துகள் Pயைக் கடந்தபின் திரும்பவும் Pக்கு வருவதற்கு ஆகும் நேரம்

$$= 2\, t_1 = \frac{T}{\pi} \tan^{-1}\left(\frac{VT}{2\pi b}\right).$$

மாதிரி 153. தூரத்தின் நேர்விகிதத்தில் ஈர்க்கின்ற இரு மைய விசைகளின் ஈர்ப்புச் சக்திகளின் கீழ் ஒரு துகள் சமநிலையிலுள்ளது. அவ்விரு விசைகளின் சக்தி மாறிலிகள் முறையே μ, μ^1 ஆகும். துகளானது அவற்றுள் ஒரு விசையின்

மையத்தை நோக்கிச் சிறிது தள்ளப்பட்டால் ஒரு சிறு அலைவின் நேரம் $\frac{2\pi}{\sqrt{\mu + \mu_1}}$ என்று காட்டுக.

தீர்வு : O, O^1 என்பன இரு விசைகளின் மையங்களாகும். OO^1 நேர்கோட்டின்மேல் A என்னும் புள்ளியில் துகள் வைக்கப் படும்போது சமநிலையில் இருப்பதாகக் கொள்க. துகளின்



படம் 110

பொருண்மை m என்க. $OA = a$, $O^1A = a^1$ எனில் Oஐ நோக்கிய ஈர்ப்பு விசை $= m\mu a$; O^1ஐ நோக்கிய ஈர்ப்பு விசை $= m\mu^1 a_1$; துகள் சமநிலையிலிருப்பதால்,

$$m\mu a = m\mu^1 a^1$$

அல்லது, $\mu a = \mu^1 a^1$ ஆகும் ... (1)

இப்பொழுது துகளானது Aயிலிருந்து AO திசையில் P என்னும் நிலைக்குத் தள்ளப்பட்டிருப்பதாகக் கொள்க. $AP = x$ என்க.

$$\therefore \quad PO = (a - x), \quad PO^1 = (a^1 + x)$$

$\therefore$ Oஐ நோக்கிய ஈர்ப்பு விசை $= m\mu\,(a - x)$,

O^1ஐ நோக்கிய ஈர்ப்பு விசை $= m\mu^1\,(a^1 + x)$.

$\therefore$ துகளின் இயக்கச் சமன்பாடு,

$$m.\,\frac{d^2x}{dt^2} = m\mu\,(a - x) - m\mu^1\,(a^1 + x)$$

அதாவது,
$$\frac{d^2x}{dt^2} = \mu\,(a - x) - \mu^1\,(a^1 + x)$$
$$= (\mu a - \mu^1 a^1) - (\mu + \mu^1)\,x$$
$$= O - (\mu + \mu^1)\,x \qquad \dots \text{ (1) இலிருந்து}$$
$$= -(\mu + \mu^1)\,x$$

இது ஒரு சா. சீ. இ. சமன்பாடு ஆகும். அதன் அலைவு நேரம் $= \frac{2\pi}{\sqrt{\mu + \mu^1}}$ ஆகும்.

மாதிரி 154. $a+b(a>b)$ இயல்பான நீளமும், மீளியல்புக் குணகம் λ-வுமுடைய ஒரு மீளியல்புடைய கயிற்றின் ஒரு முனை ஒரு வழவழப்பான மேசையின் மேல் ஒரு நிலையான புள்ளியுடன் பொருத்தப்பட்டுள்ளது. இம் முனையிலிருந்து a தூரத்தில் கயிற்றுடன் m பொருண்மையுள்ள ஒரு துகள் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. கயிற்றின் மறுமுனை மேசையின் மேலுள்ள B என்னும் புள்ளியுடன் கயிருனது நீட்சி பெருத நிலையில் சரியாகக் கட்டப்பட்டுள்ளது. துகளானது B வரை இழுக்கப்பட்டுவிடப் பட்டால், இரு நிலைப்புள்ளிகளுக்குமிடையே

$\pi(\sqrt{a}+\sqrt{b})\sqrt{\dfrac{m}{\lambda}}$ எனும் அலைவு நேரத்துடன்

$\dfrac{b(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{b}}$ எனும் தூரத்திற்கு அலைவு இயக்கத்திலிருக்கு மென்று காட்டு.

தீர்வு: AB என்ற கயிற்றில் $AO=a$ என்ற அளவிலுள்ள O என்னும் புள்ளியில் m பொருண்மையுள்ள துகள் கட்டப்பட்டிருப்பதாகக் கொள்க. $\therefore\ OB=b$.

துகளானது B-க்குக் கொண்டு செல்லப்பட்டதும் கயிற்றின் OB என்னும் பகுதி தொய்ந்துவிடும். எனவே, துகளானது OA பகுதிக் கயிற்றின் இழுவிசையினுலுண்டாகும் முடுக்கத்துடன் Bயிலிருந்து Oஐ நோக்கி நகரும். Bயிலிருந்து O வரை கயிற்றின் OB பகுதி தொய்ந்தே யிருக்குமாகையால், O வரையுள்ள இயக்கத்தில் அதன் இழுவிசை எதுவும் செயல்படாது.

t நேரத்தில் துகள் BOவில் P என்னும் நிலையிலிருப்பதாகக் கொள்க. $OP=x$ எனில், Pயில் செயல்படுகின்ற OA பகுதியின் இழுவிசை $\lambda.\dfrac{x}{a}$ ஆகும். இவ் விழுவிசை Oஐ நோக்கிச் செயல்படும். ஆனல், x ஆனது O-விலிருந்து அளவிடப்படுவதால், Oஐ நோக்கிய முடுக்கம் $\dfrac{-d^2x}{dt^2}$ ஆகும்.

$$\therefore\quad m\left(\frac{-d^2x}{dt^2}\right)=\lambda\frac{x}{a}$$

அல்லது,
$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{\lambda}{am}x. \quad\ldots\quad(1)$$

ஆகவே, இயக்கமானது சாமானிய சீரிசையாகும்.

அதன் காலவட்டம் $T_1=2\pi\sqrt{\dfrac{am}{\lambda}}$; $\mu=\dfrac{\lambda}{am}$ ... (2)

இச் சாமானிய சீரிசை இயக்கத்தின் அலைவு மையம் O ; எல்லை நிலை B. ஆகையால் B யிலிருந்து O வரை செல்வதற்காகும்

நேரம் $= \frac{1}{4} T_1 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{am}{\lambda}}$. ... (3)

$$v = \sqrt{\mu}\ (\sqrt{a^2 - x^2})$$

என்னும் சமன்பாட்டிலிருந்து, துகள் O-விலிருக்கும்போது $x = O$; $a =$ வீச்சு $= OB = b$.

$\therefore$ O-வில் வேகம் : $v = \sqrt{\mu}\ (\sqrt{b^2 - O}) = \sqrt{\mu}\ b$

$$= \sqrt{\frac{\lambda}{am}} . b \qquad \ldots (4)$$

இப்பொழுது துகள் O-ஐத் தாண்டி மறுபுறம் செல்லும்போது கயிற்றுப்பகுதி OA தொய்ந்துவிடுகிறது ; பகுதி OBயின் இழுவிசை இயக்கத்திற் கெதிராயிருக்கும். ஆகவே, அதன் சமன்பாட்டை (1) இலிருந்து a-ஐ b ஆக மாற்றிப் பெறலாம்.

$$\therefore \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{\lambda}{bm} x.$$

இது ஒரு சா.சீ.இ. அதன் காலவட்டம் $T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{bm}{\lambda}}$,

துகளானது O-க்கு அப்பால் A_1 என்னும் புள்ளி வரை சென்று திரும்புமெனில், A_1 வரை செல்வதற்காகும் நேரம்

$$= \frac{1}{4} T_2 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{bm}{\lambda}} \text{ ஆகும்.}$$

ஆகவே, B-யிலிருந்து A_1 வரை செல்ல நேரம் $= \frac{1}{4} T_1 + \frac{1}{4} T_2$

$$= \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{am}{\lambda}} + \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{bm}{\lambda}}$$

$$= \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{\lambda}} (\sqrt{a} + \sqrt{b})$$

$$= \frac{\pi}{2} (\sqrt{a} + \sqrt{b}) \sqrt{\frac{m}{\lambda}}$$

$\therefore$ B-யிலிருந்து புறப்பட்டு மீண்டும் B-க்கு வர நேரம்

$$= 2 \left[\frac{\pi}{2} (\sqrt{a} + \sqrt{b}) \sqrt{\frac{m}{\lambda}} \right]$$

$$= \pi (\sqrt{a} + \sqrt{b}) \sqrt{\frac{m}{\lambda}}$$

இப்பொழுது O-வில் துகளின் வேகம் $\sqrt{\frac{\lambda}{am}}.b$, OA_1ஐ நோக்கி, என்று கண்டோம். $OA_1 = a_1$ எனில், A_1-இல் துகள் ஓய்வுக்கு வருவதால், O-வில் வேகம் $\sqrt{\frac{\lambda}{bm}}$. a_1-க்குச் சமமாகயிருக்க வேண்டும்.

$$\therefore \sqrt{\frac{\lambda}{am}} \cdot b = \sqrt{\frac{\lambda}{bm}} a_1$$

$$\therefore a_1 = \sqrt{\frac{\lambda}{am}} \cdot b \times \sqrt{\frac{bm}{\lambda}}$$

$$= \frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$$

$\therefore$ A-யிலிருந்து A_1 வரை துகள் செல்லும் தூரம் $= b + a_1$

அதாவது, துகளின் அலைவுத் தூரம் $= b + b\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$

$$= \frac{b(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a}}$$

மாதிரி 155. 5 ராத்தல் பொருண்மையுள்ள ஒரு பொருள் ஓர் இலேசான வில்லின்மூலம் தொங்கவிடப்பட்டபோது வில் 6 அங்குலம் நீட்சியடைந்திருப்பதாகக் காணப்பட்டது. பொருளானது சிறிது தூரம் கீழ்நோக்கி இழுத்து விடப்படுகிறது. அதன் அலைவு நேரம் $\frac{\pi}{4}$ விநாடி என்று காட்டுக.

(சென்னை பி.எஸ்ஸி. 1967 செப்.)

தீர்வு : பொருள் தொங்கவிடப்பட்டுச் சமநிலையிலிருக்கும் போது, வில்லின் நீட்சி $\frac{1}{2}$ அடி ஆகையால், வில்லின் இயல்பான நீளம் l_0, மீளியல்புக் குணகம் λ என்று கொண்டால்,

வில்லின் இழுவிசை $T = \lambda . \dfrac{\frac{1}{2}}{l_0}$

$$= \frac{\lambda}{2\, l_0}$$

ஆகும். ஆனல், சமநிலையில் இவ் விழு விசையானது பொருளின் எடை mg-யைத் தாங்குமாகையால், $T = mg = 5g$ ஆகும்.

$$\therefore \quad 5g = \frac{\lambda}{2\, l_0}$$

அல்லது, $\quad \frac{\lambda}{l_0} = 10\, g.$

நிலைக்குத்து வில்லில் சா. சீ. இ. சமன்பாடு $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\lambda}{ml_0}\, x$ ஆகையால்,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\tfrac{1}{5}\,(10\, g)\, x$$

$$= -2g\, x$$

$$= -64\, x$$

$\therefore \quad \mu = 64$ அல்லது, $\sqrt{\mu} = 8.$

$\therefore \quad$ அலைவு நேரம் $= \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$ விஞடி.

மாதிரி **156.** ஒரு கிடைத்தட்டு 3 அங்குல வீச்சுடனும் 1 விஞடி காலவட்டத்துடனும் ஒரு நிலைக்குத்துக் கோட்டில் சாமானிய சீரிசையுடன் இயங்குகிறது. தட்டின்மீது ஓய்வி லிருக்கின்ற 2 ராத்தல் எடையுள்ள புத்தகம் அதைவிட்டு அகலாது என்று காட்டுக. அலைவின்போது புத்தகத்தின்மீது செயல்படும் மீப்பெரு, மீச்சிறு அழுத்தங்களைக் காண்க.

தீர்வு: தட்டு அலைவு மையத்திற்குக் கீழே x அடி தூரத்தி லிருக்கும்போது புத்தகத்தின் மீதுள்ள அழுத்தம் R என்று கொள்க.

எனவே, புத்தகத்தின் இயக்கச் சமன்பாடு $2.\frac{d^2x}{dt^2} = 2g - R.$

ஆனல் தட்டு சா. சீ. இயக்கத்திலிருப்பதால் அதன் இயக்கச் சமன்பாடு

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu\, x.$$

$$\therefore \quad R = 2g + 2\mu x = 2\ (g + \mu x) \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

இதுபோல், தட்டு அலைவு மையத்திற்குமேல் x அடி தூரத்தி லிருக்கும்போது புத்தகத்தின்மீதுள்ள அழுத்தம் R எனில்,

$$2\ \frac{d^2x}{dt^2} = R - 2g,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\ \mu x$$

என்பன இயக்கச் சமன்பாடுகளாகும்.

$$\therefore \quad R = 2g - 2\ \mu x = 2\ (g - \mu x) \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

புத்தகம் தட்டை விட்டகலாதிருக்க வேண்டுமாயின், $g > \mu x$ ஆகயிருக்க வேண்டும்.

இப்பொழுது அலைவு நேரம் $\dfrac{2\pi}{\sqrt{\mu}} = 1$ ஆகையால், $\mu = 4\pi^2$ ஆகும்.

மேலும், வீச்சு $a = 3$ அங். $= \frac{1}{4}$ அடி.

xஇன் மீப்பெரு மதிப்பு a ஆகையால், μxஇன் மீப்பெரு மதிப்பு μa ஆகும்.

அதாவது, μxஇன் மீப்பெரு மதிப்பு $= 4\pi^2 \times \frac{1}{4} = \pi^2$.

ஆகவே, g ஆனது μx-இன் மீப்பெரு மதிப்பாகிய π^2ஐவிட அதிகமாயிருப்பதால், புத்தகமானது எப்பொழுதும் தட்டிலேயே இருக்கும்.

புத்தகம் மிகத் தாழ்ந்த நிலையில் இருக்கும்போது அதன் மீதுள்ள அழுத்தம் மீப்பெரிதாகவும், மிக உயர்ந்த நிலையில் இருக்கும்போது அதன் மீதுள்ள அழுத்தம் மீச்சிறிதாகவும் இருக்கும்.

$\therefore$ மீப்பெரு அழுத்தம் $= 2\ (g + \mu a) = 2\ (g + \pi^2)$ ராத்தலிகள்.

மீச்சிறு அழுத்தம் $= 2\ (g - \mu a) = 2\ (g - \pi^2)$ ராத்தலிகள்.

மாதிரி 157. ஒரு பொருள் ஒரு நீளியல்பற்ற கயிற்றின் ஒரு முனையுடன் இணைக்கப்பட்டுத் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. கயிற்றின் மறுமுனை ஒரு நிலைக்குத்துக் கோட்டின்மீது a வீச்சுடனும், விநாடிக்கு n முழு அலைவுகளுடனும் சாமானிய சீரிசை இயக்கத்தி

லுள்ளது. $n^2 < \frac{g}{4\pi^2 a}$ ஆகயிருந்தால் ஒழிய கயிருனது விறைப் பாகயிருக்காது என்று காட்டு.

தீர்வு : அலைவு நேரம் $\frac{2\mu}{\sqrt{\mu}} = \frac{1}{n}$

$$\therefore \quad \mu = 4\pi^2 n^2$$

கயிற்றின் மேல்முனை a வீச்சுடன் சா. சீ. இயக்கத்திலிருப்ப தால் பொருளும் அதே வீச்சுடன் சா. சீ. இயக்கத்திலிருக்கும்.

பொருளின்மீது செயல்படும் விசைகள், கீழ்நோக்கிச் செயல்படும் அதன் எடை mg-யும், மேல்நோக்கிச் செயல்படும் கயிற்றின் இழுவிசை T-யுமாகும்.

t நேரத்தில் பொருளானது அதன் அலைவு மையத்திற்குக் கீழே x தூரத்தில் இருப்பதாகக் கொள்க.

$\therefore$ பொருளின் இயக்கச்சமன்பாடு : $m\ddot{x} = mg - T$

அல்லது $T = mg - m\ddot{x}$ ... ... (1)

ஆனல், பொருளின் சா. சீ. இ. சமன்பாடு $\ddot{x} = -\mu x$ ஆகும்.

$$\therefore T = mg + m\mu x$$
$$= m(g + \mu x) \quad \text{... ... (2)}$$

இது போல், பொருள் அலைவு மையத்திற்கு மேல் x தூரத்தி லிருக்கும்போது,

$$T - m(g - \mu x) \quad \text{... ... (3)}$$

என்று காணலாம்.

(2), (3) ஆகிய சமன்பாடுகளிலிருந்து, T நேரடையான முடனிருக்க வேண்டுமெனில் $g > \mu x$ ஆகயிருக்க வேண்டு மென்று காண்கிறேம். ஆனல் x இன் மீப்பெரு மதிப்பு a ஆகை யால், இயக்க முழுமையும் கயிறு விறைப்பாக யிருக்க வேண்டு மாயின் $g > \mu a$ ஆகயிருக்க வேண்டும்.

அதாவது, $g > 4\pi^2 n^2 a$

அல்லது, $n^2 < \frac{g}{4\pi^2 a}$

மாதிரி 158. ஒரு முனை நிலையாக நிறுத்தப்பட்டுள்ள ஒரு மீளியல்புடைய கயிற்றின் மறுமுனையுடன் ஒரு கனமான துகள் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. கயிற்றின் மீளியல் குணகம் துகளின் எடைக்குச் சமமாகும். கயிறானது அதன் இயல்பான நீளத்தைப் போல் நான்கு மடங்கு நீளமாகும் வரை கீழே இழுக்கப்பட்டு விடப்படுகிறது. கயிற்றின் இயல்பான நீளம் a எனில், துகளானது கயிறு இழுத்துவிடப்படும் போதிருந்த நிலையை மீண்டும் $\sqrt{\left(\frac{a}{g}\right)}\left(\frac{4\pi}{3}+2\sqrt{3}\right)$ நேரத்தில் அடையுமென்று காட்டுக.



படம் 111

தீர்வு: OA என்பது கயிற்றின் இயல்பான நீளம். O என்பது கயிற்றின் ஒரு முனை இணைக்கப்பட்டுள்ள நிலையான புள்ளி. m பொருண்மையுள்ள ஒரு துகள் A யில் இணைக்கப்பட்டதும் கயிறு B வரை நீட்சி பெறுகிற தென்று கொள்க. ஆகவே, B என்பது துகளின் சமநிலைப் புள்ளி. இந்நிலையில் கயிற்றின் இழுவிசை T யானது பொருளின் எடை mg ஐத் தாங்குமாகையால்,

$$T = mg. \quad \ldots \quad (1)$$

ஆனால் ஹூக்கின் விதிப்படி,

$$T = \lambda . \frac{AB}{OA}$$

ஆனால் λ = மீளியல் குணகம் = mg ஆகையால்,

$$T = mg\,\frac{AB}{OA} \quad \ldots \quad (2)$$

(1), (2) ஆகிய சமன்பாடுகளிலிருந்து,

$$mg = mg\cdot\frac{AB}{OA}$$

$\therefore\ AB = OA =$ கயிற்றின் இயல்பான நீளம் $= a \quad \ldots \quad (3)$

இப்பொழுது, துகளானது $OC = 4, OA = 4a$ என்ற அளவில் C என்ற புள்ளிவரை இழுத்து விடப்படுகிறது. அதன் பின்னர் t நேரத்தில் பொருளின் நிலை P என்றும் $BP = x$ என்றும் கொள்க.

∴ P வரை கயிற்றின் நீட்சி $= AP = AB + BP = a + x$.
இப்பொழுது கயிற்றின் இழுவிசை T_1 எனில்,

$$T_1 = \lambda \left(\frac{a + x}{a} \right) = mg \left(\frac{a + x}{a} \right) \quad \ldots \quad (4)$$

P யில் கீழ்முக விசை $= mg - T_1$.

கீழ்முக முடுக்கம் $= m\ddot{x}$

P யில் துகளின் இயக்கச் சமன்பாடு :

$$m\ddot{x} = mg - T_1$$

$$= mg - mg \left(\frac{a + x}{a} \right), \text{ (4) இலிருந்து.}$$

$$= mg - mg - \frac{mg}{a} x$$

$$= - \frac{mg}{a} x$$

அல்லது, $\ddot{x} = - \dfrac{g}{a} x$.

∴ $\mu = \dfrac{g}{a}$ எனில், $\ddot{x} = - \mu x$.

இது ஒரு சா. சீ. இ. சமன்பாடு.

இப்பொழுது சா. சீ. இயக்கத்தின் வேகம் — தூரச் சமன்பாடு

$$v = - \sqrt{\mu} \sqrt{(a^2 - x^2)}$$

ஆகும். இங்கு அலைவின் வீச்சு $= BC = 2a$ ஆகையால்,

$$v = - \sqrt{\frac{g}{a}} \sqrt{(4a^2 - x^2)}$$

அதாவது, $$\frac{dx}{dt} = - \sqrt{\frac{g}{a}} \sqrt{(4a^2 - x^2)} \quad \ldots \quad (5)$$

$$\therefore \frac{dx}{\sqrt{4a^2 - x^2}} = - \sqrt{\frac{g}{a}} . dt .$$

தொகையீடு காணின்,

$$- \cos^{-1} \frac{x}{2a} = - \sqrt{\frac{g}{a}} t + C$$

தொடக்கத்தில், $t = O, x = 2a \quad \therefore C = O$

$$\therefore \cos^{-1}\frac{x}{2a} = \sqrt{\frac{g}{a}} \cdot t.$$

அல்லது, $$t = \sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \cos^{-1}\left(\frac{x}{2a}\right)$$

C யிலிருந்து A வரை செல்வதற்கு ஆகும் நேரம் t_1 எனில், A யில் $x = -a$ ஆகையால்,

$$t_1 = \sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \cos^{-1}\left(-\tfrac{1}{2}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \left(\frac{2\pi}{3}\right) \qquad \cdots \quad (6)$$

(5)இல் $x = -a$ என்று பிரதியிட, Aயில் துகளின் வேகம்

$$V = -\sqrt{\frac{g}{a}} \; \sqrt{4a^2 - a^2}$$

$$= -\sqrt{\frac{g}{a}} \; \sqrt{3} \; a$$

$$= -\sqrt{3ag} \text{ (கீழ்முகமாக)}$$

$$= -\sqrt{3ag} \text{ (மேல்முகமாக)}$$

A-ல் கயிற்றின் இழுவிசை மறைந்து விடுமாகையால், துகளானது இவ் வேகத்துடன் ஈர்ப்பு முடுக்கத்தை எதிர்த்து மேல் நோக்கி அதன் வேகம் மறையும் வரை செல்லும். t_2 நேரத்தில் அதன் வேகம் மறையுமெனில், $v = u + at$ என்னும் சூத்திரத்திலிருந்து,

$$O = \sqrt{3ag} - gt_2$$

$$\therefore \quad t_2 = \frac{\sqrt{3\,ag}}{g} = \sqrt{\frac{3a}{g}}\,.$$

ஆகவே, C யிலிருந்து A வரை செல்வதற்கு ஆகும் நேரம் $= t_1 + t_2$

$$= \sqrt{\frac{a}{g}}\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \sqrt{\frac{3a}{g}}$$

$$= \sqrt{\frac{a}{g}} \left(\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}\right)$$

∴ Cயிலிருந்து A வரை சென்று மீண்டு C-க்குத் திரும்பி வர

நேரம் $= \sqrt{\frac{a}{g}} \left(\frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}\right)$

மாதிரி 159. l இயல்பான நீளமுடைய ஒரு மீளியல்புடைய கயிற்றின் ஒரு முனை ஒரு நிலையான புள்ளியுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. அதன் மறுமுனையில் ஒரு கல் கட்டப்பட்டுள்ளது. சமநிலையில் கயிற்றை l_1 நீளத்திற்கு நீட்டக் கூடியதாகக் கல்லின் எடையுள்ளது. O-வில் ஓய்வு நிலையிலிருந்து கல் கீழே போடப்பட்டால் சமநிலைப் புள்ளியிலிருந்து $\sqrt{l_1^2 - l^2}$ ஆழத்தில் கல் கண நேர ஓய்விலிருக்குமென்று காட்டுக.

தீர்வு: கயிற்றின் இயல்பான நீளம் $OA = l$ என்க. கயிற்றின் மீளியல் குணகம் λ என்றும், சமநிலையில் கயிற்றின் இழுவிசை T என்றும், துகளின் பொருண்மை m என்றும் கொண்டால்

$$mg = T = \lambda \left(\frac{l_1 - l}{l}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{\lambda}{lm}(l_1 - l) = g \qquad \dots \quad (1)$$

கல் Oவிலிருந்து கீழே போடப்பட்டால் அது l ஆழத்திற்கு ஈர்ப்பு முடுக்கத்தின்கீழ் விழுகிறது. ஆகவே, Aயில் கயிறு தொய்வு நீங்கும்போது கல்லின் கீழ்முக வேகம் $\sqrt{2gl}$ ஆகும். A-க்குக் கீழே கல் B என்னும் நிலைவரை கயிற்றின் இழுவிசையை எதிர்த்துச் சென்று பின் மேலே எழும்புவதாகக் கொள்க. இவ் வியக்கத்தில் P என்பது O-க்குக் கீழே x தூரத்தில் கல் கீழ்முகமாக இறங்கும்போதுள்ள நிலை என்று கொள்க. T_1 என்பது இப்போதைய இழுவிசை யெனில்,

$$T_1 = \lambda \left(\frac{x - l}{l}\right)$$

Pயில் கல்லின் இயக்கச் சமன்பாடு:

$$m.\ddot{x} = mg - T_1$$

$$= mg - \frac{\lambda}{l}(x - l)$$

அல்லது. $\ddot{x} = g - \frac{\lambda}{lm}(x - l)$

$2\dot{x}$ ஆல் பெருக்கித் தொகையீடு காணின்,

$(\dot{x})^2 = 2gx - \frac{\lambda}{lm}(x - l)^2 + C$, C என்பது தொகையீட்டு மாறிலி.

Aயில் $x = l$, $\dot{x} = \sqrt{2gl}$. $\therefore C = O$

$$\therefore \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2gx - \frac{\lambda}{lm}(x - l)^2$$

துகள் Bயில் கண நேர ஓய்விற்கு வருவதால், $\frac{dx}{dt} = O$

$$\therefore O = 2gx - \frac{\lambda}{lm}(x - l)^2 = O.$$

$$\therefore \frac{\lambda}{lm}(x - l)^2 - 2gx = O.$$

(1) இலிருந்து, $\frac{\lambda}{lm} = \frac{g}{l_1 - l}$

$$\therefore \frac{g}{l_1 - l}(x - l)^2 - 2gx = O$$

அல்லது, $(x - l)^2 - 2x(l_1 - l) = O$

$x^2 - 2l_1 x + l^2 = O.$

$$\therefore x = \frac{2l_1 \pm \sqrt{4l_1^2 - 4l^2}}{2}$$

$$= l_1 \pm \sqrt{l_1^2 - l^2}$$

$= l_1 + \sqrt{l_1^2 - l^2}$ (எதிரடையாளம் ஏற்புடைத்தன்று)

$$\therefore x - l_1 = \sqrt{l_1^2 - l^2}$$

$\therefore$ கணப்பொழுது ஓய்வு நிலைப்புள்ளி சமநிலைப் புள்ளியிலிருந்து $x - l_1 = \sqrt{l_1^2 - l^2}$ ஆழத்திலிருக்கும்.

மாதிரி 160. நிலைக்குத்தாகத் தொங்கும் ஒரு மீளியல்புடைய கயிற்றின் மேல் முனை ஒரு நிலையான புள்ளியுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. அதன் கீழ் முனையுடன் M, M^1 பொருண்மையுள்ள இரு பொருள்கள் இணைக்கப்பட்டு ஓய்வு நிலையில் தொங்கிக் கொண்டிருக்கின்றன. இப்பொழுது பொருள் M^1 கீழே விழுந்துவிடுகிறது. கயிற்றின் இயல்பான நீளம் a; b, c என்பன முறையே M, M^1 ஆகிய பொருண்மைகள் கயிற்றில் தொங்கவிடப்படும்போது ஏற்படுகின்ற நீட்சிகளாகும். M^1 கீழே விழுந்த பின் t நேரத்தில் கயிற்றின் மேல் முனையிலிருந்து M இன் தூரம்

$$a + b + c \cos\left(\sqrt{\frac{g}{b}}\, t\right) \text{ என்று காட்டுக.}$$

(மதுரை பி.எஸ்ஸி. 1970 ஏப்.)

தீர்வு: $OA = a$ என்பது கயிற்றின் இயல்பான நீளம். பொருள்கள் M, M^1 ஆகிய இரண்டும் தொங்கவிடப்பட்டபோது கயிற்றின் நீளம் OC எனில் $OC = a + b + c$ ஆகும்.



படம் 112

பொருள் M மட்டும் தொங்கிக்கொண்டிருக்கும் போது கயிற்றின் நீளம் OB எனில்,

$$OB = OA + AB = a + b \text{ ஆகும்.}$$

அதாவது, $OA = a$, $AB = b$, $BC = c$.

ஆகவே, M மட்டும் தொங்கிக்கொண்டிருக்கும்போது B என்பது சமநிலைப் புள்ளியாகும். M^1 ஆனது கீழே விழும்போது M ஆனது Cயில் இருப்பதால் Bயை மையமாகவும், $BC = c$ஐ வீச்சாகவும் கொண்டு சா.சீ. இயக்கத்திலிருக்கும்.

Bயில் M இருக்கும்போது கயிற்றின் இழுவிசை T ஆனது பொருளின் எடை Mgஐத் தாங்கிக் கொள்ளும். λ என்பது மீளியல் குணகம் எனில்,

$$Mg = T = \lambda \cdot \frac{b}{a}$$

$$\therefore \quad \lambda = Mg\,\frac{a}{b} \qquad \ldots \quad (1)$$

M^1 விழுந்தபின் t நேரத்தில் M ஆனது P என்னும் நிலையிலிருப்பதாகக் கொள்க. $BP = x$ என்றும், இப்போது கயிற்றின் இழுவிசை T_1 என்றும் கொள்க.

$$\therefore \quad T_1 = \lambda \cdot \frac{b+x}{a} = Mg\,\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{b+x}{a}\right) = Mg\,\frac{b+x}{b}$$

Pயில் இயக்கச் சமன்பாடு :

$$M\ddot{x} = Mg - T_1$$

$$= Mg - Mg\left(\frac{b+x}{b}\right)$$

$$= \frac{-Mg}{b}\,x$$

அல்லது, $\ddot{x} = \frac{-g}{b}\,x$

$\mu = \frac{g}{b}$ எனில், $\ddot{x} = -\mu x$

ஆகவே, M இன் இயக்கம் சாமானிய சீரிசையாகும்.

ஆகவே, இவ்வியக்கத்தின் தூர-நேரச் சமன்பாடு

$x = a\cos\sqrt{\mu}\,t$ ஆகும்.

இங்கு a = சா. சீ. இ. இன் வீச்சு $= c$.

அதாவது, $x = c\cos\sqrt{\frac{g}{b}}\,t$

$\therefore$ x நேரத்தில் O-க்குக் கீழே M இன் தூரம் $= OP$

$$= OA + AB + BP$$

$$= a + b + c\cos\left(\sqrt{\frac{g}{b}}\cdot t\right)$$

பயிற்சி 15

1. ஒரு நேர்கோட்டின் மேலுள்ள O என்னும் நிலையான புள்ளியை மையமாகக் கொண்டு ஒரு துகள் அந் நேர்கோட்டின் மீது சாமானிய சீரிசையுடன் இயங்குகிறது. O-விலிருந்து 6 அடி, 8 அடி தூரங்களில் அதன் வேகங்கள் முறையே 10 அடி/வினுடி, 8 அடி/வினுடி. சா. சீ. இயக்கத்தின் வீச்சு, கால வட்டம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

2. ஒரு நேர் கோட்டில் சாமானிய சீரிசை இயக்கத்தி லுள்ள ஒரு துகள் அலைவு மையத்திலிருந்து 14 மீட். தூரத்தி

லிருந்து புறப்படுகிறது. அதன் மீப்பெரு வேகம் 22 மீட்./விஞடி யெனில் காலவட்டத்தைக் காண்க.

3. ஒரு நேர்கோட்டில் O என்னும் புள்ளியை அலைவு மையமாகக் கொண்டு சாமானிய சீரிசை இயக்கத்திலிருக்கும் ஒரு துகள் O விலிருந்து x_1, x_2 ஆகிய தூரங்களில் முறையே v_1, v_2 ஆகிய திசை வேகங்களைப் பெற்றிருக்கிறது. அதன் வீச்சு, அலைவு நேரம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

4. ஒரு துகள் 4 செ.மீ. வீச்சுடன் சாமானிய சீரிசை இயக்கத்திலுள்ளது. அதன் அலைவு மையத்திலிருந்து 1 செ.மீ. தூரத்தில் அதன் முடுக்கம் 3 செ.மீ./வி². எனில், அலைவு மையத்திலிருந்து 2 செ.மீ. தூரத்தில் அதன் வேகத்தைக் காண்க.

5. சாமானிய சீரிசை இயக்கத்திலிருக்கும் ஒரு துகள் அலைவு மையத்திலிருந்து 3 மீட்டர், 5 மீட்டர் தூரங்களில் முறையே 13 மீட்./வி., 5 மீ./வி. ஆகிய வேகங்களைப் பெறு கிறது. வீச்சு, அலைவு நேரம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

6. ஒரு துகள் π விஞடி காலவட்டத்துடன் சாமானிய சீரிசை இயக்கத்திலுள்ளது. அதன் மீப்பெரு முடுக்கம் 5 மீட்./வி². எனில் அதன் வீச்சு, அலைவு மையத்திலிருந்து 1 மீட்டர் தூரத்தில் அதன் வேகம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

7. O ஐ அலைவு மையமாகக் கொண்டு ஒரு துகள் சாமானிய சீரிசை இயக்கத்தில் நகர்ந்து கொண்டிருக்கிறது. அதன் வீச்சு 4 மீட்டர்கள்; துகள் O-விலிருக்கும்போது அதன் வேகம் 24π மீட்டர்/விஞடி. துகளானது நிமிடத்திற்கு 180 அலைவுகளைச் செய்து முடிக்குமென்று காட்டுக.

8. சாமானிய சீரிசை இயக்கத்திலிருக்கும் ஒரு துகள் அலைவுமையத்திலிருந்து 2 செ.மீ., 3 செ.மீ. தூரங்களிலிருக் கும்போது முறையே 5 செ.மீ./வி., 4 செ. மீ./வி. வேகங்களைப் பெற்றிருக்கிறதெனின் அலைவுக் காலம், வீச்சு ஆகியவற்றைக் காண்க.

9. சாமானிய சீரிசை இயக்கத்திலிருக்கும் ஒரு துகள் அடுத் தடுத்த மூன்று விஞடிகளில் அதன் அலைவு மையத்திலிருந்து ஒரே திசையில் 1, 5, 5 செ.மீ., தூரங்களிலிருக்கிறது. அலைவுக் காலம் $\dfrac{2\pi}{\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)}$ விஞடிகள் என்று காட்டு.

10. சாமானிய சீரிசை இயக்கத்திலிருக்கும் ஒரு துகள் ஒரு நிமிடத்தில் 100 முழு அதிர்வுகளைச் செய்து முடிக்கிறது. அலைவு மையத்தில் அதன் வேகம் 15 மீட்டர்/விநாடி. அதன் பாதையின் நீளம் என்ன? அலைவு மையத்திற்கும், எல்லை நிலைக்கும் நடுவிலிருக்கும்போது அதன் வேகம் என்ன?

11. ஒரு துகள் ஒரு நேர்கோட்டின் மீது அக் கோட்டின் மேலுள்ள O என்னும் நிலையான புள்ளியிலிருந்து அதன் தூரத்தைப் போன்று μ மடங்குக்குச் சமமாகவும் எப்பொழுதும் O ஐ நோக்கியதுமான முடுக்கத்துடன் நகர்ந்து கொண்டிருக்கிறது. $OA = 12$ செ.மீ. என்ற தூரத்திலுள்ள A என்னும் புள்ளியிலிருந்து அது 10 செ.மீ./வி. என்னும் வேகத்துடன் புறப்படுகிறது. $\mu = 4$ எனில், அது O ஐ அடையும்போது அதன் வேகத்தையும், O ஐ அடைவதற்கு ஆகும் நேரத்தையும் காண்க.

12. ஒரு துகள் சா. சீ. இயக்கத்துடன் நகர்ந்து கொண்டிருக்கிறது. $t = 4$ ஆகும்போது துகள் அலைவு மையத்திலிருக்கிறது; $t = 8$ ஆகும்போது அதன் வேகம் $8\sqrt{2}$ மீட்./வி. இயக்கத்தின் அலைவுக் காலம் 32 விநாடி யெனில் பாதையின் நீளம் $\dfrac{512}{\pi}$ மீட்டர்கள் என்று காட்டுக.

13. 16 மீட்டர் வீச்சுடன் சாமானிய சீரிசை இயக்கத்திலிருக்கும் ஒரு துகள் அலைவு மையத்திலிருந்து $8\sqrt{3}$ மீட்டர் தூரம் செல்ல 6 விநாடி எடுத்துக் கொள்கிறது. அலைவு நேரத்தைக் காண்க.

14. 12 விநாடி கால வட்டத்துடன் சாமானிய சீரிசை இயக்கத்திலிருக்கும் ஒரு துகள் அலைவு மையத்திலிருந்து 8 செ.மீ. தூரத்தை 2 விநாடிகளில் கடக்கிறது. இயக்கத்தின் வீச்சு, மீப்பெரு வேகம், 2 விநாடி இறுதியில் வேகம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

15. ஒரு துகள் 4 மீட்டர் வீச்சுடன் சாமானிய சீரிசை இயக்கத்திலிருக்கிறது. மையத்திற்கும், எல்லை நிலைக்கும் மத்தியிலிருக்கும்போது அதன் வேகம் $12\sqrt{3}$ மீட்./வி. கால வட்டமென்ன?

16. சாமானிய சீரிசை இயக்கத்திலிருக்கும் ஒரு துகளின் இடப்பெயர்ச்சி, வேகம், முடுக்கம் முதலியன ஒரு குறிப்பிட்ட

கணத்தில் முறையே 3 செ.மீ., 3 செ.மீ./வி., 3 செ.மீ./வி² எனில், துகளின் மீப்பெரு வேகத்தையும், காலவட்டத்தையும் காண்க.

17. ஒரு துகள் π காலவட்டத்துடன் சாமானிய சீரிசை இயக்கத்திலுள்ளது. $t = 1$ ஆக யிருக்கும்போது $x = 1$, $\frac{dx}{dt} = 2$ எனில் இயக்கச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

18. x அச்சின் மீது நகர்ந்து கொண்டிருக்கும் ஒரு துகளின் வேகம் v ஆனது $v^2 = u^2(8\,bx - x^2 - 12\,b^2)$ என்னும் தொடர்பின் மூலம் தரப்படுகிறது. அதன் இயக்கம் $x = 4\,b$ ஐ மையமாகவும் $2b$ வீச்சும் கொண்ட ஒரு சா. சீ. இ. என்று காட்டுக.

19. ஒரு துகள் சாமானிய சீரிசையில் இயங்கிக் கொண்டிருக்கிறது. $t = 2$ வினாடிகளில் அது மையத்தைக் கடந்து செல்கிறது. $t = 4$ வினாடிகளில் அதன் வேகம் 4 மீட்டர்/வினாடி, முழு அலைவு நேரம் 18 வினாடிகளெனில், பாதையின் வீச்சு $\frac{32\sqrt{2}}{\pi}$ மீட்டர்கள் என்று காட்டுக.

20. x அச்சின்மீது, நகர்ந்து கொண்டிருக்கும் ஒரு துகளின் x-அச்சுத்தூரம் t நேரத்தில் x எனில், பின்வரும் சமன்பாடுகள் ஒவ்வொன்றின் மூலம் தரப்படுகின்ற இயக்கம் ஒரு சா.சீ. இ. என்று காட்டுக.

(i) $x = 5\cos 2t + 12\sin 2t$

(ii) $x = A\cos Pt + B\sin Pt.$

(iii) $x = 2\sin 3t - \frac{1}{2}\cos 3t + 1.$

21. ஒரு துகள் சாமானிய சீரிசை இயக்கத்தில் நகர்ந்து கொண்டிருக்கிறது. ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டபின் முதல் வினாடியில் அது a தூரத்தையும், அடுத்த வினாடியில் அதே திசையில் b தூரத்தையும் அது கடக்கிறது. இயக்கத்தின் வீச்சு $\frac{2a^2}{3a - b}$ என்று காட்டு.

22. ஒரு நேர்கோட்டில் சாமானிய சீரிசை இயக்கத்துடன் நகர்ந்து கொண்டிருக்கும் ஒரு துகள் 1 வினாடி அலைவு நேரத்தை

யும் 2 மீட்டர் வீச்சையும் கொண்டிருக்கிறது. சராசரி நிலையி லிருந்து 1 மீட்டர் தூரத்தில் அதன் வேகத்தையும், மீப்பெரு முடுக்கத்தையும் காண்க.

23. a வீச்சும், T காலவட்டமும் கொண்ட ஒரு சாமானிய சீரிசை இயக்கத்தில் அலைவு மையத்திலிருந்து x தூரத்தில் வேகம் v ஆனது.

$$v^2 T^2 = 4\pi^2 (a^2 - x^2)$$

என்னும் தொடர்பின் மூலம் தரப்படுமென்று காட்டுக,

24. ஒரு துகள் சா. சீ. இயக்கத்தில் நகர்ந்து கொண்டிருக் கிறது. இரு நிலைகளில் அதன் வேகங்கள் u v என்னும், முடுக் கங்கள் முறையே α β ஆகும். இவ்விரு நிலைகளுக்குமிடையே யுள்ள தூரம் $\dfrac{v^2 - u^2}{\alpha \beta}$ என்றும், இயக்கத்தின் வீச்சு $\dfrac{\sqrt{(v^2 - u^2)(\alpha^2 v^2 - \beta^2 u^2)}}{\beta^2 - \alpha^2}$ என்றும் காட்டுக.

(மதுரை பி. எஸ்ஸி. 1971 செப்.)

25. ஒரு சாமானிய சீரிசை இயக்கத்தில் இயக்கக் கோட்டிலுள்ள அலைவு மையமில்லாத ஒரு நிலையான புள்ளியி லிருந்து a, b, C தூரங்களில் துகளின் வேகங்கள் முறையே u, v, ω எனில், அலைவு நேரம் T என்பது

$$\frac{4\pi^2}{T^2}(b-c)(c-a)(a-b) = \begin{vmatrix} u^2 & v^2 & \omega^2 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

என்னும் சமன்பாட்டின் மூலம் தரப்படுமென்று காட்டுக.

26. OAB என்னும் நேர்கோட்டில் சாமானிய சீரிசை இயக்கத்துடன் நகர்ந்து கொண்டிருக்கும் ஒரு துகள் அலைவு மையம் O விலிருந்து a, b தூரங்களிலுள்ள A, B ஆகிய புள்ளி களில் பூச்சிய வேகத்தையும், AB யின் நடுப்புள்ளியில் v வேகத் தையும் கொண்டிருக்கிறது. இயக்கத்தின் காலவட்டம் $\dfrac{\pi(b-a)}{v}$ என்று காட்டுக.

27. m பொருண்மையுள்ள ஒரு துகள் O என்னும் ஒரு நிலையான புள்ளியை நோக்கி, அப்புள்ளியிலிருந்து அதன்

தூரத்தைப்போல் $m\mu$ மடங்கு விசையுடன் ஈர்க்கப்படுகிறது. தொடக்கத்தில் O-விலிருந்து c தூரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து v வேகத்துடன் O-ஐ நோக்கி வீசப்பட்டால், அலைவின் வீச்சு $\left(c^2 + \frac{v^2}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}$ என்று காட்டுக.

28. ஒரு துகள் ஒரு நேர்கோட்டில் நகருகிறது. அக்கோட்டிலுள்ள ஒரு நிலையான புள்ளியிலிருந்து x தூரத்தில் அதன்வேகம் v ஆகும். $v^2 = \alpha - \beta x^2$ எனில், α, β மாறிலிகள், இயக்கம் ஒரு சா. சீ. இ. என்று காட்டு.

(சென்னை பி. எஸ்ஸி. 1967 ஏப்.)

29. சாமானிய சீரிசை இயக்கத்திலிருக்கும் ஒரு துகள் ஒரு நிமிடத்தில் 100 முழு அலைவுகளைச் செய்து முடிக்கிறது. அதன் மீப்பெரு வேகம் 20 அடி/வினுடி. வீச்சு, மீப்பெரு முடுக்கம் ஆகியவற்றைக் காண்க. அலைவு மையத்திற்கும், எல்லை நிலைக்கும் நடுவிலிருக்கும்போது அதன் வேகத்தையும் காண்க.

(சென்னை பி.எஸ்ஸி. 1966 செப்.)

30. 8 ராத்தல் பொருண்மையுள்ள ஒரு பொருள் ஒரு இலேசான வில்லில் தொங்கவிடப்பட்டபோது வில்லை 6 அங்குலம் நீட்சி அடையச் செய்கிறது. பொருளானது மேலும் 2 அங்குலத்திற்குக் கீழே இழுத்து விடப்படுகிறது. அலைவுக் காலத்தையும், சமநிலைப் புள்ளியைக் கடக்கும்போது பொருளின் இயக்க ஆற்றலையும் காண்க.

31. m பொருண்மையுள்ள ஒரு துகள் a இயல்பான நீளமுள்ள ஒரு கயிற்றின் ஒரு முனையில் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. துகள் தொங்கும்போது கயிற்றின் நீளம் $\frac{4a}{3}$ கயிற்றின் மீளியல் குணகம் காண்க. இப்பொழுது துகள் மேலும் $\frac{a}{6}$ நீளத்திற்குக் கீழே இழுத்துவிடப்படுகிறது. துகளின் இயக்கத்தின் அலைவு நேரத்தையும் மீப்பெரு வேகத்தையும் காண்க.

32. 1 கிராம் பொருண்மையுள்ள ஒரு சிறு பொருள் F என்னும் விசையின்கீழ் ஒரு நேர்கோட்டின்மீது சாமானிய சீரிசை இயக்கத்திலிருக்கிறது. இயக்கத்தின்போது பொருளின் மீப்பெரு உந்தம் 5 கிராம் செ.மீ./வினுடி ; Fஇன் மீப்பெரு வேலை வீதம் 25 எர்க்குகள்/வினுடி. இயக்கத்தின் வீச்சு, அலைவு நேரம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

33. ஒரு துகள் ஒரு நேர்கோட்டின்மீது சா. சீ. இயக்கத்திலுள்ளது. அதன் மீப்பெரு வேகம் V என்றும் காலவட்ட நேரம் T என்றும் தரப்பட்டுள்ளன. அதன் வீச்சு, மீப்பெரு முடுக்கம் ஆகியவற்றைக் காண்க. மீப்பெரு முடுக்கப் புள்ளிக்கும், மீச்சிறு முடுக்கப் புள்ளிக்கும் நடுவில் துகளின் வேகத்தையும் காண்க.

34. நீட்டப்படாத நீளம் l உடைய ஒரு இலேசான, மீளியல்புடைய கயிறு ஒன்று ஒரு நிலையான புள்ளியிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. m பொருண்மையுள்ள ஒரு துகள் அதன் மறுமுனையில் தொங்கவிடப்பட்டபோது கயிற்றின் நீட்சி $\frac{l}{5}$. கயிறு மேலும் $\frac{l}{5}$ தூரத்திற்குக் கீழே இழுத்து ஓய்விலிருந்து விடப்படுகிறது. இயக்கம் சாமானிய சீரிசையென்று நிறுவுக. அதன் அலைவுக் காலம், துகளின் மீப்பெரு வேகம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

35. இயல்பான நீளம் 2 அடியும், மீளியல் குணகம் 2 ராத். எடையுமுள்ள ஓர் இலேசான மீளியல்புள்ள கயிறு ஒரு வழவழப்பான மேசையின்மேல் 3 அடி இடைவெளியிலுள்ள A, B என்னுமிரு புள்ளிகளுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. கயிற்றின் நடுப்புள்ளியுடன் $\frac{1}{2}$ ராத்தல் பொருண்மையொன்று இணைக்கப்பட்டு, A-யை நோக்கி இழுக்கப்படுகிறது. A-யிலிருந்து 1 அடி தூரத்திலிருக்கும்போது ஓய்வு நிலையிலிருந்து அத்துகள் விடப்படுகிறது. விளைவு இயக்கம் சா. சீ. இ. என்று காட்டுக. அலைவு நேரம், மீப்பெரு வேகம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

36. l நீளமுள்ள ஒரு மீளியல்புடைய ஒரு வில் ஹூக்இன் விதிக்குட்படுவதாயுள்ளது. அதன் ஒரு முனை ஒரு நிலையான புள்ளியுடன் இணைக்கப்பட்டு, மறுமுனையில் m பொருண்மையுள்ள பொருள் தொங்கவிடப்பட்டபோது வில் $\frac{1}{2}$ நீளம் நீட்சி பெறுகிறது. கயிற்றின் நீட்சி மேலும் $\frac{3}{4}$ l நீளத்திற்கு நீட்டப்பட்டு, அப்பொருளுக்கு $\frac{\sqrt{7gl}}{8}$ மேல்நோக்கிய வேகம் கொடுக்கப்படுகிறது. தொடர்ந்து அதன் இயக்கத்தை ஆராய்க. வில்லின் மீப்பெரு நீட்சி $\frac{(l\sqrt{2}+1)}{2}$ என்று காட்டுக.

37. ஒரு முனை நிலையாக வைக்கப்பட்டுள்ள ஒரு வில்லின் மறுமுனையில் m பொருண்மையொன்று சமநிலையில் தொங்கவிடப்பட்டபோது வில் l நீளத்திற்கு நீட்சி பெறுகிறது. இப்

பொருண்மையானது மேலும் சிறிது தூரத்திற்குக் கீழே இழுத்து விடப்பட்டால் அது $t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ காலவட்டமுடைய சாமானிய சீரிசை அதிர்வுகளுடன் இயங்குமென்று காட்டு.

இதுபோல், m_1 என்னும் மற்றொரு பொருண்மை t^1 காலவட்டமுடைய சாமானிய சீரிசை அதிர்வுகளுடன் இயங்கினுல் $\frac{m}{m_1} = \left(\frac{t}{t_1}\right)^2$ என்று காட்டு. இரு பொருண்மைகளும் வில்லில் ஒன்ருகத் தொங்கவிடப்பட்டால் அதிர்வுக்காலம் என்னவாக இருக்கும் ?

38. ஒரு கடலில் துறைமுக முனையில் ஒரு நாள் காலை 3 மணிக்கு உயர்ந்த அலையின்போது நீரின் ஆழம் 26 அடி ; 6 மணி 15 நிமிடங்களுக்குப் பின்னர் தாழ்ந்த அலையின்போது நீரின் ஆழம் 16 அடி. நீர்மட்டம் சாமானிய சீரிசை இயக்கத்துடன் மாறுவதாகக் கருதி, அதே காலை வேளையில் நீரின் ஆழம் 24 அடியாக இருக்கும்போது நேரம் என்னவென்று காண். காலை 5 மணி 5 நிமிடங்களின்போது நீர்மட்டம் என்ன வேகத்தில் குறைந்து கொண்டிருக்கும் என்று காண்க.

39. a வீச்சுடன் சா. சீ. இ. இருக்கும் ஒரு துகளின் மீப்பெரு முடுக்கம் f ஆகும். அதன் பாதையில் இரண்டு மாறுகின்ற புள்ளிகள் $\frac{1}{2}\, a$ இடைவெளியிலுள்ளன. இப் புள்ளிகளிலுள்ள வேகங்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டல் $\frac{15\, af}{8}$ ஐ மிஞ்ச முடியாது என்று காட்டுக.

40. இயல்பான நீளம் a-யும், மீளியல் குணகம் λ-வுமுடைய ஒரு மீளியல்புடைய கயிற்றின் ஒரு முனை ஒரு வழவழப்பான கிடைத்தள மேசையின் மீதுள்ள ஒரு நிலையான புள்ளியில் கட்டப்பட்டுள்ளது. அதன் மறுமுனை மேசையின் மேல் கிடக்கும் m எனும் பொருண்மையுடன் கட்டப்பட்டுள்ளது. கயிற்றின் நீட்சி b ஆகும் வரை துகள் இழுக்கப்பட்டு விடப்படுகிறது. அதன் இயக்கம்பற்றி ஆராய்க. ஒரு முழு அலையின் நேரம் $2\left(\pi + \frac{2a}{b}\right)\sqrt{\frac{ma}{\lambda}}$ என்று காட்டு.

41. இயல்பான நீளம் a-யும் மீளியல் குணகம் λ-வுமுடைய ஒரு மீளியல்புடைய கயிற்றின் ஒரு முனை ஒரு வழவழப்பான கிடைத்தள மேசையின் மீதுள்ள ஒரு நிலையான புள்ளியில்

கட்டப்பட்டுள்ளது. அதன் மறுமுனை மேசையின் மேல் கிடக்கும் m எனும் பொருண்மையுடன் கட்டப்பட்டுள்ளது. இப்பொழுது துகளானது கயிற்றில் கட்டப்பட்டுள்ள முனையிலிருந்து கயிற்றின் இயல்பான நீளத்தைப்போல் இரு மடங்கு நீளத்திற்கு இழுத்து விடப்படுகிறது. ஒரு முழு அலைவின் நேரம்

$$a(\pi + 2)\sqrt{\frac{am}{\lambda}}$$

என்று காட்டுக.

42. ஒரு சீரான மீளியல்புடைய கயிற்றின் ஒரு புள்ளியில் ஒரு கனமான பொருள் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. கயிற்றின் இரு முனைகள் ஒரு நிலைக்குத்துக் கோட்டிலுள்ள இரு புள்ளிகளில் கட்டப்பட்டுள்ளன. கயிற்றின் மீளியல்புக் குணகம் λ; கயிற்றின் இரு பகுதிகளின் நீட்டப்படாத நீளங்களின் இசைச் சராசரி h எனில் கயிறு விறைப்பாக இருக்கும்போது ஒரு நிலைக்குத்து அலைவின் காலவட்டம் $2\pi\sqrt{\frac{mh}{2\lambda}}$ என்று காட்டுக.

43. ஒரு கயிறு சமநிலையில் தொங்கிக் கொண்டிருக்கும் போது அதன் நீளம் l; ஒரு விநாடியில் அலையும் அலைவுகளின் எண்ணிக்கை n. கயிற்றின் இயல்பான நீளம் $\left(l - \frac{g}{4\pi n^2}\right)$ என்று காட்டுக.

44. m பொருண்மையுள்ள ஒரு பொருளுடன் இரண்டு இலேசான கயிறுகள் கட்டப்பட்டுள்ளன. கயிறுகள் விறைப்பாக இருக்குமாறு அவற்றின் முனைகள் நிலையான புள்ளிகளுடன் கட்டப்பட்டுள்ளன. கயிறுகள் ஒவ்வொன்றின் மீளியல் குணகம் λ; இழுவிசை T. அவற்றின் நீளங்கள் a, b. கயிறுகளின் வழியே பொருளின் ஒரு அலைவு நேரம் $2\pi\left[\frac{mab}{(T+\lambda)(a+b)}\right]^{\frac{1}{2}}$ என்று காட்டுக.

45. இயல்பான நீளம் aயும், மீளியல் குணகம் $2mg$-யும் உடைய ஓர் இலேசான மீளியல்புள்ள கயிற்றின் ஒரு முனை A என்னும் நிலையான புள்ளியில் கட்டப்பட்டுள்ளது; அதன் மறு முனையில் m பொருண்மையுள்ள பொருளொன்று இணைக்கப்பட்டுள்ளது. தொடக்கத்தில் பொருள் A-யில் ஓய்வு நிலையில் வைக்கப்பட்டுக் கீழே போடப்படுகிறது. இயக்கத்தின்போது கயிற்றின் மீப்பெரு நீட்சி $\frac{1}{2}a(1 + \sqrt{5})$ என்றும், பொருள்

$(\pi + 2 - \tan^{-1} 2) \sqrt{\frac{2a}{g}}$ நேரத்திற்குப்பின் மீண்டும் A-ஐ அடையுமென்று காட்டுக.

46. ஒரு நிலையான புள்ளியில் கட்டப்பட்டுள்ள l நீளமுள்ள ஒரு கயிற்றின் மறுமுனையில் ஒரு துகள் இணைக்கபபட்டு, அந்த நிலையான புள்ளியிலிருந்து கீழே போடப்படுகிறது. துகள் அதன் மிகத் தாழ்ந்த நிலைவலிருக்கும்போது கயிற்றின் நீளம் அதன் இயல்பான நீளத்தைப்போல் இரு மடங்கு உள்ளது. கயிற்றின் மீளியல் குணகம் துகளின் எடையைப்போல் நான்கு மடங்கு என்றும், இயல்பான நீளத்திற்குமேல் நீள்வதற்குக் கயிறு எடுத்துக் கொண்ட நேரம் $\left[\frac{\pi}{2} + \sin^{-1}\frac{1}{3}\right]\sqrt{\frac{l}{4g}}$ என்றும் காட்டுக.

45. ஒரு வழவழப்பான இலேசான கப்பி ஒரு நிலையான புள்ளியிலிருந்து l இயல்பான நீளமும், mg மீளியல் குணகமும் கொண்ட ஒரு கயிற்றின்மூலம் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. கப்பி யின் வழியே செல்லும் ஒரு இலேசான நீளியல்பற்ற கயிற்றின் முனைகளில் m_1 m_2 ஆகிய பொருண்மைகள் தொங்குகின்றன. M என்பது m_1 m_2 ஆகியவற்றின் இசைச் சராசரியெனில், கப்பி யானது தொங்கு புள்ளிக்குக் கீழே $l\left(1 + \frac{2M}{m}\right)$ ஆழத்திலுள்ள புள்ளியை அலைவு மையமாகக் கொண்டு சா. சீ. இயக்கத்தி லிருக்குமென்று காட்டுக.

48. இயல்பான நீளம் l-ம், மீளியல் குணகம் $\frac{mg}{k}$-ம் கொண்ட ஒரு கயிற்றின் ஒரு முனையில் m பொருண்மையுள்ள ஒரு துகள் இணைக்கப்பட்டுள்ளது; கயிற்றின் மறுமுனை O என்னும் நிலையான புள்ளியில் கட்டப்பட்டுள்ளது. துகளானது O-விலிருந்து கீழே போடப்பட்டால், துகளின் மீப்பெரு வேகம் $\sqrt{gl(2+k)}$ என்று காட்டுக.

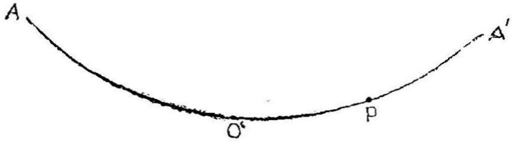
(சென்னை பி எஸ். ஸி. 1968 செப்.)

49. ஒரு கிடைத்தட்டு ஒரு விநாடி அலைவு நேரம் கொண்ட சா. சீ. இயக்கத்துடன் நிலைக்குத்தாக நகருகிறது. தட்டின் மேல் வைக்கப்பட்டுள்ள பொருட்கள் தட்டினின்றும் நீங்காத வாறு தட்டு நகரக்கூடிய மீப்பெரு வீச்சைக் காண்க,

50. ஒரு அடி வீச்சும், ஒரு வினாடி அலைவு நேரமும் கொண்ட சா. சீ. இயக்கத்துடன் நிலைக்குத்தாக நகருகின்ற ஒரு கிடைத் தட்டின்மேல் m பொருண்மையுள்ள பொருளொன்று வைக்கப்பட்டுள்ளது. சராசரி நிலையிலிருந்து $\frac{8}{\pi^2}$ அடி உயரத்தில் பொருள் தட்டைவிட்டுப் பிரிந்து விடுமென்றும், அதன்பின் அது சராசரி நிலைக்குமேல் $\left(\frac{\pi^2}{16} + \frac{4}{\pi^2}\right)$ உயரம்வரை செல்லுமென்றும் காட்டுக.

வளைவரையின் மேல் சாமானிய சீரிசை இயக்கம்
(S. H. M. on a curve)

ஒரு நேர்கோட்டின் மீதுள்ள சாமானிய சீரிசை இயக்கம் பற்றி நாம் விரிவாக ஆராய்ந்தோம். நேர்கோட்டுச் சாமானிய சீரிசை இயக்கத்தைப் போல் வளைகோட்டின் மீதும் சாமானிய சீரிசை இயக்கம் நடைபெற முடியும். இத்தகைய வளைகோட்டுச் சாமானிய சீரிசை இயக்கம் பற்றி இங்கு ஆராய்வோம்.



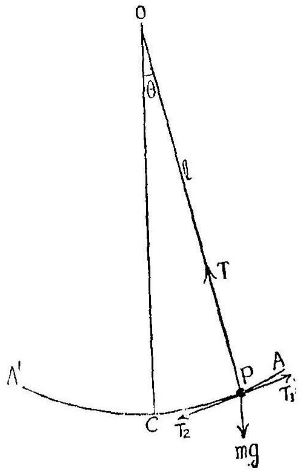
படம் 113

$A\,A^1$ என்னும் வளைவரையின் மீது P என்னும் துகள் நகர்ந்து கொண்டிருப்பதாகக் கொள்வோம். O என்பது அவ்வளைவரையின் மேலுள்ள ஒரு நிலையான புள்ளி. துகளின் தொடுகோட்டு முடுக்கம் O என்னும் அந்த நிலையான புள்ளியிலிருந்து துகளின் தூரத்திற் கேற்ப மாறுபடுவதாகவும், எப்பொழுதும் அந் நிலையான புள்ளியை நோக்கியே செயல்படுவதாகவும் அமைந்துள்ளது. இத்தகைய முடுக்கத்துடன் நகரும் அத்துகள் வளைவரையில் A, A^1 என்னும் இரு புள்ளிகளை எல்லை நிலைகளாகக் கொண்டு அலைவு இயக்கத்துடன் நகர்ந்து கொண்டிருக்கும். துகளின் இத்தகைய இயக்கம் நேர்கோட்டுச் சாமானிய சீரிசை இயக்கத்தைப் போலவே யிருப்பதால் இதுவும் சாமானிய சீரிசை இயக்கமேயாகும். இதை வளைகோட்டுச் சாமானிய சீரிசை இயக்கமென்று குறிப்பிடலாம். நேர்கோட்டுச் சாமானிய சீரிசை இயக்கத்தின் எல்லாத் தன்மைகளையும் வளைகோட்டுச் சாமானிய சீரிசை இயக்கம் பெற்றிருக்குமென்பதை எளிதில் காணலாம்.

தனியூசலி (Simple Pendulum)

ஒரு நிலையான புள்ளியுடன் ஓர் இலேசான நீளியல்பற்ற இழையின்மூலம் இணைக்கப்பட்டு ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் ஊசலாடிக் கொண்டிருக்கும் ஒரு கனமான துகளின் அமைப்புக்குத் தனியூசலி (Simple pendulum) என்று பெயர். அக்கனமான துகளுக்கு ஊசற்குண்டு (bob) என்று பெயர். இத்தனியூசலியானது, அந்த நிலையான புள்ளியை மையமாகவும், இழையின் நீளத்தை ஆரையாகவும் கொண்ட நிலைத்தள வட்டத்தின் ஒரு வில்லில் ஊசலாடிக் கொண்டிருக்கும்.

O என்னும் நிலையான புள்ளியில் இணைக்கப்பட்ட l நீள மெல்லிய இழையின் மறுமுனையில் தொங்கிக் கொண்டிருக்கும் m பொருண்மையுள்ள துகள் ACA^1 என்னும் வட்டவில் பாதையில் ஊசலாடுகிறது. OC என்பது O வழி நிலைக்குத்துக் கோடு. t நேரத்தில் P என்பது துகளின் நிலை யென்றும், நிலைக்குத்துடன் OP யின் சாய்வு θ ஆரையன் என்றும் கொள்க.



படம் 114

வில் $CP = S$ என்க.

துகளின்மீது செயல்படும் விசைகளாவன :

(i) நிலைக்குத்தாகக் கீழ் நோக்கிச் செயல்படும் துகளின் எடை mg.

(ii) PO திசையில் செயல்படும் இழையின் இழுவிசை T. துகளின் தொடுகோட்டு வேகம் v ஆதலின், தொடு கோட்டு முடுக்கம் $\frac{dv}{dt}$ ஆகும். ஆனால், துகள் l ஆரையுள்ள வட்டப் பாதையில் நகருவதால்,

$$v = l.\frac{d\theta}{dt}$$

$$\therefore \frac{dv}{dt} = l.\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$\therefore$ PT_1 திசையில் தொடுகோட்டுவிசை $= m \cdot l \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$.

ஆனால், mg, T ஆகியவற்றின் தொடுகோட்டு வழிக்கூறுகள் முறையே PT_2 திசையில் $mg \sin \theta$ — ம், பூச்சியமுமாகும்.

ஆகவே, $ml \dfrac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin \theta$

அல்லது, $l \dfrac{d^2\theta}{dt^2} = -g \sin \theta$.

ஊசலியின் வீச்சு மிகச் சிறியதெனக் கொண்டால், θ மிகச் சிறியதாகும். ஆகவே, $\sin \theta$ என்பது தோராயமாக θ — வுக்குச் சமமாகும்.

$$\therefore l \frac{d^2\theta}{dt^2} = -g \cdot \theta$$

அல்லது, $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = -\dfrac{g}{l} \theta$.

இது ஒரு சாமானிய சீரிசை இயக்கத்தைக் குறிக்கும் சமன்பாடு ஆகும். இச்சமன்பாட்டில் $\dfrac{g}{l} = \mu$ என்று கொள்வோமானால், மேற்கண்ட சமன்பாட்டை

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\mu \theta$$

என்று எழுதலாம். ஆகவே, துகளானது C ஐ அலைவு மையமாகக் கொண்டு சாமானிய சீரிசை இயக்கத்திலிருக்கும்.

துகளின் அலைவு நேரம் (காலவட்டம்)

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

குறிப்பு: மேலே கூறப்பட்ட தனியூசலி கொள்கையளவில் ஏற்றுக்கொள்ளத் தக்கதேயாகும்; ஏனெனில் எடையற்ற இலேசான இழை என்பதும், துகள் என்று சொல்லத்தக்க ஊசற்குண்டு என்பதும் கொள்கையளவில் ஏற்றுக் கொள்ளலாகுமே யொழிய, பயன் முறைக்கு ஒவ்வாததாகும். ஆயினும், தரப்பட்டுள்ள ஓர் ஊசலியின் அலைவுக் காலத்தையே அலைவுக்காலமாகக் கொண்டு ஊசலாடுகின்ற ஒரு தனி ஊசலிக்கு ''இணைமாற்றுத் தனி ஊசலி — (இ, த. ஊ)'', (Simple Equivalent Pendulum — S. E. P.) என்று பெயர்.

விநாடி ஊசலி (Second's Pendulum)

அலைவு நேரம் இரண்டு விநாடியாகக் கொண்ட ஒரு தனி யூசலிக்கு ''விநாடி யூசலி'' யென்று பெயர்.

ஆகவே, ஒரு விநாடி யூசலியில், $2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2$.

$$\therefore \sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{1}{\pi}$$

அல்லது, $l = \frac{g}{\pi^2}$

அ — ரா — வி முறையில் $g = 32.2$ அடி/வி², $\pi = \frac{22}{7}$ என்று கொள்வோமானால், $l = \frac{32.2 \times}{22 \times 22} 7 \times 7 = 39.12$ அடி.

செ. கி — வி முறையில், $g = 981$ செ.மீ./வி², என்று கொள்வோமானால், $l = 99.3$ செ.மீ. ஆகும்.

ஒரு விநாடி யூசலி ஒரு நாளில் 43,200 அலைவுகளுடன் ஊசலாடும். ஒரு விநாடி யீசலி ஒரு நாளில் சில விநாடிகள் அதிகமாகப் பெறுகிறதென்றோ அல்லது இழப்பதாகவோ கூறப் படுவதுண்டு. இதன் பொருள் என்ன? ஒரு விநாடி யூசலி ஒருநாளில் n விநாடிகள் அதிகமாகப் பெறுகிறதென்று கூறப் படின், அது ஒருநாளில் $(43200 + \frac{n}{2}$ அலைவுகளுடன் ஊச லாடுகிறதென்று பொருள் கொள்ள வேண்டும். எனவே, அவ் வூசலியின் அலைவு நேரம் $\left(\frac{86,400}{43,200 + \frac{m}{2}}\right)$ விநாடிகளாகும்.

இதுபோல், ஒரு விநாடி யூசலி ஒருநாளில் n விநாடிகள் இழப்ப தாகக் கூறப்படின், அது ஒரு நாளில் $\left(43,200 - \frac{n}{2}\right)$ அலைவு களுடன் ஊசலாடுகிற தென்றும், அதன் அலைவு நேரம் $\left(\frac{86,400}{43,200 - \frac{n}{2}}\right)$ விநாடிகள் என்றும் பொருள் கொள்ள வேண்டும்.

அலைவு எண்ணின் அதிகரிப்பும், இழப்பும் (Gain or loss in number of oscillations)

தனியூசலியின் அலைவு நேரம் $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ என்று கண்டோம். இச்சூத்திரத்திலிருந்து தனியூசலியின் அலைவு நேரம் ஊசலியின் நீளத்தையும், ஈர்ப்பு முடுக்கம் g-ஐயும் சார்ந்துள்ளதென்று காணலாம்.

t கால இடைவெளியில் ஒரு தனியூசலியினுல் செய்து முடிக்கப்பெற்ற அலைவுகளின் எண்ணிக்கை n என்று கொள்வோம். T என்பது அதன் அலைவு நேரமெனில்,

$$nT = t$$

ஆகும். இருபுறமும் மடக்கையெடுத்து, வகையீடு செய்யவும்.

மடக்கையெடுப்பின், $\log n + \log T = \log t.$

வகையீடுகாணின், $\frac{\delta n}{n} + \frac{\delta T}{T} = O$ (t என்பது குறிப்பிட்ட காலமாதலின் மாறிலி)

மேலும், $$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

மடக்கையெடுக்கவும் : $\log T = \log 2\pi + \frac{1}{2}\log l - \frac{1}{2}\log g$

வகையீடு செய்யவும் : $\frac{\delta T}{n} = \frac{\delta l}{2l} - \frac{\delta g}{2g}$

ஆனல் $\frac{\delta T}{T} = -\frac{\delta n}{n}$ ஆதலின்,

$$-\frac{\delta n}{n} = \frac{\delta l}{2l} - \frac{\delta g}{2g}$$

அல்லது, $$\frac{\delta n}{n} = \frac{\delta g}{2n} - \frac{\delta l}{2l}$$

வகை (i) g மாருமல் l மட்டும் மாறுமெனில், $\delta g = O.$

$$\therefore \frac{\delta n}{n} = -\frac{\delta l}{2i}$$

அல்லது, $$\delta n = -\frac{n.\,\delta l}{2l}$$

அதாவது, அலைவு எண் மாறுபாடு $= -\frac{n\,\delta l}{2l}$

l அதிகரிக்கப்படும்போது n குறையுமென்பதை எதிரடையாளம் காட்டுகிறது. அதாவது, ஊசலியின் நீளம் δl அளவு அதிகமானால், ஊசலியானது $\frac{n\,\delta l}{2g}$ அலைவுகளை அதிகமாகப் பெறுமென்று பொருள்.

வகை (ii) l மாறாமல் g மட்டும் மாறுமெனில், $\delta l = 0$.

$$\therefore \quad \frac{\delta n}{n} = \frac{\delta g}{2g}$$

அல்லது,
$$\delta n = \frac{n.\,\delta g}{2g}$$

ஆகவே, g அதிகமாயின், ஊசலியின் அலைவு எண் அதிகமாகுமென்றும்,, g குறையுமாயின், அலைவு எண் குறையுமென்றும் காண்க.

வகை (iii) ஊசலியின் இருப்பிட மாற்றத்திற்கேற்ப gயில் ஏற்படும் மாற்றத்தின் விளைவு :

(அ) பூமியின் மேற்பரப்பிற்கு வெளியிலுள்ள ஒரு பொருளின் மீது செயல்படும் பூமியின் ஈர்ப்புச் சக்தியானது பூமியின் மையத்திலிருந்து அப்பொருளின் தூரத்தின் வர்க்கத்துடன் எதிர்மாறு விகிதத்திலிருக்கும் என்பது நாமறிந்ததே. ஒரு தனி ஊசலியானது h உயரமுள்ள ஒரு மலையுச்சிக்குக் கொண்டு செல்லப்படுவதாகக் கொள்க. பூமியின் மேற்பரப்பில் ஈர்ப்பு முடுக்கம் g எனில், மலையுச்சியில் ஈர்ப்பு முடுக்கம் g-ஐவிடக் குறைவாகயிருக்கும். ஏனெனில், பூமியின் ஆரை r எனில், பூமியின் மையத்திலிருந்து மலையுச்சியின் தூரம் $(r + h)$ ஆகும்; இது பூமியின் மையத்திலிருந்து பூமியின் மேற்பரப்பின் தூரமாகிய r-ஐவிட அதிகமாதலால் மலையுச்சியில் g-யின் மதிப்பு குறைவாகயிருக்கும்.

மலையுச்சியில் ஈர்ப்பு முடுக்கம் $(g - \delta g)$ என்று கொள்க.

இப்பொழுது, $g \propto \frac{1}{r^2} = \frac{k}{r^2}$ என்க.

$$\therefore \quad (g - \delta g) \propto \frac{1}{(r + h)^2} = \frac{k}{(r + h)^2}$$

$$\therefore \quad \frac{g - \delta g}{g} = \frac{r^2}{(r + h)^2}$$

அதாவது,
$$1-\frac{\delta g}{g}=\frac{1}{\left(1+\frac{h}{r}\right)^2}$$
$$=\left(1+\frac{h}{r}\right)^{-2}$$
$$=1-\frac{2h}{r}$$ (ஈருறுப்புப் பரவலின் தேற்றப்படி $\left(\frac{h}{r}\right)^2$-ம், உயர்படிகளும் புறக்கணிக்கப்பட்டால்)

$$\therefore\ \frac{\delta g}{g}=\frac{2h}{r}$$

அல்லது,
$$\delta g=\frac{2\,gh}{r}$$

ஆனால், $\delta n=\frac{n.\ \delta g}{2g}$ ஆகையாலும், g குறைந்திருப்பதாலும், மலையுச்சியில் அலைவு எண் இழப்பு $\delta n=\frac{n}{2g}\cdot\ \frac{2\,gh}{r}=\frac{nh}{r}$ ஆகும்.

(ஆ) ஒரு தனியூசலி d ஆழமுள்ள ஒரு சுரங்கத்திற்குள் எடுத்துச் செல்லப்படுவதாகக் கொள்வோம். இப்பொழுது, பூமியின் மையத்திலிருந்து ஊசலியின் தூரம் மேற்பரப்பின் தூர மாகிய rஐ விடக் குறைவாக யிருக்குமாதலின் ஈர்ப்பு முடுக்கம் gயின் மதிப்பு குறைவாகயிருக்கும். ஏனெனில், பூமிக்குள்ளே யிருக்கும் ஒரு பொருளின்மீது செயல்படும் ஈர்ப்புச் சக்தியானது பூமியின் மையத்திலிருந்து அதன் தூரத்திற்கேற்ப மாறுபடும்.

எனவே, பூமிக்குள் மேற்பரப்பையொட்டி ஈர்ப்பு முடுக்கம் g என்றும், d ஆழத்தில் ஈர்ப்பு முடுக்கம் $(g-\delta g)$ என்றும் கொள்வோம்.

$g \propto r$ ஆகையால், $g=\mu r$ என்க. (μ ஒரு மாறிலி)

$$\therefore\ (g-\delta g)\propto(r-d)=\mu\,(r-d)$$

$$\therefore\ \frac{g-\delta g}{g}=\frac{r-d}{r}$$

அல்லது,
$$1-\frac{\delta g}{g}=1-\frac{d}{r}$$

$$\therefore \quad \frac{\delta g}{g} = \frac{d}{r}$$

$$\therefore \quad \delta g = \frac{gd}{r}$$

$\therefore$ அலைவு எண் இழப்பு $\delta n = \dfrac{n.\,\delta g}{2g}$

$$= \frac{n}{2g} \cdot \frac{gd}{r}$$

$$= \frac{nd}{2r} \text{ ஆகும்.}$$

வகை (iv) g, l ஆகிய இரண்டும் மாறுபடல்

t கால இடைவெளியில் ஒரு தனியூசலியின் அதிர்வுகள் (அரையலைவுகள்) n என்றும் ஒரு அதிர்வு நேரம் T என்றும் கொள்க.

$$\therefore \quad nT = t.$$

ஆனால் ஒரு அலைவு நேரம் $= 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ ஆகையால்,

ஒரு அதிர்வு நேரம் $= \pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$

$$\therefore \quad \frac{t}{n} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

அல்லது, $\quad n = \dfrac{t}{\pi}\,\dfrac{g}{l}$

இப்பொழுது, g-யானது g_1 என்றும், l ஆனது l_1 என்றும் மாறுவதாகவும், அம்மாற்றங்களுக்கேற்ப அதிர்வு எண் n ஆனது n_1 ஆக மாறுகிறதென்றும் கொள்க:

$$\therefore \quad n_1 = \frac{t}{\pi}\sqrt{\frac{g_1}{t_1}}$$

$$\therefore \quad \frac{n}{n_1} = \frac{t}{\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} \times \frac{\pi}{t}\sqrt{\frac{l_1}{g_1}}$$

$$= \sqrt{\frac{g}{l}}\;\sqrt{\frac{l_1}{g_1}}$$

அதாவது, $\quad n = n_1\sqrt{\dfrac{gl_1}{g_1 l}}$

இச்சமன்பாட்டிலிருந்து மாறுபட்ட சூழ்நிலைகளில் ஊசலியின் சரியான அதிர்வு எண்களைக் கணக்கிடலாம்.

மாதிரி 161. ஒரு கடிகாரத்தின் ஊசலியின் நீளத்தை $900 : 901$ என்று அதிகமாக்குவதால் ஒரு நாளில் கடிகாரம் எத்தனை விநாடிகள் இழக்குமென்று காண்க.

தீர்வு: இங்கு g மாறவில்லை.

n = ஒரு நாளில் விநாடிகள் $= 24 \times 60 \times 60 = 86,400 = t$ என்க.

இப்பொழுது, விநாடியூசற் கடிகாரத்தில்,

$$n = \frac{t}{\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$$

δn என்பது அலைவு எண் மாறுபாடு எனில்,

$$n + \delta n = \frac{t}{\pi}\sqrt{\frac{g}{l_1}}$$

$$\therefore \frac{n+\delta n}{n} = \sqrt{\frac{l}{l_1}}$$

இங்கு $\frac{l}{l_1} = \frac{900}{901}$ ஆதலின்,

$$\frac{n + \delta n}{n} = \sqrt{\frac{900}{901}}$$

அதாவது, $$1 + \frac{\delta n}{n} = \left(\frac{900}{901}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{901}{900}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{900}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{900}\right) \text{ (தோராயமாக)}$$

$$\therefore \frac{\delta n}{n} = -\frac{1}{2 \times 900}$$

$$\therefore \delta n = -\frac{n}{2 \times 900}$$

$$= -\frac{24 \times 60 \times 60}{2 \times 900}$$

$$= -48$$

கடிகார ஊசலியின் அதிர்வு எண் இழப்பு = 48 ஆகும். ஆனுல் வினுடி ஊசற் கடிகாரத்தில் ஒரு அதிர்வு நேரம் ஒரு வினுடி ஆதலின், கடிகாரம் ஒரு நாளில் 48 வினுடிகள் இழக்கிறது.

மாதிரி 162. ஈர்ப்பு முடுக்கம் 32 அடி/(வினுடி)^2 ஆகவுள்ள ஓர் இடத்தில் ஒரு வினுடியூசலி ஒரு நாளில் 16 வினுடிகளை இழக்கிறது. இவ்வூசலியைத் துல்லியமாக மாற்ற (i) அதன் நீளத்தில், (ii) ஈர்ப்பு முடுக்கத்தில் என்ன மாற்றம் செய்ய வேண்டும்.

தீர்வு : துல்லியமான வினுடியூசலின் நீளம் l என்க.

ஆனுல் வினுடி யூசலியின் நீளம் $\frac{g}{\pi^2}$ என்று அறிவோம்.

$$\therefore \quad l = \frac{g}{\pi^2}$$

துல்லியமற்ற ஊசலியின் நீளம் $l + dl$ எனில்,

$$\frac{\delta n}{n} = -\frac{\delta l}{2l}$$

என்று கண்டோம்.

இங்கு, n = வினுடி யூசலியின் ஒரு நாள் அலைவுகள் = 43,200 ஊசலி ஒரு நாளில் 16 வினுடிகளை இழப்பதால், $dn = 8$.

$$\therefore \quad \frac{-8}{43,200} = -\frac{\delta l}{2\,\frac{g}{\pi 2}}$$

$$\therefore \quad dl = \frac{16\,g}{\pi^2 \times 43200} \text{ அடி}$$

$$= 0{\cdot}014 \text{ அங்.}$$

அதாவது, துல்லியமற்ற ஊசலியின் நீளம் 0·014 அங். அதிகமாகவுள்ளது. ஆகவே, ஊசலியைத் துல்லியமாக மாற்ற 0·014 அங். நீளம் குறைக்க வேண்டும்.

(ii) அலைவுகள் துல்லியமாகயிருக்கும் இடத்தில் ஈர்ப்பு முடுக்கம் g என்றும், கொடுக்கப்பட்டுள்ள இடத்தில் ஈர்ப்பு முடுக்கம் $g + dg$ என்றும் கொள்க.

$$\therefore \quad g + \delta g = 32$$

அல்லது, $\delta g = 32 - g$.

இப்பொழுது, $\frac{\delta n}{n} = \frac{\delta g}{2g}$ என்ற சமன்பாட்டில் பிரதியிடுக.

$$\frac{-8}{43{,}200} = \frac{32-g}{2g}$$

$$-16\,g = (32-g)\,43{,}200$$

$$(43{,}200-16)\,g = 32 \times 43{,}200$$

$$43184\,g = 32 \times 43{,}200$$

$$g = \frac{32 \times 43\,200}{43184}$$

$$= 32.0118 \text{ அடி/வி}^2.$$

ஆகவே, g-யின் மதிப்பு 0.118 அடி/வி² அதிகமாக்க வேண்டும்.

மாதிரி 163. ஒரு மலையின் அடிவாரத்தில் விநாடி அதிர்வுகளுடன் ஊசலாடுகின்ற ஓர் ஊசலி மலையின் உச்சிக்குக் கொண்டு போகப்பட்டபோது ஒரு நாளில் 9 விநாடிகளை இழக்கிறது. பூமியின் எடை 4000 மைல்களென்று கொண்டு மலையின் ஈர்ப்புச் சக்தியைப் புறக்கணித்துவிட்டு மலையின் உயரத்தைக் காண்க.

தீர்வு : n = ஒரு நாளின் விநாடிகள் = 25 × 60 × 60 = 86,400

r = பூமியின் ஆரை = 4000 மைல்கள் = 4000 × 5280 அடிகள்

δn = இழக்கும் விநாடிகள் = − 9

h = மலையின் உயரம் (அடிகளில்)

இம்மதிப்புக்களை $\delta n = -\frac{nh}{r}$ என்ற சூத்திரத்தில் பிரதியிடவும்.

$$-9 = -\frac{86{,}400 \times h}{4000 \times 5280}$$

$$\therefore\ h = \frac{9 \times 10 \times 5280}{216}$$

$$= 2200 \text{ அடி}.$$

மாதிரி 164. ஓர் ஊசலி 2640 அடி உயர மலையுச்சிக்குக் கொண்டு செல்லப்படுகிறது. அது ஒரு நாளில் எத்தனை விநாடிகளை இழக்கும்? மலையுச்சியில் அது விநாடி அதிர்வுகளுடன்

இயங்க வேண்டுமெனில் அதன் நீளம் எவ்வளவு குறைக்கப்பட வேண்டும் ?

தீர்வு: $\delta n = -\frac{n}{r}h$ என்ற சூத்திரத்தைக் கருதுக.

n = ஒரு நாளின் விநாடிகள் $= 24 \times 60 \times 60$

h = மலையின் உயரம் $= 2640$ அடி.

r = பூமியின் ஆரை $= 4000 \times 5280$ அடி.

$$\therefore \delta n = -\frac{24 \times 60 \times 60 \times 2640}{4000 \times 5280}$$

$$= -10.8$$

ஊசலி ஒரு நாளில் 10.8 விநாடிகள் இழக்கும்.

இப்பொழுது, $\frac{\delta n}{n} = \frac{\delta g}{2g} - \frac{\delta l}{2l}$ என்னும் பொதுச் சமன்பாட்டைக் கருதுக.

ஊசலி விநாடி அதிர்வுடன் இயங்க வேண்டுமாயின் அது விநாடிகளை இழக்கவும் கூடாது ; அதிகமாகப் பெறவும் கூடாது.

$$\therefore \delta n = 0.$$

$$\therefore \frac{\delta l}{2l} = \frac{\delta g}{2g}$$

அல்லது, $\delta l = \frac{l}{g}\delta g.$

ஆனால், $g = \frac{\mu}{r^2}$ (பூமியின் மேற்பரப்பிற்குமேல் ; μ ஒரு மாறிலி)

$$\therefore \log g = \log \mu - 2 \log r$$

தொகையிடு காணின், $\frac{\delta g}{g} = 0 - \frac{2\,\delta r}{r}$

இங்கு $\delta r = h$

$$\therefore \frac{\delta g}{g} = -\frac{2h}{r}$$

$$\therefore \delta l = l\,\frac{\delta g}{g}$$

$$= l\left(-\frac{2h}{r}\right)$$

$$= -\frac{2 \times 2640 \times l}{4000 \times 5280}$$

$$= -\frac{1}{4000}\, l$$

ஆகவே, ஊசலியின் நீளம் இப்போதிருப்பதைப்போல் $\frac{1}{4000}$ மடங்கு குறைக்க வேண்டும்.

மாதிரி 165. ஒரு விளுடி யூசலி 1 அடி/(விளுடி)^2 முடுக்கத்துடன் மேல்நோக்கி எடுத்துச் செல்லப்படுகிறது. அது ஒரு மணி நேரத்தில் எத்தனை விளுடிகள் அதிகமாகப் பெறும்?

தீர்வு : $g = 32$ அடி/வி^{2} என்று கொள்க.

$\delta g = 1$ அடி/வி^{2}. (அதிகம்)

$n =$ ஒரு மணி நேரம் $= 60 \times 60$ விளுடிகள்.

$\delta n =$ ஒரு மணி நேரத்தில் அதிகமாகப் பெறும் விளுடிகள்.

இம்மதிப்புக்களை $\frac{\delta n}{n} = \frac{\delta g}{g}$ என்னும் சூத்திரத்தில் பிரதியிடுக.

$$\beta n = \frac{n \times \delta g}{2 \times g}$$

$$= \frac{60 \times 60 \times 1}{2 \times 32}$$

$$= 56.27$$

ஆகவே, ஊசலியானது ஒரு மணி நேரத்தில் 56 விளுடிகட்கு அதிகமாகப் பெறுகிறது.

மாதிரி 166. ஒரு விளுடி ஊசலி ஒரு குறிப்பிட்ட நாளில் $\propto$ அளவு அதிக நீளமாயிருந்தது. மறுநாள் நீளத்தைச் சரி செய்யும்போது $\propto$ அளவு நீளம் குறைந்து விட்டது. ஊசலியின் சரியான நீளம் l எனில் இரு நாட்களிலும் சேர்த்து ஊசலி பெற்ற அதிகப்படியான நிமிடங்கள் $\frac{\propto^2}{l^2}$ (தோராயமாக) என்று நிறுவுக.

தீர்வு : ஊசலியின் சரியான நீளம் l ஆகையால்,

$$1 = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad \ldots \qquad (1)$$

முதல்நாள் நீளம் $l + \alpha$ ஆகையால்,

ஒரு அதிர்வு நேரம் $t_1 = \pi\sqrt{\dfrac{l+\alpha}{g}}$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{l+\alpha}$$

ஆனால், (1)இலிருந்து, $\dfrac{\pi}{\sqrt{g}} = \dfrac{1}{\sqrt{l}}$ ஆகையால்,

$$t_1 = \frac{1}{\sqrt{l}}\sqrt{l+\alpha} = \sqrt{\frac{l+\alpha}{l}} \qquad \ldots \qquad (2)$$

அன்றைய தினம் ஊசலி செய்து முடித்த மொத்த அதிர்வுகள் n_1 எனில்,

$$n_1 t_1 = 24 \times 60 \times 60$$

$$\therefore \; n_1 = \frac{24 \times 60 \times 60}{t_1}$$

$$= 24 \times 60 \times 60 \times \sqrt{\frac{l+\alpha}{l}}$$

$$= 24 \times 3600 \times \left(\frac{l}{l+\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 24 \times 3600 \times \left(\frac{l+\alpha}{l}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 24 \times 3600 \times \left(1 + \frac{\alpha}{l}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 24 \times 3600 \left[1 - \frac{1}{2}\frac{\alpha}{l} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{\alpha^2}{l^2} - \ldots\right]$$

$$= 24 \times 3600 - 24 \times 3600\left[\frac{1}{2}\frac{\alpha}{l} - \frac{3}{8}\frac{\alpha^2}{l^2}\right]$$

(தோராயமாக)

$$\therefore \quad n_1 - 24 \times 3600 = -24 \times 3600 \left[\frac{1}{2}\frac{\alpha}{l} - \frac{3}{8}\frac{\alpha^2}{l^2} \right]$$

(தோராயமாக) ... (3)

ஆகவே, இழந்த அதிர்வுகளின் எண்ணிக்கை = 24 × 3600 $\left(\frac{1}{2}\frac{\alpha}{l} - \frac{3}{8}\frac{\alpha^2}{l} \right)$ மறுநாள் நீளம் ($l-\alpha$)ஆகக் குறைந்து விடுவதால், ஊசல் அதிகப்படியாகப் பெற்ற அதிர்வுகளின் எண்ணிக்கையை α-க்குப் பதிலாக $-\alpha$ என்று பிரதியிட்டுப் பெறலாம்.

மறுநாள் மொத்த அதிர்வுகளின் எண்ணிக்கை n_2 எனில்,

$$n_2 - 24 \times 3600 = -24 \times 3600 \left[-\frac{1}{2}\frac{\alpha}{l} - \frac{3}{8}\frac{\alpha^2}{l^2} \right]$$

∴ மறுநாள் அதிகப்படியாகப் பெற்ற அதிர்வுகள்

$$= -24 \times 3600 \left[-\frac{1}{2}\frac{\alpha}{l} - \frac{3}{8}\frac{\alpha^2}{l^2} \right]$$

$$= 24 \times 3600 \left(\frac{1}{2}\frac{\alpha}{l} + \frac{3}{8}\frac{\alpha^2}{l^2} \right) \quad \ldots \quad (4)$$

∴ இரு நாட்களிலும் சேர்த்து மொத்தம் அதிகப்படியான அதிர்கள்

$$= 24 \times 3600 \left(\frac{1}{2}\frac{\alpha}{l} + \frac{3}{8}\frac{\alpha^2}{l^2} \right) - 24 \times 3600 \left(\frac{1}{2}\frac{\alpha}{l} - \frac{3}{8}\frac{\alpha^2}{l^2} \right)$$

$= 24 \times 3600 \times \frac{3}{4}\frac{\alpha^2}{l^2}$ விநாடிகள்

$= 24 \times 60 \times \frac{3}{4}\frac{\alpha^2}{l^2}$ நிமிடங்கள்

$= 1080 \frac{\alpha^2}{l^2}$ நிமிடங்கள்.

பயிற்சி 16

1. ஒரு வினடி யூசலிக் கடிகாரம் ஓர் இடத்தில் சரியான நேரம் காட்டுகிறது. ஈர்ப்பு முடுக்கம் $0 \cdot 01$ சதவீதம் குறைவாயுள்ள ஒ, இடத்தில் ஒரு நாளில் எத்தனை விநடிகளை அது இழக்கும்?

2. விநடி யூசலியுடன் கூடிய ஒரு கடிகாரம் ஈர்ப்பு முடுக்கம் 32 அடி/வி² ஆகவுள்ள ஓர் இடத்தில் நாளொன்றுக்கு 20 விநடிகள் வீதம் இழக்கிறது. அதைத் துல்லியமாக்க (*i*) அதன் நீளத்தில், (*ii*) ஈர்ப்பு முடுக்கத்தில் என்ன மாறுதல் செய்ய வேண்டும்?

3. விநடி யூசலியுடன் கூடிய ஒரு கடிகாரம் ஒருநாளில் 2 நிமிடங்கள் அதிகமாகப் பெறுகிறது. அது சரியாக ஓட வேண்டுமெனில் அதன் நீளத்தில் என்ன மாறுதல் செய்யப்பட வேண்டும்?

4. பூமியின் மேற்பரப்பில் விநடியூசலியாகவுள்ள ஒரு ஊசலி ஒரு குன்றின் உச்சிக்குக் கொண்டு செல்லப்பட்ட போது 24 மணி நேரத்தில் 10 விநடிகளை இழக்கிறது. பூமியின் ஆரை 3960 மைல்கள் எனக் கொண்டு குன்றின் உயரம் காண்க.

5. ஒரு விநடியூசலி அரை மைல் ஆழச் சுரங்கத்தின் அடியில் 12 விநடிகளை ஒரு நாளில் இழக்கிறது. அரை மைல் உயரமான மலையுச்சியில் அது ஒரு நாளில் எத்தனை விநடிகளை இழக்கும்? (பூமியின் ஆரை 4,000 மைல்களென்று கொள்க).

6. ஒரு விநடி யூசலி $\cdot 5$ அடி/(விநடி.)² சீரான முடுக்கத்துடன் மேலே ஏறிக் கொண்டிருக்கும் ஒரு பலூனில் எடுத்துச் செல்லப்பட்டால் அது ஒரு மணி நேரத்தில் எத்தனை விநடிகள் அதிகப்படியாகப் பெறும்?

7. முறையே l, l_1 நீளங்களுடைய இரு ஊசலிகள் ஒரே கணத்தில் ஆடத் தொடங்குகின்றன. x அலைவுகளுக்குப்பின் மறுபடியும் அவை இணையதிர்வுகளுடன் ஆடுகின்றன. $l > l_1$ எனில் l_1 ஐக் காண்க.

8. பூமியின் ஆரை 3958 மைல் என்று கொள்ளப்பட்டால், ஒரு விநடி யூசலி எவ்வளவு உயரத்தில் மணிக்கு 3588 அதிர்வுகளை அடிக்கும்?

9. ஒரு விஞடி யூசலி ஒரு சுரங்கத்தின் அடியில் 10 விஞடிகளை இழந்தால் சுரக்கத்தின் ஆழத்தைக் காண்க. சுரங்கத்தின் பாதி ஆழத்திலிருக்கும் போது அது எத்தனை விஞடிகளை இழக்கும்?

10. மாரு முடுத்தத்துடன் மேல் நோக்கி ஏறிக் கொண்டிருக்கும் ஒரு பலூன் 900 அடி உயரத்தை ஒரு நிமிடத்தில் அடைகிறது. அப் பலூனில் எடுத்துச் செல்லப்படும் விஞடி யூசலியுடன் கூடிய ஒரு கடிகாரம் மணிக்கு 28 விஞடிகள் வீதம் அதிகமாகப் பெறு மென்று காட்டுக.

11. ஒரு அலகு முடுக்கத்துடன் கீழ்முகமாக இறங்கிக் கொண்டிருக்கும் ஒரு சுமை கூண்டில் எடுத்துச் செல்லப்படும் விஞடி யூசலியுடன் கூடிய ஒரு கடிகாரம் மணிக்கு 56 விஞடிகள் வீதம் இழக்குமென்று காட்டுக.

12. l நீளமுள்ள ஒரு ஊசலி 24 மணி நேரத்தில் m அலைவுகளை ஆடி முடிக்கிறது. அதன் நீளத்தைச் சிறிதளவு மாற்றிய பின் அது 24 மணி நேரத்தில் $(m+n)$ அலைவுகளை ஆடி முடிக் முடிக்கிறது. நீளம் $\frac{2nl}{m}$ அளவு குறைக்கப்பட்டிருக்கு மென்று காட்டு. (சென்னை பி. எஸ்ஸி. 1061 செப்.)

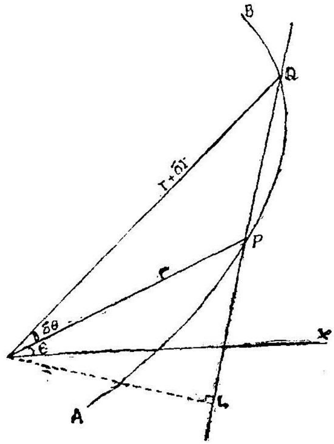
13. மணிக்கு n விஞடிகள் வீதம் வேகமாக ஓடுகின்ற விஞடி யூசலியின் சரிக்கட்டப்படாத நீளம் l_1; மணிக்கு n விஞடிகள் வீதம் மெதுவாக ஓடுகின்ற விஞடி யூசலியின் சரிக்கட்டம்படாத நீளம் l_2. விஞடி யூசலியின் சரியான நீளம் $\frac{4l_1 l_2}{l_1+l_2+2\sqrt{l_1 l_2}}$ என்றும், இந்த நீளம் $l_1\, l_2$ ஆகியவற்றின் இசைச் சராசரி யென்றும் காட்டுக.

9. மைய விசைகள்

(Central Forces)

பரப்பு வேகம் (Areal Velocity)

ஒரு தளத்திலுள்ள ஒரு வளைவரையின் வழியே ஒரு துகள் நகரும்போது அத்தளத்திலுள்ள ஒரு நிலையான புள்ளியுடன் அத்துகளினைச் சேர்க்கும் ஆரைத் திசையியினல் வரையப்படுகின்ற பரப்பளவின் மாறுபாட்டு வீதம் அத்துகளின் பரப்பளவு வேகம் அல்லது பரப்பு வேகம் (Areal Velocity) எனப்படும்.



படம் 115

AB என்னும் வளைவரையின் வழியே நகர்ந்துகொண்டிருக்கும் ஒரு துகள் t நேரத்தின் போது P என்னும் நிலையில் இருப்பதாகக் கொள்க. வளைவரையின் தளத்திலுள்ள O என்னும் நிலையான புள்ளியை முனைவுப் புள்ளியாகவும், O வழியே செல்லும் OX என்னும் நிலையான நேர் கோட்டைத் தொடக்கக் கோடாகவும் கொண்டு Pயின் கோணதூரக் கூறுகளை (r, θ) என்க. அதாவது, $(OP = r$; $\angle POX = \theta$. அதையடுத்து $t + t$ நேரத்தில் துகள் Q என்னும் நிலையிலிருப்பதாகவும், Q-வின் கோணதூரக் கூறுகள் $(r + \delta r, \theta + \delta\theta)$ என்றும் கொள்க.

$$\therefore OQ = r + \delta r, \; Q\hat{O}X = \theta + \delta\theta.$$

$$\therefore Q\hat{O}P = \delta\theta.$$

δt நேரத்தில் ஆரைத் திசையினால் வரையப்பட்டப் பரப்பு = வளைகோணப் பகுதி POQ

$$\therefore \quad \delta t \text{ நேரத்தில் பரப்புமாறு பாட்டுவீதம்} = \frac{\text{பரப்பு } POO}{\delta t}$$

$$\therefore \quad t \text{ நேரத்தில் பரப்பு வேகம்} = \underset{\delta t \to O}{\text{எல்லை}} \left(\frac{\text{பரப்பு } POQ}{\delta t} \right)$$

ஆனால் பரப்பு $POQ = \triangle POQ$ (தோராயமாக)

$$= \tfrac{1}{2} \cdot OP \cdot OQ \cdot \sin P\hat{O}Q$$

$$= \tfrac{1}{2} r\,(r + \delta r) \cdot \sin \delta\theta$$

$$\therefore \quad \text{பரப்பு வேகம்} = \underset{\delta t \to O}{\text{எல்லை}} \left(\frac{\tfrac{1}{2} r \cdot (r + \delta r) \cdot \sin \delta\theta}{\delta t} \right)$$

$$= \underset{\delta t \to O}{\text{எல்லை}} \quad \tfrac{1}{2} r\,(r + \delta r) \cdot \frac{\sin \delta\theta}{\delta\theta} \cdot \frac{\delta\theta}{\delta t}$$

$$= \tfrac{1}{2} r^2 \, \frac{d\theta}{dt}$$

பரப்பு வேகத்திற்கு மற்றுமொரு மதிப்பு :

O-விலிருந்து PQ க்குச் செங்குத்தாக OL வரைக. P யில் துகளின் வேகம் v என்க. வளைவரையின் மேலுள்ள A என்னும் நிலையான புள்ளியிலிருந்து வளைவரை வழியே P, Q, ஆகிய வற்றின் தூரங்கள் முறையே s, $s + \delta s$ என்க. $\therefore$ வில் $PQ = \delta s$.

P-யில் திசைவேகம் தொடுகோட்டின் வழியே செயல்படும்.

மேலும், $\dfrac{ds}{dt} = v$ ஆகும்.

$$P\text{-யில் பரப்பு வேகம்} = \underset{\delta t \to O}{\text{எல்லை}} \left(\frac{\text{பரப்பு } POQ}{\delta t} \right)$$

ஆனால் பரப்பு $POQ = \triangle POQ$ (தோராயமாக)

$$= \tfrac{1}{2} PQ \cdot OL$$

$\delta t \to O$ ஆகும்போது, Q-ஆனது P-யுடன் பொருந்துமாகையால் நாண் PQ ஆனது P-யிலுள்ள தொடுகோடாக மாறிவிடும். எனவே, PQ-விற்கு O-விலிருந்து வரையப்பட்ட செங்குத்து OL ஆனது P-யிலுள்ள தொடுகோட்டிற்கு O-விலிருந்து வரையப் படும் செங்குத்தாக மாறிவிடும். இச் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம் P என்க.

மேலும், நாண் PQ = வில் PQ (தோராயமாக) $= \delta s$.

$\therefore$ P-யில் பரப்பு வேகம் $\underset{\delta t \to 0}{\text{எல்லை}} \left(\dfrac{\frac{1}{2} PQ.OL}{\delta t} \right)$

$$= \underset{\delta t \to 0}{\text{எல்லை}} \left(\frac{\frac{1}{2}\, \delta s.OL}{\delta t} \right)$$

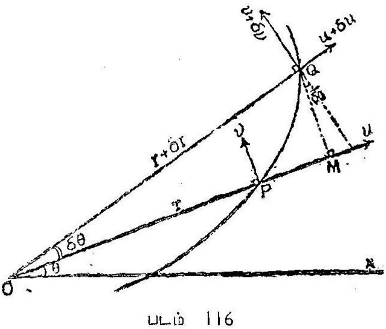
$$= \frac{1}{2} \frac{ds}{dt} \cdot p$$

$$= \frac{1}{2} vP.$$

ஆகவே, பரப்பு வேகம் $= \frac{1}{2} r^2 \dfrac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} vP$ என்று காண்கிறோம்.

திசைவேகம், முடுக்கம் ஆகியவற்றின் ஆரை, குறுக்குக் கூறுகள். (Radial and Transverse components of velocity and acceleration)

ஒரு துகள் ஒரு தளத்தின் மேலுள்ள ஒரு வளைவரையின் மேல் நகருகிறது. t நேரத்தின்போது அதன் ஆரைவேகம், குறுக்குவேகம், ஆரை முடுக்கம், குறுக்கு முடுக்கம் ஆகியவற்றைக் கோண தூரக் கூறுகளில் காணல் :



படம் 116

தளத்திலுள்ள O என்னும் நிலையான புள்ளியை முனைவுப் புள்ளியாகவும், O வழியே செல்லும் OX என்னும் நிலையான நேர் கோட்டைத் தொடக்கக் கோடாகவும் எடுத்துக் கொள்க.

P, Q என்பன முறையே, t, $t+\delta t$ என்னும் இரு அடுத்தடுத்த கணங்களின்போது துகளின் நிலைகளெனக் கொள்க. இந்நிலைகளின் கோணதூரக் கூறுகள் முறையே (r, θ), $(r+\delta r, \theta+\delta\theta)$ என்று கொள்க. எனவே, வளைவரை வழியே துகளின் இடப்பெயர்ச்சி வில் PQ ஆகும். Q-விலிருந்து OP-க்கு QM என்னும் செங்குத்துக்கோடு வரைக.

ஆரைத் திசையி OP வழியே δt நேரத்தில் இடப்பெயர்ச்தி $= PM$
ஆரைத் திசையி OP-க்குச் செங்குத்துத் திசையில் δt நேரத்திய குறுக்கு இடப்பெயர்ச்சி $= QM$

t நேரத்தில் OP திசையிலும், OP-க்குச் செங்குத்துத் திசையிலும் துகளின் திசைவேகக் கூறுகள் முறையே u, v என்றும், $t + \delta t$ நேரத்தில் OQ திசையிலும், OQ-க்குச் செங்குத்துத் திசையிலும் துகளின் திசைவேகக் கூறுகள் முறையே $u + \delta u$, $v + \delta v$ என்றும் கொள்க.

δt நேரத்தில் OP திசையில் இடப் பெயர்ச்சி $= PM$

$\therefore$ OP திசையில் இடப்பெயர்ச்சி வீதம் $= \dfrac{PM}{\delta t}$

$\therefore$ $u = OP$ திசையில் திசைவேகம்

$$= \underset{\delta t \to O}{\text{எல்லை}} \left(\frac{PM}{\delta t}\right)$$

$$= \underset{\delta t \to O}{\text{எல்லை}} \left(\frac{OM - OP}{\delta t}\right)$$

$$= \underset{\delta t \to O}{\text{எல்லை}} \left(\frac{OQ \cos \delta\theta - OP}{\delta t}\right)$$

$$= \underset{\delta t \to O}{\text{எல்லை}} \left[\frac{(r + \delta r) \cos \delta\theta - r}{\delta t}\right]$$

$$= \underset{\delta t \to O}{\text{எல்லை}} \left[\frac{(r + \delta r)\, 1 - r}{\delta t}\right]$$

(ஏனெனில், $\delta t \to O$, $\delta\theta \to O$)

$$= \underset{\delta t \to O}{\text{எல்லை}} \left[\frac{\delta r}{\delta t}\right]$$

$$= \frac{dr}{dt} = \dot{r}$$

δt நேரத்தில் OP-க்குச் செங்குத்துத் திசையில் இடப்பெயர்ச்சி $= QM$.

$\therefore$ OP-க்குச் செங்குத்துத் திசையில் இடப்பெயர்ச்சி வீதம் $= \dfrac{QM}{\delta t}$

v = OQ-க்குச் செங்குத்துத் திசையில் வேகம்

$$= \lim_{\delta t \to O} \left(\frac{QM}{\delta t}\right)$$

$$= \lim_{\delta t \to O} \left(\frac{OQ \sin \delta\theta}{\delta t}\right)$$

$$= \lim_{\delta t \to O} \left[\frac{(r + \delta r) \operatorname{Sin} \delta\theta}{\delta t}\right]$$

$$= \lim_{\delta t \to O} \left[\frac{(r + \delta r)\, \delta\theta}{\delta t}\right]$$

ஏனெனில் $\delta\theta$ சிறியதாகையால் $\operatorname{Sin} \delta\theta \to \theta$.

$$= r \frac{d\theta}{dt}$$

$$= r\,\dot{\theta}$$

ஆகவே, ஆரைவேகம் $= \dot{r}$, குறுக்குவேகம் $= r\dot{\theta}$ என்று காண்கிறோம்.

இப்பொழுது, $(t + \delta t)$ நேரத்தில் திசைவேகத்தின் OP வழிக் கூறு $= (u + \delta u) \cos \delta\theta - (v + \delta v) \sin \delta\theta$.

t நேரத்தில் திசைவேகத்தின் OP வழிக்கூறு $= u$.

$\therefore$ δt நேரத்தில் OP வழியே திசைவேக மாறுபாடு

$$= (u + \delta u) \cos \delta\theta - (v + \delta v) \sin \delta\theta - u$$

$\therefore$ OP வழியே திசைவேக மாறுபாட்டு வீதம்

$$= \frac{(u + \delta u) \cos \delta\theta - (v + \delta v) \sin \delta\theta - u}{\delta t}$$

$\therefore$ OP திசையில் t நேரத்தில் முடுக்கம்

$$= \lim_{\delta t \to O} \left[\frac{(u + \delta u) \cos \delta\theta - (v + \delta v) \sin \delta\theta - u}{\delta t}\right]$$

$$= \lim_{\delta t \to O} \left[\frac{(u + \delta d) \cdot 1 - (v + \delta v) \cdot \delta\theta - u}{\delta t}\right]$$

$$= \lim_{\delta t \to O} \left[\frac{\delta u - v\delta\theta}{\delta t}\right]$$

$$= \quad - v \frac{d\theta}{dt}$$

(On the page, the limit operator is printed as எல்லை in place of "lim".)

ஆனல் $u = \frac{dr}{dt}$, $v = r\frac{d\theta}{dt}$ ஆகையால்,

t நேரத்தில் OP திசையில் முடுக்கம்

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right) - \left(r\,\frac{d\theta}{dt}\right)\frac{d\theta}{dt}$$

$$= \frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$$= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

இதுபோல், $(t + \delta t)$ நேரத்தில் OPக்குச் செங்குத்துத் திசையில் திசைவேகக் கூறு $= (u + \delta u)\sin\delta\theta + (v + \delta v)\cos\delta\theta.$

t நேரத்தில் OPக்குச் செங்குத்துத் திசையில் திசைவேகக் கூறு $= v.$

$\therefore$ δt நேரத்தில் OPக்குச் செங்குத்துத் திசையில் திசைவேகக் மாறுபாடு $= (u + \delta u)\sin\delta\theta = (v + \delta v)\cos\delta\theta - v$

OPக்குச் செங்குத்துத் திசையில் திசைவேக மாறுபாட்டு வீதம்

$$= \frac{(u + \delta u)\sin\delta\theta + (v = \delta v)\cos\delta\theta - v}{\delta t}$$

$\therefore$ t நேரத்தில் OPக்குச் செங்குத்துத் திசையில் முடுக்கம்

$$= \underset{\delta t \to O}{\text{எல்லை}}\left[\frac{(u + \delta u)\sin\delta\theta + (v + \delta v)\cos\delta\theta - v}{\delta t}\right]$$

$$= \underset{\delta t \to O}{\text{எல்லை}}\left[\frac{(u + \delta u)\,\delta\theta + (v + \delta v)\cdot 1 - v}{\delta t}\right]$$

$$= \underset{\delta t \to O}{\text{எல்லை}}\left[u.\frac{\delta\theta}{\delta t} + \frac{\delta v}{\delta t}\right]$$

$$= u.\frac{d\theta}{dt} + \frac{\delta v}{dt}$$

$$= \frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt} + \frac{d}{dt}\left(r\,\frac{d\theta}{dt}\right)$$

$$= 2\,\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt} + r.\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$= \frac{1}{r}\left[2r \cdot \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} + r^2 \frac{d^2\theta}{dt^2}\right]$$

$$= \frac{1}{r}\left[\frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{d}{dt}(r^2) + r^2 \frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dt}\left(r^2 \frac{d\theta}{dt}\right)$$

$$= \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\theta})$$

ஆகவே, ஆரை முடுக்கம் $= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$

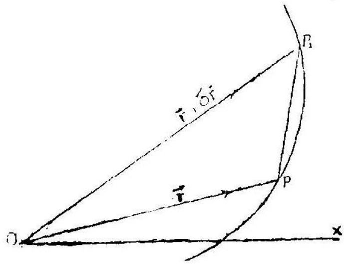
குறுக்கு முடுக்கம் $= \dfrac{1}{r} \dfrac{d}{dt}(r^2 \dot{\theta})$

திசையிமுறையில் ஆரை, குறுக்கு முடுக்கம் காணல்

t நேரத்தில் துகள் Pயின் திசையிநிலை $\vec{r}$ என்க. δt நேரத்தில் துகள் P ஆனது P_1 நிலைக்கு மாறுவதாகவும், P_1இன் திசையிநிலை $(\vec{r} + \vec{\delta r})$ என்றும் கொள்க.

$\therefore \ \overrightarrow{PP_1} = \vec{\delta r} = \delta t$ நேரத்தில் துகளின் இடப்பெயர்ச்சி திசைவேகம் என்பது இடப்பெயர்ச்சி வீதமாகையால்,

$$\vec{V} = \underset{\delta t \to 0}{\text{எல்லை}} \left(\frac{\vec{\delta r}}{\delta t}\right) = \frac{d\vec{r}}{dt}$$



படம் 117

இத்திசைவேகத் திசையியானது நாண் PP_1இன் எல்லைநிலை வழியே செயல்படுமாகையால், Pயில் வரையப்படும் தொடுகோடு வழியே செயல்படும்.

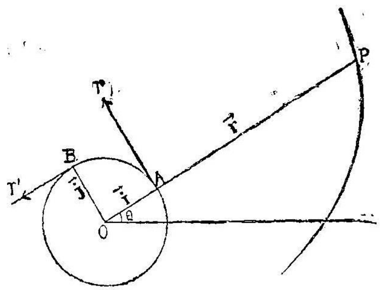
t நேரத்தில் துகளின் முடுக்கம் $\vec{a}$ எனில்,

$$\vec{a} = \underset{\delta t \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\vec{\delta V}}{\delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt}$$

இங்கு δV என்பது δt நேரத்தில் திசைவேகம் V-இன் மாறுபாடு.

ஆரை குறுக்கு முடுக்கங்கள்

i, j என்பன முறையே $\overrightarrow{OP}$ திசையிலும் OPக்குச் செங்குத்துத் திசையிலும் (θ அதிகரிக்கும் முகமாக) உள்ள திசையி அலகுகள் என்று கொள்க. A, B என்பன இத்திசையி அலகுகளைக் குறிக்கும் புள்ளிகள் என்க.



படம் 118

$$\therefore \quad \overrightarrow{OA} = \mathbf{i}, \overrightarrow{OB} = \mathbf{j}$$

துகள் P-யானது அதன் பாதையில் நகரும்போது A-யும் B-யும் O-ஐ மையமாகவும் ஓர் அலகு ஆரையும் கொண்ட ஓர் அலகு வட்டத்தின் மீது நகரும். இரு புள்ளிகளும் $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ என்னும் சம சுழல்வேகத்துடன் நகரும். எனவே, அவற்றின் நேர்கோட்டுத் திசைவேகங்கள் முறையே AT, BT^1 ஆகிய தொடுகோடுகளின் வழியே செயல்படும். இவற்றின் அளவுகள் $v = \omega r - \omega \cdot 1 = \omega$ ஆகும்.

ஆகவே, A-யின் திசைவேகம் $= \omega\mathbf{j}$, (j திசையிலிருப்பதால்)

B-யின் திசைவேகம் $= -\omega\mathbf{j}$, (i-க்கு எதிர்த் திசையி லிருப்பதால்)

இப்பொழுது, $\overrightarrow{OP} = \vec{r} = \vec{r}\,\mathbf{i}$

$$\therefore \quad \vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}(\vec{r}\,\mathbf{i})$$

$$= \frac{d\vec{r}}{dt}\mathbf{i} + \vec{r}\frac{d\mathbf{i}}{dt}$$ (ஆனால் $\frac{d\mathbf{i}}{dt} = A$யின் திசைவேகம் $= \omega\mathbf{j}$)

$$\therefore \frac{dr}{dt}\,\mathbf{i} + \vec{r}\,\omega\mathbf{i}$$

ஆகவே, ஆரைவேகம் $\frac{\vec{dr}}{dt}$ என்றும், குறுக்குவேகம் $\vec{r\omega} = \vec{r}\frac{d\theta}{dt}$ என்றும் காண்கிறோம்.

இப்பொழுது முடுக்கம் $\vec{a} = \frac{\vec{dv}}{dt}$

$$= \frac{d}{dt}\left[\frac{\vec{dr}}{dt}\,\mathbf{i} + \vec{r}\omega\mathbf{j}\right]$$

$$= \frac{\vec{d^2r}}{dt}\,\mathbf{i} + \frac{\vec{dr}}{dt}\,\frac{d\mathbf{i}}{dt} + \frac{\vec{dr}}{dt}\cdot\omega\mathbf{j} + \vec{r}\,\frac{d\omega}{dt}\,\mathbf{j} + \vec{r\omega}\,\frac{d\mathbf{j}}{dt}$$

ஆனால் $\frac{d\mathbf{i}}{dt}$ A யின் திசைவேகம் $= \omega\mathbf{j}$

$\frac{d\mathbf{j}}{dt} = B$ யின் திசைவேகம் $= -\,\omega\mathbf{i}$

$$\therefore \vec{a} = \frac{d^2r}{dt^2}\,\mathbf{i} + \frac{dr}{dt}\,\omega\,\mathbf{j} + \frac{dr}{dt}\,\omega\,\mathbf{j} + r\,\dot{\omega}\,\mathbf{j} - r\,\omega^2\,\mathbf{i}$$

$$= \left(\frac{d^2r}{Pt^2} - r\omega^2\right)\mathbf{i} + \left(2\,\frac{dr}{dt}\,\omega + r\,\dot{\omega}\right)\mathbf{j}$$

$\therefore$ ஆரை முடுக்கம் $= \frac{d^2r}{dt^2} - r\omega^2 = \ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2$

குறுக்கு முடுக்கம்

$$= 2\,\frac{dr}{dr}\,\omega + r\,\dot{\omega} = 2\,\frac{dr}{dt}\,\frac{d\theta}{dt} + r\,\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{r}\,\frac{d}{dt}\left(r^2\,\frac{d\theta}{dt}\right)$$

மாதிரி 167. $r = ae^{\theta}$ எனும் பாதையில் ஒரு துகள் மாருச் சுழல் வேகத்துடன் நகருகிறது. அதன் ஆரை முடுக்கம் பூச்சிய மென்றும், குறுக்கு முடுக்கம் முனையிலிருந்து அதன் தூரத்திற்கேற்ப மாறுபடு மென்றும் காட்டுக.

தீர்வு:

$\frac{d\theta}{dt} = \omega =$ மாறிலி யென்று தரப்பட்டுள்ளது.

இப்பொழுது, துகளின் பாதை $r = ae^{\theta}$.

வகையீடு செய்க. $\frac{dr}{dt} ae^{\theta} . \frac{d\theta}{dt} = r\,\omega$

மீண்டும் வகையீடு செய்க. $\frac{d^2r}{dt^2} = \omega . \frac{dr}{dt} = \omega\,(r\omega) = r\omega^2$.

$$\text{ஆரை முடுக்கம்} = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt^2}\right)^2$$

$$= r\omega^2 - r\omega^2$$

$$= O .$$

$$\text{குறுக்கு முடுக்கம்} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)$$

$$= \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\,(r^2\omega)$$

$$= \frac{1}{r} . 2\,r\,\omega . \frac{dr}{dt}$$

$$= 2\omega\,.\,r\omega$$

$$= 2\omega^2 r$$

∴ குறுக்கு முடுக்கம் r க் கேற்ப. மாறுபடுகிறது.

மாதிரி. 168 $r = e^{\theta}$ எனும் பாதையில் ஒரு துகள் நகருகிறது. அதை முனையுடன் சேர்க்கும் கோட்டில் விசையில்லை. துகளின் முனையைச் சுற்றி சுழல்வேகம் நிலையானது என்றும், அதன் திசை வேக அளவு, முடுக்க அளவு ஆகிய ஒவ்வொன்றும் முனையிலிருந்து அதன் தூரத்துடன் நேர் விகிதத்தில் உள்ளதென்றும் நிறுவுக. (மதுரை பி. எஸ்ஸி. 1972 ஏப்.)

தீர்வு: ஆரை வழியே விசையில்லை யாதலால் ஆரை முடுக்கம் பூச்சியமாகும்.

$$\therefore \quad \frac{d^2r}{dt^2} = r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = O$$

$$\text{அல்லது,}\ \frac{d^2r}{dt^2} = r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \qquad - \qquad (1)$$

பாதையின் சமன்பாடு: $r = e^{\theta}$.

$$\therefore \quad \frac{dr}{dt} = e^{\theta} . \frac{dx}{dt} = r \frac{d\theta}{dt} \qquad (2)$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{dr}{dt} . \frac{d\theta}{dt} + r . \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$= r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + r \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

ஆனால் $\frac{d^2r}{dt^2} = r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$ ஆகையால் [(1) இலிருந்து],

$$r \frac{d^2\theta}{dt} = O$$

$$\therefore \frac{d^2\theta}{dt^2} = O$$

தொகையீடு காணின், $\frac{d\theta}{dt}$ மாறிலி.

அதாவது சுழல்வேகம் ω = மாறிலி.

மேலும், $\frac{dr}{dt} = r \frac{d\theta}{dt} \; r\omega$ (2) இலிருந்து.

$$\therefore \quad \frac{d^2r}{dt^2} = \omega . \frac{dr}{dt} = \omega \, (r \, \omega) = \omega^2 r.$$

துகளின் வேகம் = $\sqrt{(\text{ஆரை வேகம்})^2 + (\text{குறுக்கு வேகம்})^2}$

$$= \sqrt{\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \left(r \frac{d\theta}{dt} \right)^2}$$

$$= \sqrt{(r\omega)^2 + (r\omega)^2}$$

$$= r\omega \sqrt{2}$$

$$= (\omega \sqrt{2})\, r$$

$$\propto r$$

அதாவது, துகளின் வேகம் r — உடன் நேர் விகிதத்தி லுள்ளது.

$$\text{ஆரை முடுக்கம்} = \frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

$$= \omega^2 r - r \omega^2$$

$$= O .$$

$$\text{குறுக்கு முடுக்கம்} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2 \frac{d\theta}{dt}\right)$$

$$= \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\omega)$$

$$= \frac{1}{r}.\ \omega.\ 2r.\ \frac{dr}{dt}$$

$$= 2\omega.\ r\omega$$

$$= 2\omega^2 r$$

∴ துகளின் முடுக்கம்

$$= \sqrt{(\text{ஆரை முடுக்கம்})^2 + (\text{குறுக்கு முடுக்கம்})^2}$$

$$= \sqrt{0 + 4\omega^4 r^2}$$

$$= (2\omega^2)\, r$$

$$\propto r$$

அதாவது, துகளின் முடுக்கம் r — உடன் நேர்விகிதத்தி லுள்ளது.

மாதிரி 169. ஒரு துகளின் ஆரைவேகமும், குறுக்குவேக மும் எப்பொழுதும் ஒன்றுக்கொன்று விகித சமத்திலிருந்தால், அதன் பாதை ஒரு சமகோணச் சுருளி (equiangular spiral) என்று நிறுவுக.

தவிர ஆரை முடுக்கம், குறுக்கு முடுக்கம் ஆகியவையும் எப்பொழுதும் ஒன்றுக்கொன்று விகித சமத்திலிருந்தால் துகளின் திசைவேகம் முனையிலிருந்து அதன் தூரத்தின் ஏதாவதொரு அடுக்கிற்கேற்ப மாறுபடுமென்று காட்டுக.

தீர்வு: ஆரைவேகம் $= \lambda$ (குறுக்குவேகம்), λ விகிதசம மாறிலி.

$$\therefore \frac{dr}{dt} = \lambda r \frac{d\theta}{dt} \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$\frac{dr}{r} = \lambda\, d\theta$$

தொகையீடு காண்க : $\log r = \lambda\theta + \log a$, a என்பது மாறிலி.

$$\therefore \log \frac{r}{a} = \lambda\theta$$

$$\frac{r}{a} = e^{\lambda\theta}$$

$$r = ae^{\lambda\theta}$$

இது ஒரு சமகோணச் சுருளியின் சமன்பாடு ஆகும்.

இப்பொழுது ஆரைமுடுக்கம் = μ (குறுக்குமுடுக்கம்), μ என்பது விகிதசம மாறிலி.

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \mu . \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2 \cdot \dot{\theta})$$

ஆனால் (1) இலிருந்து, $\dot{r} = \lambda r \dot{\theta}$

$$\therefore \dot{\theta} = \frac{\dot{r}}{\lambda r}$$

$$\therefore \ddot{r} - r\left(\frac{\dot{r}}{\lambda r}\right)^2 = \frac{\mu}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2 \frac{\dot{r}}{\lambda r}\right)$$

$$\ddot{r} - \frac{\dot{r}^2}{\lambda^2 r} = \frac{\mu}{\lambda r}\frac{d}{dt} r\dot{r}$$

$$= \frac{\mu}{\lambda} . \frac{1}{r}(r\ddot{r} + \dot{r})$$

$$= \frac{\mu}{\gamma}\ddot{r} + \frac{1}{r}\frac{\mu}{\lambda}\dot{r}^2$$

$$\therefore \ddot{r} - \frac{\mu}{\lambda}\ddot{r} = \frac{\dot{r}^2}{\lambda^2 r} + \frac{\lambda}{\lambda}\frac{\dot{r}^2}{r}$$

$$\ddot{r}\left(1 - \frac{\mu}{\lambda}\right) = \frac{\dot{r}^2}{r}\left(\frac{r}{\lambda^2} + \frac{\mu}{\lambda}\right)$$

$$\therefore \ddot{r} = \frac{\dot{r}^2}{r} n, n = \frac{\left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{\lambda}{\mu}\right)}{1 - \frac{\mu}{\lambda}}$$

= மாறிலி.

அல்லது, $\frac{\ddot{r}}{\dot{r}} = n\frac{\dot{r}}{r}$

அதாவது, $\frac{d(\dot{r})}{\dot{r}} = n\frac{d(r)}{r}$

தொகையீடு காண்க. $\log \dot{r} = n \log r + \log C$, C எனபது மாறிலி.

$$\therefore \quad \dot{r} = C rn$$

அதாவது, ஆரைவேகம் $= Cr^{n}$

குறுக்கு வேகம் $= r\frac{d\theta}{dt}$

$$= r\dot{\theta}$$

$$= r\frac{\dot{r}}{\lambda r}$$

$$= \frac{1}{\lambda}\dot{r}$$

$$= \frac{\lambda}{1}cr^{n}.$$

$\therefore$ துகளின் வேகம் $= \sqrt{(\text{ஆரைவேகம்})^2 + (\text{குறுக்குவேகம்})^2}$

$$= \quad (cr^{n})^2 + \left(\frac{cr^{n}}{\lambda}\right)^2$$

$$= \quad (cr^{n})^2 + \left(1 + \frac{1}{\lambda^2}\right)$$

$$= r^{n} c\sqrt{1 + \frac{1}{\lambda^2}}$$

$$= kr^{n}, k = c\sqrt{1 + \frac{1}{\lambda^2}} = \text{மாறிலி}$$

$\therefore$ துகளின்வேகம் r-இன் n அடுக்குக்கேற்ப மாறுபடுகிறது.

மாதிரி 170. ஒரு துகள் ஆதியிலிருந்து தொடக்கக் கோட்டின் வழியே $\frac{f}{\omega}$ திசைவேகத்துடன் புறப்பட்டு, ஆதியைச் சுற்றி ω எனும் மாருச் சுழல் வேகத்துடனும், $-f$ எனும் மாரு எதிர் முடுக்கத்துடனும் நகர்கிறது, ஆரை வேக வளர்ச்சி ஒரு போதும் நேரடையாளமுடனிருக்காது என்றும் ஆனல் பூச்சி

யத்தை நோக்கிச் செல்லுமென்றும் காட்டுக. அதன் பாதையின் சமன்பாடு $\omega^2 r = f(1 - e^{-\theta})$ என்று நிறுவுக.

தீர்வு : சுழல்வேகம் $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ (மாறிலி).

ஆரை முடுக்கம் $\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -f$

$$\therefore \frac{d^2r}{dt^2} - r\,\omega^2 = -f$$

அல்லது, $\frac{d^2r}{dt^2} = \omega^2 r - f$

தொகையீடு காணின், $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \omega^2 r^2 - 2fr + k$, k என்பது மாறிலி

தொடக்கத்தில், $r = O$, $\frac{dr}{dt} = \frac{\omega}{f}$ (தரப்பட்டுள்ளது)

$$\therefore \frac{f^2}{\omega^2} = k$$

$$\therefore \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \omega^2 r^2 - 2fr + \frac{f}{\omega^2}$$

$$= \left(\frac{f}{\omega} - \omega r\right)^2$$

$$\therefore \frac{dr}{dt} = \frac{f}{\omega} - \omega r$$

அதாவது, $\frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{f}{\omega} - \omega r$

$$\frac{dr}{d\theta} \cdot \omega = \frac{f}{\omega} - \omega r$$

அல்லது, $\frac{dr}{d\theta} = \frac{f}{\omega^2} - r$

$$\therefore \frac{dr}{\left(\frac{f}{\omega^2} - r\right)} = d\theta$$

தொகையீடு காண்க : $\log \lambda - \log\left(\frac{f}{\omega^2} - r\right) = \theta$, λ என்பது மாறிலி.

தொடக்கத்தில் $\theta = O, r = O \quad \therefore \quad \log \lambda = \log \frac{f}{\omega^2}$

$$\therefore \log \frac{f}{\omega^2} - \log\left(\frac{f}{\omega^2} - r\right) = \theta$$

$$\log\left(\frac{f}{\omega^2} - r\right) - \log \frac{f}{\omega^2} \quad \theta$$

$$\log\left(\frac{\frac{f}{\omega^2} - r}{f}\right) = -\theta$$

$$\frac{\frac{f}{\omega^2} - r}{f/\omega^2} = e^{-\theta}$$

$$\frac{f}{\omega^2} - r = \frac{f}{\omega^2} e^{-\theta}$$

அல்லது, $$r = \frac{f}{\omega^2} - \frac{f}{\omega^2} e^{-\theta}$$

$$= \frac{f}{\omega^2}\left(1 - e^{-\theta}\right)$$

அல்லது, $\omega^2 r = f(1-e)^{-\theta}$ (பாதையின் சமன்பாடு)

இப்பொழுது, $\frac{d^2r}{dt^2} = \omega^2 r - f$ என்ற தொடர்பில் மேற்கண்ட மதிப்பைப் பிரதியிடுக.

$$\frac{d^2r}{dt^2} = f(1-e)^{-\theta} - f = -f e^{-\theta} = -\frac{f}{e\theta}$$

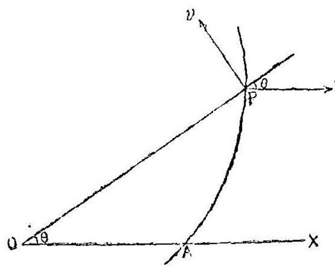
இத்தொடர்பிலிருந்து θ-இன் எந்த மதிப்புக்கும் $\frac{d^2r}{dt^2}$ நேரடையாளம் பெற முடியாதென்றும், ஆனால் θ-இன் கந்தழி (infinity) மதிப்புக்கு அது பூச்சியமாகுமென்றும் காணலாம்.

மாதிரி 171. ஒரு நிலையான திசையிலும், O என்னும் நிலையான புள்ளி வழியே வரையப்படும் ஆரைத் திசையி OP-க்குச்

செங்குத்துத் திசையிலும் முறையே u, v என்னும் இரு மாருத் திசைவேகங்களைக் கொண்ட P என்னும் துகளின் பாதை O-ஐக் குவியமாகவும் (focus), $\frac{u}{v}$ ஐ மையவகற்சி (eccentricity)யாகவும் கொண்ட ஒரு கூம்பு வளைவு (conic) என்று காட்டுக.

(சென்னை எம்.எஸ்ஸி. 1968)

தீர்வு : t நேரத்தில் துகள் P என்னும் நிலையிலிருப்பதாகக் கொள்க. O என்பது முனைப்புள்ளி ; OX என்பது தொடக்கக் கோடு. இத் தொடக்கக் கோட்டினை நிலையான திசையாகக் கொண்டு P-யின் u என்னும் திசைவேகம் OX-க்கு இணையாகச் செயல்படுவதாகக் கொள்க. அதன் அடுத்த திசைவேகம்



படம் 119

v ஆரைத் திசையி OP-க்குச் செங்குத்துத் திசையில் செயல்படுவதாகக் கொள்க. P-யின் கோண தூரக் கூறுகள் (r, θ) என்க.

OP வழியே திசைவேகங்களைப் பிரிக்கவும் :

$$\text{ஆரைத் திசைவேகம் } \frac{dr}{dt} = u \cos \theta \qquad \dots \qquad (1)$$

OP-க்குச் செங்குத்துத் திசையில் திசைவேகங்களைப் பிரிக்கவும்·

$$\text{குறுக்குவேகம் } r\frac{d\theta}{dt} = v - u \operatorname{Sin} \theta \qquad \dots \qquad (2)$$

(1)ஐ (2) ஆல் வகுக்கவும்.

$$\frac{dr/dt}{r.d\theta/dt} = \frac{u \cos \theta}{v - u \operatorname{Sin} \theta}$$

$$\frac{dr}{r} = \frac{u \cos \theta}{v - \sin \theta} d\theta$$

$$= \frac{-d(v - u \operatorname{Sin} \theta)}{v - u \operatorname{Sin} \theta}$$

தொகையீடு காண்க : $\log r = -\log(v - u \operatorname{Sin} \theta) + \log A$, தொடக்கத்தில் துகளானது A-யிலிருந்ததாகவும், $OA = l$ என்றும் கொள்க.

$\therefore$ தொடக்கத்தில் $r = l,\ \theta = O$.

$$\therefore\ \log l = -\log v + \log A.$$

அதாவது, $\log A = \log lv$

அல்லது, $A = lv$

$$\therefore\ \log r + \log (v - u \operatorname{Sin} \theta) = \log (lv).$$

$$\log r (v - u \sin \theta) = \log (lv)$$

$$r (v - u \sin \theta) = lv$$

$$\therefore\ \frac{l}{r} = \frac{v - u \sin \theta}{v}$$

அதாவது, $\frac{l}{r} = 1 - \frac{u}{v} \sin \theta$

இது ஒரு கூம்பு வளைவின் சமன்பாடாகும். அதன் மையவகற்சி $e = \frac{u}{v}$

பயிற்சி 17

1. ஒரு துகள் $r = e^{\theta}$ என்னும் வளைவரைப் பாதையில் மாருச் சுழல் வேகத்துடன் நகர்கிறது. அதன் ஆரை முடுக்கம் பூச்சியமென்றும், குறுக்கு முடுக்கம் முனைப் புள்ளியிலிருந்து அதன் தூரத்திற்கேற்ப மாறுபடுமென்றும் காட்டுக.

2. $r = ae^{\theta}$ என்னும் பாதையில் ஒரு துகள் நகருகிறது. அதை முனையுடன் சேர்க்கும் கோட்டில் விசையில்லை. துகளின் முனையைச் சுற்றி அதன் சுழல்வேகம் நிலையானது என்றும், அதன் திசைவேக அளவு, முடுக்க அளவு ஆகிய ஒவ்வொன்றும் முனையிலிருந்து அதன் தூரத்துடன் நேர்விகிதத்தில் உள்ளது என்றும் நிறுவுக.

3. ஒரு துகள் $r = a\ (1 + \cos \theta)$ என்னும் நெஞ்சுவளை வழியே v எனும் சீரான வேகத்துடன் நகருகிறது. (i) அதன் முடுக்கத்தின் ஆரை வழிக்கூறு நிலையானது, (ii) முனையைச் சுற்றி அதன் சுழல் வேகம் $\omega = \frac{1}{2a}\left(v \sec \frac{\theta}{2}\right)$, (iii) அதன் முடுக்கத்தின் அளவு $\frac{3v\,\omega}{2}$ என்று காட்டுக.

4. ஒரு துகள் முனைப்புள்ளி O-ஐச் சுற்றி மாருச் சுழல் வேகத்துடன் ஒரு சமகோணச் சுருளிப் பாதையில் நகருகிறது. அதன் முடுக்கம் OP-க்கேற்ப மாறுகிறதென்றும், P-யிலுள்ள தொடுகோட்டுடன் OP கொண்டுள்ள அதே நிலையான கோணத்துடன் கூடிய திசையையே கொண்டிருக்குமென்றும் காட்டுக.

5. ஆரைத் திசையி வழியேயும், அதற்குச் செங்குத்தாகவும் ஒரு துகளின் திசைவேகங்கள் முறையே λr, $\mu\theta$ ஆகும். அதன் பாதையைக் காண்க. ஆரைத் திசையி வழியாகவும், அதற்குச் செங்குத்துத் திசையிலும் அதன் முடுக்கங்கள் முறையே $\lambda^2 r - \dfrac{\mu^2\theta^2}{r}$, $\mu\theta\left(\lambda + \dfrac{\mu}{r}\right)$ என்று காட்டுக.

6. $r = ae^{\theta\cot\alpha}$ என்னும் சமகோணச் சுருளியின்மேல் ஒரு துகள் நகருகிறது. ஆரைத் திசையி வழியாகவும், அதற்குச் செங்குத்துத் திசையிலும் அதன் வேகங்கள் முறையே $k\cos\alpha$, $k\sin\alpha$ என்றும் முடுக்கங்கள் முறையே $-\dfrac{k^2}{r}\sin^2\alpha$, $\dfrac{k^2}{r}\sin\alpha\cos\alpha$ என்றும் காட்டுக. (k என்பது ஒரு மாறிலி)

7. $r = ae^{\theta\cot\alpha}$ என்னும் சமகோணச் சுருளியின் வழியே ஒரு துகள் நகருகிறது. அதன் முனையைத் துகளுடன் சேர்க்கும் ஆரைத் திசையி நிலையான சுழல் வேகத்தைக் கொண்டிருந்தால் அதன் முடுக்கம் ஆரைத்திசையியுடன் 2α கோணத்தைக் கொண்டிருக்குமென்றும், துகளின் வேகம் V எனில், அதன் முடுக்கத்தின் அளவு $\dfrac{V^2}{r}$ என்றும் காட்டுக.

8. ஆரைத் திசையி வழியாகவும், அதற்குச் செங்குத்துத் திசை வழியாகவும் ஒரு துகளின் திசைவேகங்கள் முறையே λr^2, $\mu\theta^2$. துகளின் பாதையின் கோணதூரச் சமன்பாடு

$$\frac{1}{2\lambda r^2} = \frac{1}{\mu\theta} + c, \; c \text{ ஒரு மாறிலி,}$$

யென்றும், அதன் முடுக்கக் கூறுகள் முறையே

$$\left(2\lambda^2 r^3 - \mu^2\frac{\theta^4}{r}\right), \left(\lambda\mu r\theta^2 + 2\mu^2\frac{\theta^3}{r}\right)$$

என்றும் காட்டுக.

(மதுரை பி.எஸ்ஸி. 1973 ஏப்' 69 செப்.)

9. ஒரு கோல் அதன் ஒரு முனை எப்பொழுதும் ஒரு நிலையான புள்ளி வழியே ω என்னும் சீரான சுழல் வேகத்துடன் சுற்றுகிறது. அதன் மறுமுனை $r = a + be\theta$ என்னும் வளைவரையை வரைகிறது. கோலின் எந்தப் புள்ளியிலும் ஆரை முடுக்கம் எக் கணத்திலும் ஒரே மாதிரியாகவே இருக்குமென்றும், கோலின் மேலுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியின் ஆரைத் திசைவேகமும் தரப்பட்ட ஒரு கணத்தில் ஒரே மாதிரியாகவேயிருக்குமென்றும் காட்டுக.

10. ஒரு துகள் a ஆரையுள்ள ஒரு வட்டத்தின்மேல் v எனும் சீர்வேகத்துடன் நகருகிறது. வட்டத்தின் ஏதேனுமொரு விட்டத்தைத் தொடக்கக் கோடாகவும், அவ்விட்டத்தின் ஒரு முனையை முனைப் புள்ளியாகவும் கொண்டால், அத்துகளின் ஆரை, குறுக்கு முடுக்கங்கள் முறையே $-\dfrac{v^2}{a}\cos\theta, -\dfrac{v^2}{a}\sin\theta$ என்று காட்டுக.

11. ஒரு துகள் $r = 2a\sin\theta$ எனும் வட்டத்தின்மீது $\lambda\,\mathrm{cosec}^2\theta$ எனும் வேகத்துடன் நகருகிறது. அதன் முடுக்கம் முழுப்படியாக ஆதியை அத்துகளுடன் சேர்க்கும் நேர்கோட்டின் வழியே செயல்படும் என்று காட்டுக.

12. ஒரு வழவழப்பான நேர்க்குழாய் ஒரு கிடைத்தளத்தின்மேல் நிலையாக வைக்கப்பட்ட அதன் ஒரு முனையைச் சுற்றி ω எனும் சுழல்வேகத்துடன் சுற்றுகிறது. பூச்சிய நேரத்தில் குழாயிலுள்ள ஒரு துகள் அதன் நிலையான முனையிலிருந்து a தூரத்தில் குழாய் வழியே V வேகத்துடன் நகர்ந்து கொண்டிருந்தால் t நேரத்தில் அதன் தூரம் $a\cos h\,\omega t + \dfrac{V}{\omega}\sin h\,\omega t$ என்று காட்டுக.

மையவிசை (Central Force)

ஒரு நிலையான புள்ளியை நோக்கியே எப்பொழுதும் செயல்படுகின்ற ஒரு விசைக்கு மையவிசை என்று பெயர். அந் நிலையான புள்ளிக்கு ''விசை மையம்'' (centre of force) என்று பெயர்.

மைய விசைப் பாதை (Central Orbit)

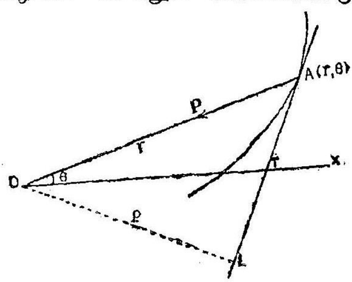
ஒரு மைய விசையின் கீழ் நகர்கின்ற ஒரு துகளினுல் வரையப்படுகின்ற பாதைக்கு மையவிசைப் பாதை என்று

பெயர். ஒவ்வொரு கணத்திலும் துகள் வழியே அதன் பாதைக்கு வரையப்படும் தொடுகோடு, விசை மையம் ஆகியவை அடங்கிய தளத்தின் மேலேயே துகள் நகருமாகையாலும், துகளின் மீது செயல்படுகின்ற அந்த மைய விசையும் அத்தளத்திலேயே அமைந்திருக்குமாகையாலும் துகளின் மையவிசைப் பாதை ஒரு தளத்திலமைந்த வளைவரையாகவேயிருக்கும். விசைமையத்தை முனைவுப் புள்ளியாகவும் (Pole), அம் முனைவுப் புள்ளிவழிக் கிடைக் கோட்டினைத் தொடக்கக் கோடாகவும் கொண்டு t நேரத்தில் துகளின் நிலையின் கோண தூரக் கூறுகளை (r, θ) என்று எடுத்துக் கொள்வதன் மூலம் மையவிசைப் பாதைகளின் சமன்பாடுகளைக் காணலாம்.

மையவிசைப் பாதையின் வகைக் கெழுச்சமன்பாடு (Differential Equation of a central orbit)

ஒரு தளத்திலமைந்துள்ள ஒரு வளைவரையின் மீது அத்தளத்திலுள்ள ஒரு நிலையான புள்ளியை நோக்கியே எப்பொழுதும் செயல்படுகின்ற P எனும் ஒரு முடுக்கத்துடன் ஒரு துகள் நகருகிறது ; அதன் பாதையின் வகைக் கெழுச் சமன்பாடு காணல் :

துகளின் முடுக்கம் செயல்படுகின்ற நிலையான புள்ளி O-ஐ முனைவுப் புள்ளியாகவும், O வழியே செல்லும் கிடைக்கோடு OX ஐத் தொடக்கக் கோடாகவும் கொள்க. t நேரத்தில் துகளின் நிலை A என்றும், அந்நிலையின் கோண தூரக் கூறுகள் (r, θ) என்றும் கொள்க.



படம் 120

துகளின் முடுக்கம் முனைவுப் புள்ளி O வழியே செயல்படுவதால், துகளின் ஆரை முடுக்கம் $-P$ என்றும், குறுக்கு முடுக்கம் பூச்சியமென்றும் அறிந்து கொள்க.

$$\therefore \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -P \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dt}\left(r^2 \frac{d\theta}{dt}\right) = O \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

அல்லது, $\frac{d}{dt}\left(r^2 \frac{dt}{dt}\right) = O$

தொகையீடு காணின், $r^2 \frac{d\theta}{dt} = $ மாறிலி $= h$ என்க. ... (3)

இப்பொழுது, $u = \frac{1}{r}$ என்று கொண்டால்,

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{h^2}{r^2} = hu^2 \quad \ldots \quad \ldots \qquad (4)$$

$\cdot$ r $= \frac{1}{u}$ ஆகையால், $\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{dt}$

$$= -\frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

$$= -\frac{1}{u} \cdot \frac{du}{d\theta} \cdot hu^3$$

$$= -h \frac{du}{d\theta} \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -h \cdot \frac{d^2u}{d\theta^2} \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

$$= -h \cdot \frac{d^2u}{d\theta} \cdot hu^2$$

$$= -R^2 u^2 \cdot \frac{d^2u}{d\theta.} \quad \ldots \quad \ldots \qquad (5)$$

(4), (5) ஆகியவற்றிலிருந்து மதிப்புக்களை (1) இல் பிரதியிடவும்.

$$-h^2 u^2 \cdot \frac{d^2u}{d\theta^2} - \frac{1}{u} h^2 u^4 = -P.$$

அதாவது, $h^2 u^3 \frac{d^2u}{d\theta^2} + h^2 u^3 = P$

அல்லது, $\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{p}{h^2 u^2} \quad \ldots \quad \ldots \qquad (6)$

இதுவே, கோணதூரக் கூறுகளில் துகளின் பாதையின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு ஆகும்.

மையவிசைப் பாதையின் பாதச் சமன்பாடு
(Pedal' Equation of the Central orbit)

விசை மையம் O-ஐ ஆதியாகவும், O வழிக் கிடைக்கோடு OX ஐத் தொடக்கக் கோடாகவும் கொள்க. t நேரத்தில் துகளின் நிலை A என்றும், அதன் கோண தூரக் கூறுகள் (r, θ) என்றும் கொள்க. AO திசையில் துகளின் முடுக்கம் P எனில், பாதையின் வகைக் கெழுச் சமன்பாடு

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{p}{h^2 u^2}, u = \frac{1}{r}$$

என்று கண்டோம்.

A யில் பாதைக்கு வரையப்படும் தொடு கோட்டிற்கு O விலிருந்து OL என்னும் செங்குத்து வரைக. $OL = P$ எனில், வகை நுண் கணிதத்திலிருந்து,

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2$$

என்று நாமறிவோம்.

$$u = \frac{1}{r} \text{ ஆகையால், } \frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{dr}{d\theta}$$

$$\therefore \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2.$$

$$\therefore \frac{1}{p^2} = u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2.$$

θ-ஐப் பொறுத்த வகைக் கெழு காண்க.

$$-\frac{2}{p^3} \cdot \frac{dp}{d\theta} = 2u; \frac{du}{d\theta} + 2\frac{du}{d\theta} \cdot \frac{d^2u}{d\theta^2}$$

$$= 2\left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right)\frac{dn}{d\theta}$$

$$= 2. \left(\frac{P}{h^2 u^2}\right)\left(-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right)$$

$$= 2. \left(\frac{P}{h^2 u^2}\right)\left(-u^2. \frac{dr}{d\theta}\right)$$

$$= -2\frac{P}{h^2}. \frac{dr}{d\theta}.$$

$$\therefore \frac{1}{p^3} \cdot \frac{dp}{d\theta} = \frac{P}{h^2} \frac{dr}{d\theta}.$$

$$\frac{h^2}{p^3} \cdot \frac{dp}{dr} = P$$

இச்சமன்பாடு துகளின் மையவிசைப் பாதையின் $(P - r)$ சமன்பாடு அல்லது பாதச் சமன்பாடு எனப்படும்.

மைய விசைப் பாதையின் பாதச் சமன்பாட்டிலிருந்து வகைக்கெழுச் சமன்பாடு காணல் :

மையவிசைப் பாதையின் பாதச் சமன்பாடு $P = \frac{h^2}{p^3} \cdot \frac{dp}{dr}$ ஆகும்.

இப்பொழுது, $u = \frac{1}{r}$ ஆகையால்,

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{dr}{d\theta} = -u^2 \frac{dr}{d\theta}$$ என்று கண்டோம்.

இப்பொழுது, $\frac{1}{p^2} = u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2$ எனும் சூத்திரத்தை r-ஐப் பொறுத்து வகையீடு செய்க.

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{p^2}\right) = \frac{d}{dr}\left\{u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2\right\}$$

$$-\frac{2}{p^3} \cdot \frac{dp}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\left\{u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2\right\} \cdot \frac{d\theta}{dr}$$

$$= \left\{2u \cdot \frac{du}{d\theta} + 2\frac{du}{d\theta} \cdot \frac{d^2u}{d\theta^2}\right\} \frac{d\theta}{dr}$$

$$= 2\frac{du}{d\theta}\left\{u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right\} \cdot \frac{d\theta}{dr}$$

$$= 2\left(-u^2 \frac{dr}{d\theta}\right) \cdot \frac{d\theta}{dr}\left\{u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right\}$$

$$= -2u^2\left\{u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right\}$$

$$\therefore \frac{1}{p^3} \frac{dp}{dr} = u^2\left\{u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right\}$$

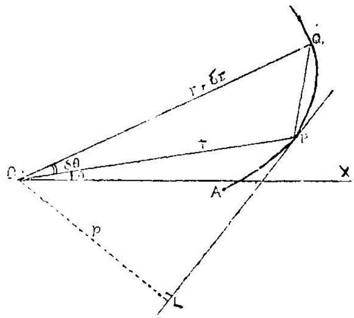
$$\therefore \quad \frac{h^2}{p^3} \cdot \frac{dp}{dr} = h^2u^2 \left\{ u + \frac{d^2u}{d\theta^2} \right\}$$

அதாவது, $P = h^2 u^2 \left\{ u + \dfrac{d^2u}{d\theta^2} \right\}$

அல்லது, $u + \dfrac{d^2u}{d\theta^2} = \dfrac{P}{h^2 u^2}$

ஆரைத் திசையினுல் வரையப்படும் பரப்பளவு வீதம் மாறிலியாகும்

விசை மையம் O-ஐ முனைவுப் புள்ளியாகவும், O-வழிக் கிடைக் கோட்டைத் தொடக்கக் கோடாகவும் கொள்க. P, Q என்பன முறையே t, $t + \delta t$ ஆகிய குறுகிய கால இடைவெளி நேரங்களில் துகளின் நிலைகள் என்றும், (r, θ), $(r + \delta r, \theta + \delta\theta)$ என்பன அவற்றின் கோண தூரக் கூறுகளென்றும் கொள்க.



படம் 121

δt நேரத்தில் ஆரைத் திசையினுல் வரையப்பட்ட பரப்பளவு ஆரைச் சிறைப் பகுதியான OPQ ஆகும். ஆனுல் $\delta\theta$ மிகச் சிறியதாகையாலும், $\delta\theta \to O$ ஆகையாலும் ஆரைச் சிறைப் பகுதி OPQ-வின் பரப்பளவு $\triangle OPQ$-வின் பரப்பளவிற்குச் சமம் என்று கொள்ளலாம்.

ஆகவே, δt நேரத்தில் ஆரைத் திசையி வரைந்துள்ள பரப்பு $= \triangle OPQ$

$$= \tfrac{1}{2} \cdot OP \cdot OQ \cdot \sin P\hat{O}Q$$

$$= \tfrac{1}{2} r (r + \delta r) \sin \delta\theta$$

$\therefore$ ஆரைத் திசையியினுல் வரையப்பட்ட ஆரைச் சிறைப் பரப்பளவு வீதம்

$$= \underset{\delta t \to O}{\text{எல்லை}} \left\{ \frac{\frac{1}{2} r (r + \delta r) \sin \delta\theta}{\delta t} \right\}$$

$$= \underset{\delta t \to O}{\text{எல்லை}} \left\{ \frac{\frac{1}{2} r (r + \delta r) . \delta\theta}{\delta t} \right\}$$

$= \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$

$= \frac{1}{2} h$ (ஏனெனில் $r^2 \frac{d\theta}{dt}$ = மாறிலி = h என்று இதற்கு முன்னர் நிறுவப்பட்டுள்ளது)

= ஒரு மாறிலி.

ஆகவே, ஆரைத் திசையியினுல் வரையப்படும் ஆரைச் சிறைப் பகுதியின் பரப்பு வீதம் ஒரு மாறிலியென்று காண்கிறேம்.

துகளின் திசைவேகம் துகளின் நிலைவழித் தொடுகோட்டில் விசை மையத்தின் செங்குத்துக்கேற்ப மாறுபடும்.

மைய விசைப் பாதையில் A என்னும் நிலையான புள்ளியிலிருந்து துகளின் P, Q ஆகிய நிலைகளின் தூரங்கள் முறையே S, $s + \delta s$ எனில், வில் $PQ = \delta s$ ஆகும்.

$\delta\theta$ சிறியதாகயிருப்பதாலும், $\delta t \to O$ ஆகையாலும், ஆரைச் சிறைப் பகுதி OPQ-வின் பரப்பளவு $\triangle OPQ$-இன் பரப்பளவிற்குத் தோராயமாகச் சமமாகும்.

$\therefore$ δt நேரத்தில் வரையப்பட்ட பரப்பளவு

= ஆரைச் சிறைப் பகுதி OPQ-வின் பரப்பு

= $\triangle OPQ$-இன் பரப்பு

= $\frac{1}{2}$ × அடிப்பக்கம் × உயரம்

= $\frac{1}{2} \times PQ \times P$, P என்பது P-விலிருந்து P-யின் தொடுகோட்டிற்குச் செங்குத்து.

$= \frac{1}{2} \delta s \times P.$

$\therefore$ ஆரைத் திசையினுல் வரையப்பட்ட பரப்பளவு வீதம்

$$= \lim_{\delta t \to O} \left(\frac{\triangle OPQ}{\delta t} \right)$$

(எல்லை)

$$= \lim_{\delta t \to O} \left[\frac{\frac{1}{2} \cdot \delta s \cdot p}{\delta t} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\delta s}{\delta t} \cdot p$$

$$= \frac{1}{2} vp.$$

ஆனுல், ஆரைத் திசையியினுல் வரையப்படும் ஆரைச் சிறைப் பரப்பளவு வீதம் $= \frac{1}{2} h$ என்று நாம் சற்றுமுன் கண்டோம்.

$$\therefore \frac{1}{2} h = \frac{1}{2} vp$$

அல்லது, $v = \frac{h}{p}$

ஆகவே, துகளின் தொடுகோட்டு வழித் திசைவேகம் அத் துகளின் நிலைவழித் தொடுகோட்டிற்கு முனைப்புள்ளி O-விலிருந்து வரையப்படும் செங்குத்து P-யுடன் எதிர்மாறு விகிதத்தி லிருக்கும்.

மையவிசைப் பாதையில் துகளின் வேகம் காணல் :

மைய விசைப் பாதையின் பாதச் சமன்பாட்டினை விருவிக்குமிடத்து

$$\frac{1}{p^2} = u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2$$

என்று கண்டோம். $v = \frac{h}{p}$ ஆகையால்,

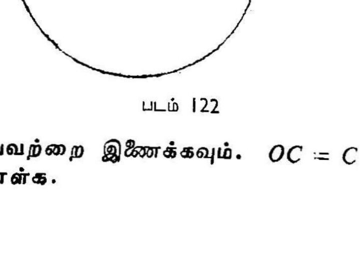
$$v^2 = \frac{h^2}{p^2} = h^2\left[u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2\right]$$

என்ற சமன்பாட்டைப் பெறலாம். இச்சமன்பாடு, மையவிசைப் பாதையின் எந்த நிலையிலும் துகளின் வேகத்தைக் காணப் பயன்படும் சூத்திரமாகப் பயன்படுகின்றது.

வட்டப்பாதை (circular orbit)

ஒரு துகள் விசை மையத்தை உள்ளடக்கிய வட்டப் பாதையில் நகருகிறது.

O என்னும் புள்ளியை விசை மையமாகக் கொண்டு நகருகின்ற துகளின் வட்டப் பாதையின் மையம் C என்றும், ஆரை a என்றும் கொள்க. O-ஆனது வட்டத்தினுள்ளே இருக்கிறது. t நேரத்தில் துகள் P என்னும் நிலையிலிருப்பதாகக் கொள்க. P-யிலுள்ள தொடுகோட்டிற்கு O-விலிருந்து OT என்னும் செங்குத்து வரைக. $OT = P$ என்க. CP, CO, OP ஆகியவற்றை இணைக்கவும். $OC = C$ என்றும், $OP = r$ என்றும் கொள்க.



படம் 122

$\triangle OPC$-யிலிருந்து, $c^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cos C\hat{P}O$

$$= a^2 + r^2 - 2\,ar \cos (90^\circ - O\hat{P}T)$$

$$= a^2 + r^2 - 2\,ar \sin O\hat{P}T$$

$$= a^2 + r^2 - 2\,ar \left(\frac{OT}{OP}\right)$$

$$= a^2 + r^2 - ar\, \frac{p}{r}$$

$$= a^2 + r^2 - 2\,ap$$

இப்பொழுது r-ஐப் பொறுத்து வகையீடு செய்க.

$$O = O + 2r - 2a.\ \frac{dp}{dr}$$

அல்லது, $\dfrac{dp}{dr} = \dfrac{r}{a}$

மைய விசையின் பாதச் சமன்பாட்டிலிருந்து,

$$P = \frac{h^2}{p^3}\,\frac{dp}{dr}$$

$$= \frac{h^2}{p^3}.\ \frac{r}{a}$$

ஆனால், $c^2 = a^2 + r^2 - 2ap$ ஆதலின்,

$$p = \frac{a^2 + r^2 - c^2}{2a}$$

$$\therefore p = \frac{h^2\, 8a^3}{(a^2 + r^2 - c^2)^3}.\ \frac{r}{a}$$

$$= \frac{8\, h^2\, a^2\, r}{(a^2 + h^2 - c^2)^3}$$

(ஆ) விசை மையம் வட்டத்தின் மேலிருத்தல்

விசை மையம் O ஆனது வட்டத்தின் மேலிருப்பதால் OC = ஆரை $= a$ ஆகும். ஆகவே, $c^2 = a^2 + r^2 - 2ap$ என்னும் சமன்பாட்டிலிருந்து,

$$a^2 = a^2 + r^2 - 2ap$$

அல்லது, $r^2 = 2ap$. என்று காணலாம்.

ஆகவே, $P = \frac{h^2}{p^3} \cdot \frac{r}{a}$ என்ற தொடர்பிலிருந்து,

$$\text{மைய விசை } p = \frac{h^2}{\left(\frac{r^6}{8a^3}\right)} \cdot \frac{r}{a} = \frac{8h^2 a^3}{r^5}$$

இப்பொழுது, $8h^2 a^2 = \mu$ எனக் கொண்டால்,

$$P = \frac{\mu}{r^5}.$$

அதாவது, மையவிசையானது முனையிலிருந்து துகளின் தூரத்தின் ஐந்தாவது அடுக்கின் தலைகீழ் விகிதத்திற்கேற்ப மாறுபடும்.

துகளானது விசை மையத்திலிருந்து r தூரத்திலிருக்கும் போது அதன் திசைவேகம் v எனில்,

$$v = \frac{h}{p}$$

ஆகும். ஆனால் $P = \frac{r^2}{2a}$ ஆகையால்.

$$v = \frac{2ah}{r^2}$$

ஆனால் $8a^2 R^2 = \mu$ ஆகையால் $\sqrt{\mu} = 2\sqrt{2}\, ah$ அல்லது, $2ah$

$$\therefore v = \frac{\sqrt{\mu/2}}{r^2}$$

அதாவது, முனையிலிருந்து r தூரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து அம்முனையை நோக்கிய $\frac{\mu}{r^5}$ என்னும் முடுக்கத்தின் கீழ் $\frac{\sqrt{\mu/2}}{r}$ வேகத்துடன் எறியப்படும் ஒரு துகள் அம்முனை வழியே செல்லும் ஒரு வட்டப்பாதையில் இயங்கும்.

நீள்வட்டப் பாதை (Elliptic orbit)

(அ) ஒரு துகள் ஒரு நீள் வட்டப்பாதையில் அதன் குவியத்தை நோக்கியே எப்பொழுதும் செயல்படுகின்ற ஒரு விசையின் கீழ் நகருகின்றது. விசைவிதி, திசை வேகம், காலவட்டநேரம் ஆகியவற்றைக் காணல்.

துகளின் மீது செயல்படுகின்ற விசை எப்பொழுதும் ஒரு நிலையான புள்ளியை (குவியத்தை) நோக்கியே செயல்படுவதால் அது ஒரு மைய விசையாகும். ஆகவே, நீள்வட்டப் பாதையும் ஒரு மையவிசைப் பாதையேயாகும்.

மையமுடுக்கம் P எனில், மையவிசைப் பாதையின் சமன்பாடு

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{P}{h^2 u^2} \qquad \dots \qquad \dots \qquad (1)$$

ஆகும். ஒரு நீள்வட்டத்தின் குவியத்தை முனைவுப் புள்ளியாகக் கொண்டு நீள்வட்டத்தின் கோணதூரச் சமன்பாடு.

$$\frac{l}{r} = 1 + e \cos\theta \text{ (என்பது செவ்வகலம்)}$$

என்று நாமறிவோம். $u = \frac{1}{r}$ எனக் கொள்வோமானால்,

$$v = \frac{1}{l} + \frac{e\cos\theta}{l}. \qquad \dots \qquad \dots \qquad (2)$$

$$\therefore \frac{du}{d\theta} = -\frac{e}{l}\sin\theta, \qquad \dots \qquad \dots \qquad (3)$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{e}{l}\cos\theta. \qquad \dots \qquad \dots \qquad (4)$$

இம்மதிப்புக்களைச் சமன்பாடு (1) இல் பிரதியிடுக;

$$-\frac{e}{l}\cos + \frac{1}{l} + \frac{e}{l}\cos\theta = \frac{P}{h^2 u^2}$$

அதாவது, $\frac{1}{l} = \frac{P}{h^2 u^2}$

அல்லது,, $P = \frac{h^2 u^2}{l} = \frac{h^2}{l} \cdot \frac{1}{r^2}$

இப்பொழுது, $\frac{h^2}{l} = \mu$ எனக் கொண்டால்,

$$P = \frac{\mu}{r^2}$$

ஆகும். ஆகவே, குவியத்தை நோக்கியே செயல்படுகின்ற முடுக்கமானது குவியத்திலிருந்து துகளின் தூரத்தின் வர்க்கத்திற்கேற்ப தலைகீழ் விகிதத்தில் மாறுபடும். இதுவே துகள்மீது செயல்படுகின்ற விசை விதியாகும்.

இனி, $\frac{h^2}{l} = \mu$ ஆகையால், $h^2 = \mu l$ ஆகும்.

அதாவது, $h = \sqrt{\mu l} = \sqrt{\mu \times \text{அரைச் செவ்வகலம்}}$. ... (5)

இப்பொழுது நீள்வட்டப் பாதையில் எந்த நிலையிலும் துகளின் திசைவேகம் v ஐக் காண்போம்.

$$v^2 = h^2 \left[u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 \right]$$

என்னும் சமன்பாட்டைக் கருதுக. (2), (3), (5) ஆகிய சமன்பாடுகளிலிருந்து மதிப்புக்களை இச் சூத்திரத்தில் பிரதியிடவும்.

$$v^2 = \mu l \left[\frac{(1 + e\cos\theta)^2}{l^2} + \frac{e^2 \sin^2\theta}{l^2} \right]$$

$$= \mu l \left[\frac{1 + 2e\cos\theta + e^2\cos^2\theta + e^2\sin^2\theta}{l^2} \right]$$

$$= \frac{\mu}{l} [\, 1 + 2e\cos\theta + e^2]$$

$$= \frac{\mu}{l} [\, 2(1 + e\cos\theta) - 1 + e^2 \,]$$

$$= \frac{\mu}{l} [\, 2(1 + e\cos\theta) - (1 - e^2)]$$

$$= \frac{\mu}{l} \left[\frac{2l}{r} - (1 - e^2) \right]$$

ஆனால் ஒரு நீள்வட்டத்தில் $l = \frac{b^2}{a} = \frac{a^2(1 - e^2)}{a} = a(1 - e^2)$

$$\therefore 1 - e^2 = \frac{l}{a}$$

$$\therefore v^2 = \frac{\mu}{l} \left[\frac{2l}{r} - \frac{l}{a} \right]$$

அல்லது, $v^2 = \mu \left[\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right]$ ... ... (6)

காலவட்ட நேரம்

மையய விசைப் பாதையில் துகளின் ஆரைத் திசையி வரைகின்ற பரப்பளவு வீதம் $\frac{h}{2}$ என்று நாமறிவோம். ஆகவே, T என்பது காலவட்ட நேரமெனில்,

$$\frac{h}{2} \cdot T = \text{நீள்வட்டத்தின் பரப்பு}$$

$$= \pi ab$$

$$\therefore \quad T = \frac{2\pi ab}{h}$$

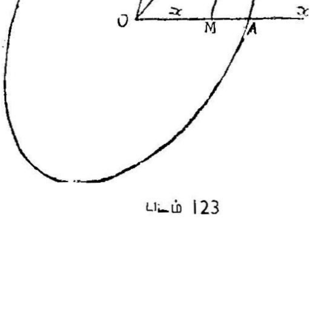
$$= \frac{2\pi ab}{\sqrt{\mu l}}$$

$$= \frac{2\pi ab}{\sqrt{\mu \cdot \frac{b^2}{a}}}$$

$$= \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{\mu}}$$

(ஆ) எப்பொழுதும் ஒரு நிலேயான புள்ளியை நோக்கியே செயல்படக் கூடியதும், அப்புள்ளியிலிருந்து துகளின் தூரத்திற் கேற்ப நேர்விகிதத்தில் மாறக் கூடியதுமான ஒரு முடுக்கத்துடன் ஒரு துகள் நகருகிறது. அதன் பாதை ஒரு நீள்வட்டமென நிறுவல்.

A என்னும் புள்ளியிலிருந்து V என்னும் திசைவேகத்துடன் AT என்னும் திசையில் துகள் எறியப்படுவதாகவும், அதன் முடுக்கம் O என்னும் நிலேயான புள்ளியை நோக்கிச் செயல்படுவதாகவும் கொள்க. OA-ஐ x-அச்சாகவும், O வழியே துகளின் எறிதிசை ATக்கு இணேயான OB என்னும் நேர்கோட்டை y-அச்சாகவும் கொள்க.



படம் 123

t நேரத்தில் துகளின் நிலே P என்று கொள்க. P-யிலிருந்து BO-க்கு இணேயாக PM என்னும் நேர்கோடு Ox-ஐ M-இல் வெட்டுமாறு வரைக. $P = (x, y)$ என்க. $\therefore \; OM = x, \; MP = y$.

துகளின்மீது செயல்படும் முடுக்கம் OP-ஐ நோக்கியும், PO-க்கு நேர் விகிதத்திலும் இருப்பதால், துகளின் முடுக்கம்

$= \mu . PO$ (μ என்பது விகிதசம மாறிலி) என்று கொள்ளலாம்.
$\therefore$ $\triangle OMP$-யிலிருந்து, முடுக்கங்களின் முக்கோண விதியின்படி,

$$\mu . \overrightarrow{PO} + \mu . \overrightarrow{PM} + \mu \overrightarrow{MO}$$

ஆகவே, MO, PM ஆகிய திசைகளில் துகளின் முடுக்கங்கள் முறையே $\mu . \overrightarrow{MO}$, $\mu . \overrightarrow{PM}$ ஆகும், ஆனால் $OM = x$, $MP = y$ ஆகையால், துகளின் இயக்கச் சமன்பாடுகளாவன :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu x, \qquad \dots \quad \dots \quad (1)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\mu y. \qquad \dots \quad \dots \quad (2)$$

இவ்விரு சமன்பாடுகளும் சாமானிய சீரிசை இயக்கச் சமன்பாடு களாதலின், இவற்றின் தீர்வுகள் முறையே

$$x = A \cos (\sqrt{\mu}\, t + B) \qquad \dots \quad \dots \quad (3)$$

$$y = C \cos (\sqrt{\mu}\, t + D) \qquad \dots \quad \dots \quad (4)$$

ஆகும். இப்பொழுது $OA = a$ என்க.

தொடக்கத்தில் துகளானது A-யிலிருந்து OB-க்கு இணையான திசையில் V திசைவேகத்துடன் புறப்படுவதால்,

$$t = O, x = a, y = O, \dot{x} = O, \dot{y} = V.$$

(3)-இலிருந்து, $a = A \cos B$

(3)-ஐ வகையீடு செய்தால், $\dot{x} = -A \sqrt{\mu} \sin (\sqrt{\mu}\, t + B)$
தொடக்க நிபந்தனைகளின்படி, $x = -A \sqrt{\mu} \sin B$.
ஆனால் $A \neq O$, $\mu \neq O$ ஆகையால் $B = O$.

$\therefore$ $a = A \cos B$-யிலிருந்து $A = a$ என்று காணலாம்.

ஆகவே, (3)-இலிருந்து $x = a \cos \sqrt{\mu}\, t$ என்று காண்கிறோம். $\dots \quad \dots \quad (5)$

இதுபோல், (4)-இலிருந்து, $O = C \cos D$, என்று பெறுகிறோம்.

ஆனால் $C \neq O$ ஆகையால், $\cos O = D$; அல்லது $D = \frac{\pi}{2}$

(4)-ஐ வகையீடு செய்க : $\dot{y} = -C \sqrt{\mu} \sin (\sqrt{\mu}\, t + D)$

இத்தொடர்பில் $t = O$, $\dot{y} = V$, $D = \frac{\pi}{2}$ என்று பிரதியிடுக.

$$V = -C\sqrt{\mu}\,\text{Sin}\,\frac{\pi}{2} = -C\sqrt{\mu}$$

அல்லது, $C = -\dfrac{V}{\sqrt{\mu}}$

$$\therefore\; y = -\frac{V}{\sqrt{\mu}}\cos\left(\sqrt{\mu}\,t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{V}{\sqrt{\mu}}\sin\sqrt{\mu}\,t \qquad \ldots \quad \ldots \quad (6)$$

(5), (6) ஆகிய சமன்பாடுகளிலிருந்து,

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 = \frac{y}{\left(\dfrac{V}{\sqrt{\mu}}\right)} = \cos^2\sqrt{\mu}\,t + \sin^2\sqrt{\mu}\,t = 1$$

என்று காண்கிறோம்.

அதாவது, துகளின் இயக்கப் பாதை $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{V^2/\mu} = 1$ என்ற நீள்வட்டமென்று காண்கிறோம். OA, OB என்பன இந் நீள் வட்டப் பாதையின் இணைவிட்டங்களாகும் (conjugate diameters).

குறிப்பு 1. சமன்பாட்டில் $x = O$ என்று பிரதியிட்டால், $y = \dfrac{V}{\sqrt{\mu}}$ என்று காணலாம்.

அதாவது, $OB = \dfrac{V}{\sqrt{\mu}}$ அல்லது, $V = \sqrt{\mu}\;OB$ என்று காணலாம்.

அதாவது எறிவேகம் $V = \sqrt{\mu} \times OA$-யின் இணைவிட்டத்தில் பாதி.

பாதையிலுள்ள எந்தப் புள்ளியையும் அதையடுத்த இயக்கத்திற்கான தொடக்கப் புள்ளியாகக் கொள்ளலாமாகையால், P என்பது பாதையிலுள்ள ஏதேனுமொரு புள்ளியென்றும், OQ என்பது OP-யின் ஆரை இணைவிட்டமென்றும் கொண்டால், P-யில் துகளின் திசைவேகம் $= \sqrt{\mu} \times OQ$ ஆகும்.

குறிப்பு 2. (3), (4) ஆகிய சமன்பாடுகளில் t-ஐ $\left(t + \dfrac{2\pi}{\sqrt{\mu}}\right)$

ஆக மாற்றுவதால் x, y மாறவில்லையாகையால், துகளின் கால வட்டநேரம் $\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$ என்று அறிந்து கொள்ளலாம்.

குறிப்பு 3. துகளின் முடுக்கம் O-விலிருந்து வெளிநோக்கிச் செயல்படுமெனில்,

(1), (2) ஆகிய சமன்பாடுகள் முறையே

$$\ddot{x} = \mu x, \ddot{y} = \mu y$$

என்றும், அவற்றின் தீர்வுகள் முறையே

$$x = A \cos h \sqrt{\mu}\, t + B \sin h \sqrt{\mu}\, t,$$

$$y = C \cos h \sqrt{\mu}\, t + D \sin h \sqrt{\mu}\, t$$

என்றும் மாறுவதைக் காணலாம்.

தொடக்கநிலை நிபந்தனைகளைப் பயன்படுத்தி $A = a$, $B = O$ என்றும், $C = O$, $D = \frac{V}{\sqrt{\mu}}$ என்றும் காணலாம்.

$$\therefore x = a \cos R \sqrt{\mu t},$$

$$y = \frac{V}{V\mu} \sin \sqrt{\mu} \sin h \sqrt{\mu t}$$

ஆகும். ஆகவே,

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{V/\sqrt{\mu}}\right)^2 = \cos R^2 \sqrt{\mu t} - \sin h^2 \sqrt{\mu t} = 1$$

அதாவது, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{V^2/\mu} = 1$ என்பது துகளின் இயக்கப்பாதையின் சமன்பாடு ஆகும். இது ஒரு அதி பரவளைவு ஆகும்.

மதிரி 172. முனையை நோக்கிய P என்னும் விசையின் கீழ் $r = ae^{\theta \cot \alpha}$ என்னும் சமகோணச் சுருளியின் மீது ஒரு துகள் நகருகிறது. விசை விதியைக் காண்க.

தீர்வு: $r = ae^{\theta \cot \alpha}$

$$r = \frac{1}{u} \text{ ஆகையால், } \frac{1}{u} = ae^{\theta \cot \alpha}$$

அல்லது, $aue^{\theta \cot \alpha} = 1$

θ ஐப் பொறுத்து வகையீடு காண்க.

$$ae^{\theta \cot \alpha} \cdot \frac{du}{d\theta} + au \cot \alpha . e^{\theta \cot \alpha} = O$$

$$\therefore \frac{du}{d\theta} = -u \cot \alpha$$

மீண்டும் θ ஐப் பொறுத்து வகையீடு செய்க.

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{du}{d\theta} . \cot \alpha$$

$$= -(-u \cot \alpha) \cot \alpha$$

$$= u \cot^2 \alpha$$

மைய விசைப் பாதையின் வகைக் கெழுச் சமன்பாட்டில் இம் மதிப்புக்களைப் பிரதியிடுக.

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{P}{h^2 u^2}$$

$$u \cot^2 \alpha + u = \frac{P}{h^2 u^2}$$

அல்லது, $\frac{P}{h^2 u^2} = u (\cot^2 \alpha + 1)$

$$= u \operatorname{cosec}^2 \alpha$$

$$\therefore \quad P = h^2 u^3 \operatorname{cosec}^2 \alpha$$

$$= h^2 \operatorname{cosec}^2 \alpha . \frac{1}{r^3}$$

$$\propto \frac{1}{r^3},$$

ஆகவே, முனையிலிருந்து துகளின் தூரத்தின் மூன்றுவது அடுக்குக்கேற்ப விசை தலைகீழாக மாறுகிறது.

மாதிரி **173.** முனையை நோக்கிய P என்னும் விசையின் கீழ் ஒரு துகள்

$$au = \tan h \left(\frac{\theta}{\sqrt{2}}\right) \text{ அல்லது } \cot h \left(\frac{\theta}{\sqrt{2}}\right)$$

என்னும் பாதையில் ஒரு துகள் நகருகிறது. ஒவ்வொரு வகையிலும் விசை விதியைக் காண்க.

(சென்னை எம். எஸ்ஸி 1965)

தீர்வு: $au = \tan h\left(\frac{\theta}{\sqrt{2}}\right.$ அல்லது $\left.\cot h\left(\frac{\theta}{\sqrt{2}}\right)\right)$

θ ஐப் பொறுத்து வகையீடு செய்க.

$a\frac{du}{d\theta} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sech}^2\left(\frac{\theta}{\sqrt{2}}\right)$ அல்லது $= \frac{1}{\sqrt{2}}\cos ec\, h^2\left(\frac{\theta}{\sqrt{2}}\right)$

மீண்டும் θ ஐப் பொறுத்து வகையீடு செய்க.

$$a\frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}\sec h^2\frac{\theta}{\sqrt{2}}\tan h\frac{\theta}{\sqrt{2}}$$

அல்லது $\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{cosec} h^3\frac{\theta}{\sqrt{2}}\cdot\cot h\frac{\theta}{\sqrt{2}}$

$= -\operatorname{Sec} h^2\frac{\theta}{\sqrt{2}}\cdot\tan h\frac{\theta}{\sqrt{2}}$ அல்லது $\cos ec\, h^2\frac{\theta}{\sqrt{2}}$

$\cot h\frac{\theta}{\sqrt{2}}$

$= -au\operatorname{Sech}^2\frac{\theta}{\sqrt{2}}$ அல்லது $au\operatorname{cosec} h^2\frac{\theta}{\sqrt{2}}$

$\therefore \frac{d^2n}{d\theta^2} = -u\operatorname{Sech}^2\frac{\theta}{\sqrt{2}}$ அல்லது $u\cos ec\, h^2\frac{\theta}{\sqrt{2}}$

$\therefore \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = u - u\operatorname{Sech}^2\frac{\theta}{\sqrt{2}}$ அல்லது $u + u\cos ec\, h^2\frac{\theta}{\sqrt{2}}$

அதாவது, $\frac{P}{h^2u^2} = u\left(1 - \operatorname{sech}_s\frac{\theta}{\sqrt{2}}\right)$

அல்லது $u\left(1 + \cos ec\, h^2\frac{\theta}{\sqrt{2}}\right)$

$= u\tan h^2\frac{\theta}{\sqrt{2}}$ அல்லது $u\cot h\frac{\theta}{\sqrt{2}}$

$= u\,(a^2u^2)$ அல்லது $u\,(a^2u^2)$

$$= a^2 u^3 \text{ (அ வகைகளிலும்)}$$

$$\therefore P = h^2 a^2 u^5$$

$$= h^2 a^2 \cdot \frac{2^2}{r^5}$$

$$\propto \frac{1}{r^5}$$

அதாவது, விசையானது முனையிலிருந்து துகளின் தூரத்தின் ஐந்தாவது அடுக்குடன் எதிர்மாறு விகிதத்திலுள்ளது.

மாதிரி 174 ஒரு அலகு பொருண்மையுடைய ஒரு துகள் α கோணமுடைய ஒரு சம கோணச் சுருளி (equiangular Spiral) மீது அதன் முனையுடன் துகளின் நிலையைச் சேர்க்கும் நேர் கோட்டிற்குச் செங்குத் திசையிலேயே எப்போதும் செயல்படு கின்ற ஒரு விசையின் கீழ் நகருகிறது. அவ்விசை $\mu r^{2\sec^3\alpha - 3}$ என்றும், முனையைச் சுற்றி வரையப்படுகின்ற ஆரைச்சிறைப் பரப்பளவு வீதம் $\frac{1}{2}\sqrt{(\mu \sin\alpha \cos\alpha)}\, r^{\sec^2\alpha}$ என்றும் காட்டுக.

தீர்வு: விசையானது ஆரைத் திசையிக்குச் செங்குத்துத் திசையிலேயே செயல்படுவதால் ஆரை முடுக்கம் பூச்சியமாகும்.

$$\therefore \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = O \quad \ldots \quad (1)$$

சமகோணச் சுருளியின் சமன்பாடு $r = ae^{\theta\cot\alpha}$

$$\therefore \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

$$= a\cot\alpha \cdot e^{\theta\cot\alpha} \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

$$= \cot\alpha \cdot \frac{d\theta}{dt} \quad \ldots \quad (2)$$

(1) இலிருந்து, $\frac{d^2r}{dt^2} = r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$

$$= r \cdot \frac{1}{r^2\cot^2\alpha} \cdot \left(\frac{dr}{dt}\right)^2$$

$$= \frac{\tan^2 \alpha}{r} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2$$

$$\therefore \quad \frac{\frac{dr}{dt^2}}{\left(\frac{dr}{dt} \right)} = \frac{\tan^2 \alpha}{r} \cdot \frac{dr}{dt}.$$

தொகையீடு காண்க. $\log \frac{\left(\frac{dr}{dt} \right)}{A} = \tan^2 \alpha \log r$, A என்பது தொகையீட்டு மாறிலி.

$$= \log r^{\tan^2 \alpha}$$

$$\therefore \quad \frac{dr}{dt} = Ar^{\tan^2 \alpha} \qquad \ldots \quad (3)$$

மேலும், (2)-இலிருந்து, $\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r} \tan \alpha \frac{dr}{dt}$

$$= \frac{1}{r} \tan \alpha . \, Ar^{\tan^2 \alpha}$$

$$\therefore \quad r^2 \frac{d\theta}{dt} = Ar \tan \alpha \, . \, r^{\tan^2 \alpha}$$

$$= A \tan \alpha \, . \, r^{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$= A \tan \alpha \, . \, r^{\sec^2 \alpha} \qquad \ldots \quad (4)$$

இப்போது, ஓர் அலகுப் பொருண்மையின்மீது ஆரைத் திசையிக்குச் செங்குத்துத் திசையில் செயல்படுகின்ற விசை P எனில், குறுக்கு முடுக்கமும் P ஆகும்.

$$\therefore \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = P.$$

அதாவது, $\frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(A \tan \alpha^{\sec^2 \alpha} \right) = P.$

அதாவது, $P = \frac{1}{r} \left[A \tan \alpha \, . \, \sec^2 \alpha \, . \, r^{\sec^2 \alpha - 1} \frac{dr}{dt} \right]$

$$= A \tan \alpha \cdot \sec^2 \alpha \cdot r^{\sec^2 \alpha - 2} \cdot A\, r \tan^2 \alpha,$$ (3) இலிருந்து

$$= A^2 \tan \alpha \cdot \sec^2 \alpha \cdot r^{\sec^2 \alpha - 2 + \tan^2 \alpha}$$

$$= A^2 \tan \alpha \cdot \sec^2 \alpha \cdot r^{2\sec^2 \alpha - 3}$$

$A^2 \tan \alpha \sec^2 \alpha = \mu$ அல்லது, $A = \sqrt{(\mu \cot \alpha \cos^2 \alpha)}$ என்று கொண்டால்,

$$P = \mu\, r^{2\sec^2 \alpha - 3}$$ (முதற் பகுதியின் நிறுவல்)

இப்போது, ஆரைத் திசையியினுல் வரையப்படும் ஆரைச் சிறைப் பரப்பளவு வீதம்

$$= \tfrac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

$$= \tfrac{1}{2} A \tan \alpha\, r^{\sec^2 \alpha},$$ (4) இலிருந்து,

$$= \tfrac{1}{2} \sqrt{(\mu \cot \alpha \cos^2 \alpha)} \cdot \tan \alpha \cdot r^{\sec^2 \alpha}$$

$$= \tfrac{1}{2} \sqrt{(\mu \cot \alpha \cdot \cos^2 \alpha \cdot \tan^2 \alpha)} \cdot r^{\sec^2 \alpha}$$

$$= \tfrac{1}{2} \sqrt{(\mu \sin \alpha \cos \alpha)}\; r^{\sec^2 \alpha}$$

கவியம் (Apse)

விசை மையத்திலிருந்து மைய விசைப் பாதையிலுள்ள ஒரு புள்ளிக்கு வரையப்படும் ஆரைத் திசையி மீப்பெரு அல்லது மீச்சிறு மதிப்பைக் கொண்டிருக்குமெனில் அப்புள்ளியானது அம் மைய விசைப் பாதையின் கவியம் எனப்படும். ஒரு கவியத்தில் வரையப்படுகின்ற ஆரைத் திசையியின் நீளம் கவியத்தூரம் (apsidal distance) எனப்படும்.

$u = \dfrac{1}{r}$ ஆகையால், ஆரைத் திசையி r மீப்பெரிதாகவோ அல்லது மீச்சிறிதாகவோ யிருக்கும்போது u ஆனது மீச்சிறிதாகவோ அல்லது மீப்பெரிதாகவோயிருக்கும். இதற்குரிய நிபந்தனை $\dfrac{du}{d\theta} = O$ ஆகும்.

ஆனல் $\dfrac{1}{p^2} = u^2 + \left(\dfrac{du}{d\theta}\right)^2$ என்று நாமறிவோம்.

u-இன் மீப்பெரு அல்லது மீச்சிறு மதிப்புக்கு $\frac{du}{d\theta} = O$ ஆகையால்,

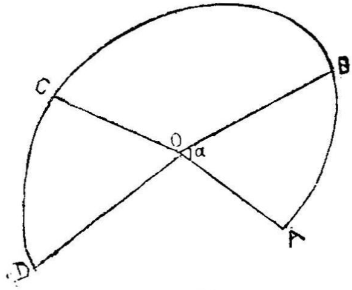
$$\frac{1}{p^2} = u^2 = \frac{1}{r^2}$$

அல்லது $p = r$.

ஆகவே, ஒரு கவியத்தில் ஆரைத் திசையியானது தொடு கோட்டிற்குச் செங்குத்தாக யிருக்குமென்றந்து கொள்ளலாம். அதாவது, ஒரு கவியத்தில் துகளானது ஆரைத் திசையிக்குச் செங்குத்துத் திசையில் நகரும்.

கவியக் கோட்டின் பண்பியல்புகள் :

O-ஐ விசை மையமாகக் கொண்ட மைய விசைப் பாதையில் B என்பது ஒரு கவியம் என்று கொள்க. A, C என்பது B-க்கு இருபுற முமுள்ள மற்றுமிரு கவியங் கள்.



படம் 124

துகளின் மைய முடுக்கம் O-விலிருந்து அதன் தூரத்தை மட்டுமே சார்ந் துள்ளதெனக் கொள்க. எனவே, அதன் திசை வேகமும் விசை மையத்திலிருந்து அதன் தூரத்தை மட்டுமே சார்ந்திருக்குமல்லாது அதன் திசையுடன் சார்பற்றதாக யிருக்கும்.

$$\text{இப்பொழுது } \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{P}{h^2 u^2}$$

என்ற சமன்பாட்டை $\frac{d^2u}{d\theta^2} = f(u)$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன் பாடாகக் கருதலாம். தொடக்கத்தில் துகள் B-யிலிருக்கும் போது அதன் கவியத்தூரம் மீப்பெரிதாக அல்லது மீச்சிறிதாக யிருக்குமாகையால் $\frac{du}{d\theta} = O$ ஆகும். அந்த மீப்பெரு அல்லது மீச்சிறு கவியத்தூரம் u_0 எனில்,

தொடக்கநிலை மதிப்புக்கள் $u = u_0$, $\theta = 0$, $\frac{du}{d\theta} = 0$ ஆகும்.

இத் தொடக்கநிலை மதிப்புக்களுக்கிணங்க மேற்கண்ட வகைக்கெழுச் சமன்பாடு ஒற்றைத் தீர்வுடையதாகயிருக்கு மென்பதைக் காணலாம். மேலும், θ-ஐ $-\theta$ என்று மாற்றுவதால் தொடக்கநிலை நிபந்தனைகளோ அல்லது வகைக்கெழுச் சமன் பாட்டின் அமைப்போ மாறுதாகையால் அவ்வகைக் கெழுச் சமன்சபாட்டின் தனித்தீர்வாகிய $u = F(\theta)$ என்ற வளைவுப் பாதை தொடக்கநிலை நிபந்தனைகளை நிறைவேற்றிய நிலையில் தொடக்கக் கோட்டைப் பொறுத்துச் சமச்சீருடனிருக்கும். ஆகவே, ஒரு மையவிசைப் பாதையானது விசை மையத்தி லிருந்து ஒரு கவியத்திற்கு வரையப்படும் நேர்கோட்டின் இரு புறமும் சமச்சீருடனிருக்கும்.

இப்பொழுது AB என்ற இரு கவியங்களுக்கிடையேயுள்ள விசைப் பாதைப் பகுதிமட்டும் தரப்பட்டுள்ளதாகக் கொள் வோம். மைய விசைப் பாதையானது OB-யைப் பொறுத்துச் சமச்சீருடனிருக்குமாகையால், பகுதி AB-யை CB-யின் மேல் மடித்து, விசைப் பாதையின் BC என்ற பகுதியை C-யில் ஒரு கவியத்துடன் பெறலாம். OC என்னும் கவியத்தூரம் OA என்னும் கவியத் தூரத்திற்குச் சமமாகும். இதுபோல் விசைப் பாதைப் பகுதி BC-யை OC-யின்மீது மடித்து மற்றுமொரு பகுதி OD-யை D-யில் ஒரு கவியத்துடன் பெறலாம். இங்கு கவியத் தூரம் CDஆனது கவியத்தூரம் OBக்குச் சமமாகும்.

ஆகவே, கவியங்கள் பற்றிய பின்வரும் உண்மைகள் தெளிவாகின்றன.

(i) எந்த ஒரு மைய விசைப் பாதையும் இரு வெவ்வேறு நீளங்களுடைய கவியத் தூரங்களையே பெற்றிருக்கும். இவ்விரு கவியத் தூரங்களையும் ஆரைகளாகக் கொண்டு வரையப்படும் இரு ஒரு மைய வட்டங்களைத் தொட்டவாறு மைய விசைப் பாதை அமைந்திருக்கும்

(ii) இரு அடுத்தடுத்த கவியங்களுக்கிடையேயுள்ள பாதை மட்டும் தெரிந்தால், கவியக் கோடுகளின்மீது மடித்து பாதையின் எஞ்சிய பகுதிகளை வரைந்து கொள்ளலாம்.

(iii) இரு அடுத்தடுத்த கவியங்களுக்கிடையேயுள்ள விற் பகுதி விசை மையத்தில் தாங்கும் கோணம் ஒரு மாறிலியாகும். இது கவியக்கோணம் (apsidal angle) என்றழைக்கப்படுகிறது.

குறிப்பு: சிலவகை மையவிசைப் பாதைகளில் முதலாவது சிறப்பியல்பு மீறப்பட்டிருக்கலாம். கவியத்தின் மீச்சிறு தூரம் பூச்சியமாகவோ அல்லது மீப்பெருதூரம் கந்தழியாகவோ இருக்கலாம். அதாவது, உள்வட்ட ஆரை பூச்சியமாகவோ அல்லது வெளிவட்ட ஆரை கந்தழியாகவோ இருக்கலாம். இவ்வகை மைய விசைப்பாதைகளை விதிவிலக்குகளாகக் கொள்ள வேண்டும்.

மாதிரி 165. ஒரு துகள் $\frac{\mu}{(\text{தூரம்})^5}$ எனும் மைய முடுக்கத்துடன் நகருகிறது. அது கந்தழியிலிருந்து விழுந்தால் என்ன திசை வேகத்தைப் பெறுமோ அதைப்போல் n மடங்குத் திசை வேகத்துடன் a தூரத்திலுள்ள ஒரு கவியத்திலிருந்து எறியப்படுகிறது. பாதையின் அடுத்த கவியத்தூரம் $\frac{a}{\sqrt{n^2-1}}$ என்று நிறுவுக.

$n = 1$ என்றும், துகளானது எந்தத் திசையிலும் எறியப்படுவதாவும் கொண்டால் மைய விசைப் பாதையானது விசை மையத்தின் வழியே செல்லும் ஒரு வட்டம் என்று காட்டுக.

தீர்வு: t நேரத்தில் விசை மையத்திலிருந்து துகளின் தூரம் x எனில், மையமுடுக்கம் $\frac{\mu}{x^5}$ ஆகும். (μ என்பது மாறிலி).

$$\therefore \frac{dv}{dt} = -\frac{\mu}{x_5}$$

ஆனல், $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot v$ ஆகையால்

$$v\frac{dv}{dx} = -\frac{x}{x^5}.$$

அதாவது, $v\,dv = -\frac{\mu}{x^5}\,dx$

$x =$ கந்தழி (∞) யிலிருந்து $x = a$ வரை துகள் விழும்போது பெறக்கூடிய திசைவேகம் v எனில்,

$$\int v\,dv = -\mu \cdot \int_{\infty}^{a} \frac{dx}{x^5}$$

அதாவது, $\frac{v^2}{2} = -\mu . \left[\frac{-1}{4x^4}\right]_\infty^a = \frac{\mu}{4a^4}.$

$$\therefore \quad v^2 = \frac{\mu}{2a^4}$$

அல்லது, $v = \sqrt{\frac{\mu}{2a^4}}.$

ஆகவே, எறிவேகம் $= nv = n\sqrt{\frac{\mu}{2a^4}}.$

பாதையின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{P}{h^2u^2}$$

ஆனல். $P = \frac{\mu}{x^5} = \mu u^5$ ஆகையால்,

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu u^5}{h^2u^2} = \frac{\mu u^3}{h^2}.$$

$$\therefore \quad h^2\left[\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right] = \mu u^3.$$

இரு புறமும் $2\frac{du}{d\theta}$ ஆல் பெருக்கித் தொகையீடு காண்க.

$$h^2\left[2\frac{du}{d\theta} \cdot \frac{d^2u}{d\theta^2} + 2u\frac{du}{d\theta}\right] = 2\mu \cdot u^3 . \frac{du}{d\theta}.$$

தொகையீடு காணின், $h^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right] = 2\mu\frac{u^4}{4} + C.$

ஆனல் $v^2 = h^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right]$ என்று அறிவோம்.

$$\therefore \quad v^2 = h^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right] = \frac{\mu u^4}{2} + C \quad \ldots \quad (1)$$

தொடக்கத்தில் $r = a$ ஆகையால், $u = \frac{1}{a}$; கவியத்திலிருந்து எறியப்படுவதால் $\frac{du}{d\theta} = O.$; $v = n\sqrt{\frac{\mu}{2a^4}}.$ இம்மதிப்புக்களைப் பிரதியிடுக.

$$\frac{n^2 \mu}{2a^4} = h^2 \left[O + \frac{1}{a^2} \right] = \frac{\mu}{2a^4} + C.$$

அதாவது, $\frac{n^2\mu}{2a^4} \ldots \frac{h^2}{a^2} = \frac{\mu}{2a^4} + C.$

$$\therefore \quad h^2 = \frac{n^2\mu}{2a^2};$$

$$C = \frac{n^2\mu}{2a^4} - \frac{\mu}{2a^4} = \frac{\mu}{2a^4}(n^2 - 1)$$

$\therefore$ சமன்பாடு (1) இலிருந்து,

$$\frac{n^2x}{2a^2}\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 \right] = \frac{\mu u^4}{2} + \frac{\mu}{2a_7}(n^2 - 1)$$

$$\therefore \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = \frac{2a'}{n^2\mu}\left[\frac{\mu u^4}{2} + \frac{\mu}{2a^4}(m^2 - 1) \right]$$

$$= \frac{a^2}{n^2}\left[u^4 + \frac{1}{a^4}(n^2 - 1) \right]$$

$$= \frac{1}{a^2 n^2}\left[a^4 u^4 + (n^2 - 1) \right]$$

$$\therefore \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \frac{1}{a^2 n^2}\left[a^4 u^4 - a^2 n^2 u^2 + (n^2 - 1) \right] \qquad \ldots (2)$$

துகள் ஒரு கவியத்திலிருக்கும் போது $\frac{du}{d\theta} = O$ ஆகையால்,

$$a^4 n^4 - a^2 n^2 u^2 + (n^2 - 1) = O.$$

$u = \frac{1}{r}$ என்று பிரதியிடவும்.

$$(n^2 - 1)\, r^4 - a^2 n^2 {}^2r + a^4 = O$$

r_1^2, r_2^2 என்பன இவ்விருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்களெனில்,

$$r_1^2 r_2^2 = \frac{a^4}{n^2 - 1}$$

r_1, r_2 என்பன பாதையின் இரு கவியதூரங்களாகும். ஒரு கவியதூரம் a என்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளதால், $r_1 = a$ என்று பிரதியிட,

$$a^2 . r_2^2 = \frac{a^4}{n^2 - 1}$$

அல்லது, $r_2^2 \times \frac{a^2}{n^2 - 1}$

அல்லது, $r^2 = \frac{a}{\sqrt{n^2 - 1}}$ என்று அடுத்த கவியத் தூரத்தைப் பெறலாம்.

மேலும், $n = 1$ எனில், சமன்பாடு (2) இலிருந்து,

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \frac{1}{a^2}\left[a^4 u^4 - a^2 u^2\right]$$

என்று காணலாம். அதாவது, $\frac{du}{d\theta} = \sqrt{a^2 u^4 - u^2}$

$$= u\sqrt{a^2 u^2 - 1}$$

$$\therefore \quad \frac{du}{u\sqrt{a^2u^2 - 1}} = d\theta.$$

தொகையீடு காணின், $\sec^{-1} au = \theta + k$, k என்பது மாறிலி.

தொடக்கத்தில், $u = \frac{1}{a}$, $\theta = O \quad \therefore \quad k = O$.

$$\therefore \quad \sec^{-1} au = \theta$$

$$au = \sec\theta$$

$$\frac{a}{r} = \frac{1}{\cos\theta}$$

அல்லது, $r = a\cos\theta$.

இது முனைப்புள்ளி வழியே செல்லும் ஒரு வட்டத்தின் சமன்பாடு ஆகும்.

மாதிரி 176. முனையிலிருந்து துகளின் தூரத்தினுடைய மூன்றடுக்கின் தலைகீழ் விகிதத்திற்கேற்ப மாறுபடுகின்ற மைய முடுக்கத்துடன் ஒரு துகள் நகருகிறது. முனையிலிருந்து a தூரத்திலுள்ள கவியத்திலிருந்து, a ஆரையுள்ள ஒரு வட்டத்தின்மீது சுற்றுவதற்குத் தேவையான வேகத்தைப்போல் $\sqrt{2}$ மடங்கு வேகத்துடன் அது எறியப்பட்டால், பாதையின் சமன்பாடு

$r\cos\left(\frac{\theta}{\sqrt{2}}\right) = a$ என்று காட்டுக.

தீர்வு : முனையிலிருந்து x தூரத்தில் முடுக்கம் $= \dfrac{\mu}{x^3}$

ஆகவே, a ஆரையுள்ள வட்டத்தின் மேலுள்ள நிலையில் முடுக்கம் $= \dfrac{\mu}{a^3}$.

ஆகவே, $\dfrac{\mu}{a^3}$ முடுக்கத்துடன் வட்டத்தின்மேல் நகரும் துகளின்வேகம் V_1 எனில், வட்ட மையத்தை நோக்கி செங்கோட்டு முடுக்கம் $\dfrac{V_1^2}{a}$ ஆகும்.

$$\therefore \ \frac{V_1^2}{a} = \frac{\mu}{a^3}$$

அல்லது, $V_1^2 = \dfrac{\mu}{a^2}$

அல்லது, $V_1 = \sqrt{\mu}/a$.

எறிவேகம் V எனில், $V = \sqrt{2}\ V_1 = \sqrt{2}\dfrac{\sqrt{\mu}}{a} = \dfrac{\sqrt{\iota}}{a}$

r தூரத்தில் துகளின் முடுக்கம் $P = \mu/r^3 = \mu u^3$.

பாதையின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு :

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{P}{h^2 u^2}$$

$$= \frac{\mu u^3}{h^2 u^2}$$

$$= \frac{\mu u}{h^2}$$

$2\ \dfrac{du}{d\theta}$ ஆல் பெருக்கித் தொகையீடு காண்க.

$$\left(\frac{d^2u}{d\theta}\right)^2 + u^2 = \frac{\mu}{k^2} \cdot u^2 + \text{மாறிலி.}$$

அல்லது, $h^2 \left[\left(\dfrac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 \right] = \mu u^2 + C.$

அதாவது, $v^9 = h^2 \left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 \right] = \mu u^2 + C \qquad \ldots \qquad (1)$

தொடக்கத்தில், $u = \frac{1}{a}$, $\frac{du}{d\theta} = O$ (கவியத்தில்), $v = V$

$$= \frac{\sqrt{2\mu}}{a}$$

$$\therefore \quad \frac{2\mu}{a^2} = h^2 \left[O + \frac{1}{a^2}\right] = \frac{\mu}{a^2} + C.$$

அதாவது, $\frac{2\mu}{a^2} = \frac{h^2}{a^2} = \frac{\mu}{a^2} + C.$

$$\therefore \quad \mu^2 = 2\mu, \quad C = \frac{2\mu}{a^2} - \frac{\mu}{a^2} = \frac{\mu}{a^2}$$

$\therefore$ (1)-இலிருந்து, $2\mu \left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 \right] = \mu u^2 + \frac{\mu}{a^2}$

அல்லது, $\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = \frac{1}{2} \left(u^2 + \frac{1}{a^2}\right)$

$$\therefore \quad \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2} - u^2\right)$$

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{a^2} - u^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\,a} \sqrt{1 - a^8 u^2}$$

$$\therefore \quad \frac{a\,du}{\sqrt{1-a^2 u^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,d\theta.$$

தொகையீடு காண்க. $\sin^{-1} au = \frac{\theta}{\sqrt{2}} + D$, D என்பது மாறிலி.

தொடக்கத்தில் $u = \frac{1}{a}$, $\theta = O$.

$$\therefore \quad \pi = O + D$$

$$\therefore \quad \sin^{-1} au = \frac{\theta}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \quad au = \sin\left(\frac{\theta}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\theta}{2}$$

அல்லது, $a = r\cos\dfrac{\theta}{\sqrt{2}}$ என்பது பாதையின் சமன்பாடு

மாதிரி 177. முனையை நோக்கி $\mu\dfrac{r+2a}{r^5}$ முடுக்கத்தை யுண்டு பண்ணக்கூடிய மையவிசைக்குட்பட்ட ஒரு துகள் (a, O) என்னும் புள்ளியிலிருந்து கந்தழியிலிருந்து புள்ளி வரையுள்ள வேகத்துடன், தொடக்கக் கோட்டுடன் $\cot^{-1} 2$ கோணத்தில் எறியப்படுகிறது. பாதையின் சமன்பாடு $r = a(1 + 2\sin\theta)$ என்று காட்டுக. கவியக் கோணத்தையும் தூரங்களையும் காண்க. (சென்னை எம். எஸ்ஸி. 1968)

தீர்வு : t நேரத்தில் முனையிலிருந்து துகளின் தூரம் x எனில், மைய முடுக்கம் $\mu\left(\dfrac{x+2a}{x^5}\right)$ ஆகும்.

$$\therefore \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\mu\left(\frac{x+2a}{x^5}\right)$$

அதாவது, $$v\frac{dv}{dx} = -\mu\left(\frac{1}{x^4} + \frac{2a}{x^5}\right)$$

அல்லது, $$v\,dv = -\mu\left(\frac{1}{x^4} + \frac{2a}{x^5}\right)dx.$$

$x = \infty$ இலிருந்து $x = a$ வரை தொகையீடு செய்க.

$$\frac{v^2}{2} = -\mu.\int_{\infty}^{O}\left(\frac{1}{x^4} + \frac{2a}{x^5}\right)dx$$

$$= -\mu.\left[-\frac{1}{3x^3} - \frac{2a}{4x^4}\right]_{\infty}^{O}$$

$$\mu\left[\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{2a^4}\right]_{\infty}^{O}$$

$$= \mu\left[\frac{1}{3a^3} + \frac{1}{2a^3}\right]$$

$$= \frac{5\mu}{6a^6}$$

$$\therefore \quad v^2 = \frac{5\mu}{3a^8}$$

மைய முடுக்கம் $P = \mu\left(\frac{r + 2a}{r^5}\right) = \mu\left(\frac{1}{r^4} + \frac{2a}{r^5}\right)$

$$= \mu\,(u^4 + 2a\,u^5)$$

$\therefore$ பாதையின் வகைக் கெழுச் சமன்பாடு :

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{P}{h^2\,u^2}$$

$$= \frac{\mu\,(u^4 + 2a\,u^5)}{h^2\,u^2}$$

$$= \frac{\mu}{h^2}\,(u^2 + 2au^3)$$

$2\left(\frac{du}{d\theta}\right)$ ஆல் பெருக்கித் தொகையீடு செய்யவும்.

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = \frac{2\mu}{h^2}\left(\frac{u^3}{3} + \frac{2a\,u^4}{4}\right) + C$$

$$= \frac{2\mu}{h^2}\left(\frac{u^3}{3} + \frac{au^4}{2}\right) + C.$$

$$\therefore \quad v^2 = h^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right] = 2\mu\left(\frac{u^3}{3} + \frac{au^4}{2}\right) + C. \quad \ldots \quad (1)$$

இப்பொழுது, எறிதிசைக்கும், தொடக்கக் கோட்டிற்குமிடையே யுள்ள கோணம் α எனில்

$\cot\alpha = 2$ என்று தரப்பட்டுள்ளது. $\therefore \sin\alpha = 1/\sqrt{5}.$

முனையிலிருந்து தொடக்கத்திசை வேகத்தின் திசைக்கு வரையப்படும் செங்குத்து P_0 எனில், $P_0 = a\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{5}}$;

(a என்பது தொடக்க ஆரைத் திசையி)

இப்பொழுது, $\frac{1}{P_0^2} = \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2$ என்னும் சமன்பாட்டிலிருந்து,

$$\frac{5}{a^2} = \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2.$$

$$\therefore v^2 = h^2. \left[\frac{5}{a^2}\right] = \frac{5h^2}{a^2}.$$

ஆனல் தொடக்கத் திசைவேகம் v எனில் $v^2 = \frac{5\mu}{3a^3}$

ஆகையால்,

$$\frac{5h^2}{a^2} = 5\ \frac{\mu}{3a^3}$$

அல்லது, $h^2 = \frac{\mu}{3a.}$

$\therefore$ சமன்பாடு (1) இலிருந்து,

$$v^2 = \frac{\mu}{3a}\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right] = 2\mu\left(\frac{n^3}{3} + \frac{au^4}{2}\right) + C.$$

தொடக்கத்தில், $u = \frac{1}{a},\ v^2 = \frac{5\mu}{3a^3}$

$$\therefore \frac{5\mu}{3a^3} = \frac{\mu}{3a}\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right] - 2\mu\left(\frac{1}{3a^3} + \frac{1}{2a^3}\right) + C$$

அதாவது, $\frac{5\mu}{3a^3} = 2\mu\left(\frac{5\mu}{6a^3}\right) + C = \frac{5\mu}{3a^3} + C \therefore C = O.$

$$\therefore \frac{\mu}{3a}\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^{\circ}\right] = 2\mu\left(\frac{n^3}{3} + \frac{au^4}{2}\right)$$

$$= 2\mu\left(\frac{2u^3 + 3an^4}{6}\right)$$

$$= \frac{\mu u^3 (2 + 3au)}{3}$$

$$\therefore \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = au^3 (2 + 3au)$$

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = au^3 (2 + 3au) - u^2$$

$$= v^2 (2au + 3a^2 u^2 - 1)$$

$$= v^2 (au + 1)(3au - 1)$$

ஆனல் $v = \frac{1}{r}$ ஆகையால், $\frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{dr}{d\theta}. \therefore \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2$

$$= \frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2$$

$$\therefore \frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{1}{r^2}\left(\frac{a}{r}+1\right)\left(\frac{3a}{r}-1\right)$$

$$= \frac{1}{r^4}(a+r)(3a-r)$$

$$\therefore \frac{dr}{d\theta} = \sqrt{(a+r)(3a-r)}$$

அல்லது, $d\theta = \frac{dr}{\sqrt{(a+a)(3a-r)}}$

தொகையிடுகாணின், $\theta = \int \frac{dr}{\sqrt{(a+r)(3a-r)}}$ + மாறிலி.

இப்பொழுது, $r = a + y$ என்று பிரதியிடுக. $\therefore dr = dy$.
$a + r = 2a + y$, $3a - r = 2a - y$.

$$\therefore \quad \theta = \int \frac{dy}{\sqrt{(2a+y)(2a-y)}} + \text{மாறிலி}$$

$$= \int \frac{dy}{\sqrt{4a^2-y^2}} + \text{மாறிலி}$$

$$= \text{Sin}^{-1}\left(\frac{y}{2a}\right) + \gamma$$, γ என்பது மாறிலி.

$$\therefore \quad \theta - \gamma = \text{Sin}^{-1}\left(\frac{y}{2a}\right)$$

$$\frac{y}{2a} = \text{Sin}(\theta - \gamma)$$

அல்லது, $\frac{r-a}{2a} = \text{Sin}(\theta-\gamma)$

தொடக்கக் கோட்டிலிருந்து θ அளவிடப்பட்டால், தொடக்கத்தில் $\theta = O$, $r = a$.

$$\therefore \quad \gamma = O.$$

$$\therefore \frac{r-a}{2a} = \sin\theta$$

$$r - a = 2a\sin\theta$$

$$r = a + 2a\sin\theta$$

அதாவது, $r = a(1 + 2\sin\theta)$ (பாதையின் சமன்பாடு)

இச்சமன்பாட்டிலிருந்து, $\frac{dr}{d\theta} = 2a\cos\theta$.

ஒரு கவியத்தில் $\frac{dr}{d\theta} = O$ ஆகையால் $\cos\theta = O$ ஆகும்.

$\therefore \ \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \ldots$ ஆகிய புள்ளிகளில் கவியங்களுள்ளன. ஆகவே, கவியக்கோணம் π ஆகும்.

கவியத்தூரங்கள் முறையே. $r_1 = a\left(1 + 2\sin\frac{\pi}{2}\right) = 3a$,

$$r_2 = a\left(1 + 2\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -a$$

$$= a \text{ (அளவில் மட்டும்)}$$

அதாவது a, $3a$ என்பன கவியத் தூரங்களாகும்.

மாதிரி 178. முனைப்புள்ளியிலிருந்து a தூரத்தில் $\sqrt{\mu}/a$ திசைவேகத்துடன் தொடக்கத் தூரத்திற்குச் செங்குத்துத் திசையில் ஓர் அலகுப் பொருண்மையின்மீது $\mu\,[2(a^2+b^2)u^5 - 3a^2b^2u^7]$க்குச் சமமான மைய விசையின்கீழ் எறியப்படுகின்ற எறிபொருளின் பாதையைக் காண்க.

தீர்வு: முனைப்புள்ளியிலிருந்து a தூரத்தில் செங்குத்துத் திசையில் பொருள் எறியப்படுவதால், முனைப்புள்ளியிலிருந்து தொடக்கத் திசைக்குச் செங்குத்துத் தூரம் a ஆகும்.

ஆகவே, $\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = \frac{1}{p^2}$ என்னும் சூத்திரத்திலிருந்து,

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = \frac{1}{a^2}$$

தொடக்கவேகம் $v = \sqrt{\mu}/a$.

$$\therefore \quad v^2 = h^2 \left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 \right]$$

என்னும் சூத்திரத்திலிருந்து,

$$\frac{\mu}{a^2} = h^2 \left[\frac{1}{a^2}\right]$$

அல்லது, $h^2 = \mu$.

வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டிலிருந்து,

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{P}{h^2 u^2} = \frac{\mu \left[2 (a^2+b^2) u^5 - 3a^2b^2 u^7\right]}{\mu \cdot u^2}$$

$$= 2 (a^2 + b^2) u^3 - 3 a^2 b^2 u^5$$

இருபக்கமும் 2 $\frac{du}{d\theta}$-ஆல் பெருக்கித் தொகையீடு காண்க.

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = 2 \left[2 (a^2 + b^2) \frac{u^4}{4} - 3a^2b^2 \frac{u^6}{6}\right] + C$$

$$= (a^2 + b^2)u^4 - a^2b^2 u^6 + C$$

$$= u^2 \left[(a^2 b^2) u^2 - a^2b^2 u^4\right] + C$$

தொடக்கத்தில், $u = \frac{1}{a}$, $\frac{du}{d\theta} = O \quad \therefore \quad C = O$

$$\therefore \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = u^2 \left[(a^2 + b^2) u^2 - a^2 b^2 u^4 - 1\right]$$

$$= u^2 (a^2u^2 - 1) (1 - b^2 u^2)$$

ஆனால் $u = \frac{1}{r}$ ஆகையால், $\frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{dr}{d\theta}$.

$$\therefore \left(-\frac{1}{r^2} \cdot \frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{1}{r^2} \left(\frac{a^2}{r^2} - 1\right) \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right)$$

$$\frac{1}{r^4} \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{1}{r^6} (a^2 - r^2) (^2r - b^2$$

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{1}{r^2} (a^2 - r^2) (r^2 - b^2)$$

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\sqrt{(a^2 - r^2) (r^2 - b^2)}}{r}$$

$$\therefore \quad d\theta = \frac{r\,dr}{\sqrt{(a^2-r^2)(r^2-b^2)}}$$

தொகையீடு காணின், $\theta = \int \frac{r\,dr}{\sqrt{(a^2-r^2)(r^2-b^2)}}$ + மாறிலி

இப்பொழுது, $r^2 = Z^2 + b^2$ என்று பிரதியிடவும்.

$$\therefore \quad r\,dr = Z\,dZ$$

$$a^2 - r^2 = a^2 - Z^2 - b^2 = (a^2 - b^2) - Z^2$$

$$\therefore \quad \theta = \int \frac{Z\,dZ}{\sqrt{(a^2-b^2) - Z^2}}$$

$$= \cos^{-1} \frac{Z}{\sqrt{a^2 - b^2}} + \propto,$$ $\propto$ என்பது மாறிலி.

அல்லது, $\cos(\theta - \propto) = \frac{Z}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{\sqrt{r^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 - b^2}}$

தொடக்கத்தில், $r = a, \quad \theta = O$

$\therefore \quad \cos \propto = 1$ அல்லது, $\propto = O$.

$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{\sqrt{r^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

அல்லது, $r^2 - b^2 = (a^2 - b^2)\cos^2\theta$

$$r^2 = a^2\cos^2\theta + b^2 - b^2\cos^2\theta$$

$$= a^2\cos^2\theta + b^2(1 - \cos^2\theta)$$

$$= a^2\cos^2\theta + b^2\,\text{Sin}^2\theta.$$

இதுவே எறிபொருளின் இயக்கப் பாதைச் சமன்பாடாகும்.

மாதிரி 179. ஒரு துகள் $au^2 + bu^3$ எனும் மைய முடுக்கத்துடன் நகருகிறது. முனைவிலிருந்து, R தூரத்தில் அதன் எறிவேகம் V ஆகும். $V^2 > \frac{2a}{R} + \frac{b}{R^2}$ எனில், துகள் கந்தழித் தூரம்வரை போகுமென்று நிறுவுக.

தீர்வு : வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டிலிருந்து,

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{P}{h^2 u^2},$$

$$= \frac{au^2 + bu^3}{h^2 u^2}$$

$$= \frac{a + bu}{h^2}$$

இருபக்கமும் $2 \dfrac{du}{d\theta}$ ஆல் பெருக்கித் தொகையீடு காண்க.

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = \frac{2}{h^2}\left(au + \frac{bu^2}{2}\right) + \text{மாறிலி.}$$

$$\therefore \quad v^2 = h^2 \left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right] = 2\left(au + \frac{bu^2}{2}\right) + A, \; A$$

என்பது மாறிலி.

தொடக்கத்தில் $u = \dfrac{1}{R}, \; \dfrac{du}{d\theta} = O, \; v = V.$

$$\therefore \quad V^2 = 2\left(\frac{a}{R} + \frac{2}{R}\right) + A.$$

துகள் கந்தழித் தூரத்திற்குச் செல்ல வேண்டுமாயின் அதன் திசைவேகம் V-ஆனது $R = \infty$ ஆகும்போது பூச்சியமாகவோ அல்லது எதிரடையாள மதிப்புடனே இருக்கக் கூடாது.

$$\therefore \quad V^2 > 2\left(\frac{a}{R} + \frac{b}{2R^2}\right) + A$$

அல்லது, $V^2 > \dfrac{2a}{R} + \dfrac{b}{R^2}$

பயிற்சி 18

1. முனைவுப் புள்ளியை நோக்கிய P எனும் விசையின் கீழ் ஒரு துகள் $r^n = a^n \cos n\theta$ எனும் வளைவரையில் நகருகிறது. விசை விதியைக் காண்க.

2. முனைவை நோக்கிய P எனும் விசையின் கீழ் ஒரு துகள் $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ எனும் வளைவரையில் நகருகிறது. விசை விதியைக் காண்க.

3. முனைப் புள்ளியை நோக்கிய P எனும் விசையின் கீழ் ஒரு துகள்.

$$r^n = A \cos n\theta + B \sin n\theta$$

எனும் வலைவரைப் பாதையில் நகர்ந்து செல்கிறது. விசை விதியைக் காண்க.

4. முனையை நோக்கிய P எனும் விசையின் கீழ் ஒரு துகள் அம்முனை வழியே செல்லும் $r = a \cos \theta$ எனும் வட்டப் பாதையில் நகருகிறது. விசைவிதியைக் காண்க.

5. முனையை நோக்கிய P எனும் விசையின் கீழ் ஒரு துகள் $r = a \sin n\theta$ எனும் வளைவில் நகர்ந்து செல்கிறது. விசை விதியைக் காண்க.

6. முனைப் புள்ளியை நோக்கிய P எனும் விசையின் கீழ் ஒரு துகள் (i) $au = e^{n\theta}$,

(ii) $au = \cosh n\theta$, (iii) $au = \sinh n\theta$, (iv) $r^n \cos n\theta = a^n$ எனும் வளைவரையின் மீது நகர்ந்து செல்கிறது. விசைவிதி காண்க.

7. மைய விசையின் கீழ் வரையப்படுகின்ற ஒரு பாதையில் எந்தப் புள்ளியிலும் துகளின் திசை வேகமானது விசை மையத்திலிருந்து அப்புள்ளியின் வர்க்கத்துடன் எதிர்மாறு விகிதத்திலுள்ளது. பாதை ஒரு சமகோணச் சுருளியென்று காட்டுக.

8. ஒரு மையவிசைப் பாதையில் ஏதேனுமொரு புள்ளியில் துகளின் திசைவேகமானது, விசை மையத்திலிருந்து அதன் தூரத்தை ஆரையாகக் கொண்ட வட்டப்பாதையில் நகர்ந்து செல்லும் ஒரு துகளின் திசை வேகத்தைப் போல் $\frac{1}{n}$ மடங்கு எனில், மையவிசையானது $\frac{1}{r^2 n + 1}$ க்கேற்ப மாறுபடு மென்றும், பாதையின் சமன்பாடு $r^{n^2-1} = a^{n^2-1} \cos (n^2-1)\theta$ என்றும் காட்டுக.

9. மைய முடுக்கமானது விசை மையத்திலிருந்து துகளின் தூரத்தின் ஏதேனுமொரு முழு எண் அடுக்குக் கேற்ப மாறுபடின், பாதையில் அதிகபட்சம் இரு கவியத் தூரங்களிருக்குமென்று நிறுவுக.

10. ஒரு மைய விசைப் பாதையில் விசை மையத்திலிருந்து C தூரத்திலிருந்து ஒரு துகள் $\sqrt{\frac{2\mu}{3}} C^8$ திசை வேகத்

துடன் எறியப்பட்டு $\mu (r^5 - C^4 r)$ எனும் மைய முடுக்கத்துடன் நகர்கிறது. துகளின் பாதை $x^4 + y^4 = C^4$ என்னும் வளைவரை யென்று காட்டுக. (சென்னை எம். எஸ்ஸி. 1968)

11. ஒரு துகள் குறிப்பிட்ட ஒரு புள்ளியிலிருந்து குறிப்பிட்ட ஒரு திசையில் முனையிலிருந்து அதன் தூரத்தின் n ஆவது அடுக்கின் தலைகீழ் விகிதத்திற்கேற்ப மாறுபடுகின்ற மைய முடுக்கத்தின் கீழ், கந்தழித் தூரத்திலிருந்து அப்புள்ளிவரை விழும்போது பெறக்கூடிய திசை வேகத்துடன் எறியபடுகிறது. அதன் இயக்கப்பாதை $r^{n-3} = a^{n-3} \cos (n - 3) \theta$ என்று காட்டுக.

12. ஒரு துகள் ஒரு நிலையான புள்ளியை நோக்கி a இயல்பான நீளமும், nmg மீளியல் குணகமும் கொண்ட ஒரு மீளியல்புடைய கயிற்றின் மூலம் ஈர்க்கப்படுகிறது. அது a தூரமுள்ள ஒரு கவியத்திலிருந்து $\sqrt{2 Pgh}$ எனும் திசை வேகத்துடன் எறியப்படுகிறது. அதன் மற்றய கவியத்தூரம்.

$$nr^2 (r - a) - 2 Pha (r + a) = O$$

எனும் சமன்பாட்டின் மூலம் தரப்படுகிறதென்று காட்டுக.

13 விசை மையத்திலிருந்து $a + b$ தூரத்திலுள்ள ஒரு கவியத்திலிருந்து ஒரு துகள் $\frac{\sqrt{\mu}}{a + b}$ திசை வேகத்துடன் எறியப்படும் m பொருண்மையுள்ள ஒரு துகள்

$$m \mu \{3au^4 - 2 (a^2 - b^2)\} , a > b$$

என்னும் மைய விசையின் கீழ் நகருகிறது. அதன் பாதை $r = a + b \cos \theta$ என்று காட்டுக.

14. முனையிலிருந்து a தூரத்திலுள்ள ஒரு கவியத்திலிருந்து V எனும் திசை வேகத்துடன் எறியப்படும் m பொருண்மையுள்ள ஒரு துகள் $\frac{m\mu}{(\text{தூரம்})^3}$ எனும் தள்ளு விசையின் கீழ் நகர்கிறது. $\frac{u + a^2 V^2}{a^2 V^2} = P^2$ எனில், அதன் பாதையின் சமன்பாடு $r \cos P\theta = a$ என்றும் t நேரத்தில் அது திரும்பியுள்ள கோணம் θ என்பது $\frac{1}{P} \tan^{-1} \left(\frac{PV}{a} t \right)$ என்றும் காட்டுக.

15. முனையிலிருந்து a தூரத்திலுள்ள ஒரு கவியத்திலிருந்து V எனும் திசை வேகத்துடன் எறியப்படும் ஒரு துகள் $\frac{\mu}{(\text{தூரம்})^3}$.

எனும் மைய முடுக்கத்துடன் நகருகிறது. கந்தழியிலிருந்து அக் கவியம் வரை நகரும்போது அது பெறக்கூடிய திசை வேகத்தை விடவும் V குறைவாகவோ அல்லது அதிகமாகவோ இருப்பதற்கேற்ப அதன் இயக்கப் பாதையின் சமன்பாடு

$$r \cos\left[\frac{\sqrt{(\mu - a^2 V^2)}}{aV}\,\theta\right] = a$$

$$\text{அல்லது } r \cos\left]\frac{\sqrt{(a^2 V^2 - \mu)\theta}}{aV} = a\right.$$

என்று காட்டுக.

16. முனையிலிருந்து a தூரத்திலுள்ள ஒரு கவியத்திலிருந்து m பொருண்மையுள்ள ஒரு துகள் $\sqrt{(10\lambda)}$ எனும் திசை வேகத்துடன் எறியப்பட்டு $m\lambda\,[3a^3 u^4 + 8a u^2]$ எனும் மைய விசையின் கீழ் நகருகிறது. இரண்டாவது கவியத்தூரம் முதலாவது கவியத் தூரத்தில் பாதியொன்றும், பாதையின் சமன்பாடு $2r = a\left[1 + \text{sech}\,\frac{\theta}{\sqrt{5}}\right]$ என்று காட்டுக.

17. ஒரு மைய விசைப் பாதையில் ஒரு துகள் $\mu u^8 (3 + 2a^2 u^2)$ எனும் மைய முடுக்கத்துடன் நகர்கிறது. முனையிலிருந்து a தூரத்திலிருந்து அது $\sqrt{\left(\frac{5\mu}{a^2}\right)}$ எனும் திசை வேகத்துடன், அப்புள்ளி வழி ஆரையுடன் $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ கோணத்தை யுண்டுபண்ணும் திசையில் எறியப்பட்டால், பாதையின் சமன்பாடு $r = a \tan\theta$ என்று காட்டுக.

$\mu . \frac{r + 2a}{r^5}$ எனும் முடுக்கத்தை யுண்டுபண்ணும் ஒரு மைய விசையின் கீழ் ஒரு துகள் (a, O) என்னும் புள்ளியிலிருந்து கந்தழியிலிருந்து பெறக்கூடிய திசை வேகத்துடன், தொடக்கக் கோட்டுடன் $\cot^{-1}(2)$ கோணத்தில் எறியப்படுகின்றது. பாதையின் சமன்பாடு $r = a(1 + 2\sin\theta)$ என்று காட்டுக.

10. தலைகீழ் வர்க்க விதி

(Inverse Square Law)

நியூட்டனின் ஈர்ப்புவிதி (Newton's Law of Attraction)

r இடைவெளியில் வைக்கப்பட்டுள்ள m_1, m_2 எனும் பொருண்மைகளுடன் கூடிய இரு துகள்கள் ஒன்றையொன்று γ. $\frac{m_1 m_2}{r^2}$, γ என்பது பொதுவான ஓர் மாறிலி, என்னும் ஈர்ப்பு விசையுடன் ஈர்க்கும் என்பதே நியூட்டனின் ஈர்ப்பு விதியாகும். இவ்விதியானது சூரிய குடும்பத்தைச் (Solar System) சேர்ந்த எல்லா கோள்களுக்கும் பொருந்துவதாக அமைந்துள்ளது. சூரியனைச் சுற்றி பூமியின் இயக்கம், ஒரு கோளைச் சுற்றி அதன் துணைக் கோள்களின் இயக்கங்கள் ஆகியவை யாவும் இவ்விதிக் குட்பட்ட விசையுடனேயே இயங்கி வருகின்றன. இவ்விதியின் படி இரு துகள்களுக்கிடையேயுள்ள ஈர்ப்பு விசையானது அவற்றிற்கிடையேயுள்ள தூரத்தின் வர்க்கத்துடன் தலைகீழ் விகிதத்திலிருக்கும். இத்தன்மையின் காரணமாக இவ்விதி யானது ''தலைகீழ் வர்க்கவிதி'' என்றும் அழைக்கப்படுகிறது. இத் தலைகீழ் வர்க்க விதிக்குட்பட்ட மைய விசையுடன் இயங்கும் துகள்களின் மையவிசைப் பாதைகள்பற்றி இங்கு ஆராய்வோம்.

தலைகீழ் வர்க்கவிதி (Inverse square law)

ஒரு துகள், அதன் முடுக்கம் எப்பொழுதும் ஒரு நிலையான புள்ளியை நோக்கியே செயல்படுமாறும், அந்நிலையான புள்ளியி லிருந்து அதன் தூரத்தின் வர்க்கத்தின் தலைகீழ் விகிதத்திற் கேற்ப அதன் முடுக்கம் மாறுபடுமாறும் ஒரு பாதையில் நகரு கிறது. அதன் பாதை ஒரு கூம்பு வளைவு (conic) என்றும் நிறுவி, சாத்தியமான மூன்று வெவ்வேறு வகைகளையும் பிரித்தறிதல் :

இது மையவிசைப் பாதையைச் சேர்ந்த ஒரு வகையாகும். இங்கு மையவிசைப் பாதையின் μ/r^2 ஆகும்.

மையவிசைப் பாதையின் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் பாதச் சமன்பாட்டு வடிவம்

$$\frac{h^2}{p^3} \cdot \frac{dp}{dr} = P = \frac{\mu}{r^2}$$

என்று நாமறிவோம்.

$$\therefore \quad \frac{h^2}{p^3} \cdot dp = \frac{\mu}{r^2}\, dr.$$

இச் சமன்பாட்டைத் தொகையீடு செய்க :

$$-\frac{h^2}{2p^2} = -\frac{\mu}{r} + \text{தொகையீட்டு மாறிலி}$$

அதாவது, $\frac{h^2}{p^2} = \frac{2\mu}{r} + C$, C என்பது மாறிலி.

ஆனால் $h = vp$ என்று நாமறிவோமாகையால்,

$$v^2 = \frac{h^2}{p^2} = \frac{2\mu}{r} + C \qquad \dots \quad \dots \qquad (1)$$

ஆனால் $2a$, $2b$ ஆகியவற்றை முறையே பேரச்சு (Major axis), சிற்றச்சு (Minor axis)க்களாகக் கொண்ட ஒரு நீள்வட்டத்தின் ஒரு குவியத்தைக் குறித்த $(p-r)$ சமன்பாடு

$$\frac{b^2}{p^2} = \frac{2a}{r} - 1 \qquad \dots \qquad (2)$$

என்றும், $2a$, $2b$ ஆகியவற்றை முறையே குறுக்கச்சு (transverse axis), துணையச்சு (conjugate axis)க்களாகக் கொண்ட அதிபரவளைவின் (hyperbola) ஒரு குவியத்தைக் குறித்த $(p-r)$ சமன்பாடு

$$\frac{b^2}{p^2} = \frac{2a}{r} + 1 \qquad \dots \qquad (3)$$

என்றும் நாமறிவோம். ஆகவே, சமன்பாடு (1)ஆனது C எதிரடையாளமுடனிருப்பின் ஒரு நீள்வட்டத்தினையும், C நேரடையாளமுடனிருப்பின் ஓர் அதிபரவளைவினையும் குறிப்பிடுமென்றறிகிறோம். அவ்வாறு குறிப்பிடப்படுகின்ற நீள்வட்டத்தின் பேரச்சு, சிற்றச்சு அல்லது அதிபரவளைவின் குறுக்கச்சு, துணையச்சு ஆகியவை முறையே 2μ, $2h$ ஆகும்.

$C = O$ எனில், சமன்பாடு (1)ஆனது

$$\frac{h^2}{p^2} = \frac{2\mu}{r} \text{ அல்லது } \frac{p^2}{r} = \frac{h^2}{2\mu} \qquad \dots \qquad (4)$$

என்று மாறும். இது குவியத்தை முனைவாகக் கொண்ட பரவளை வின் சமன்பாடு ஆகும்.

வகை (i) $C > O$.

(1), (2) ஆகிய சமன்பாடுகளை ஒப்பிடுக.

$$\frac{h^2}{b^2} = \frac{\mu}{a} = \frac{C}{-1}$$

அல்லது, $C = -\frac{\mu}{a}$

இம்மதிப்பைச் சமன்பாடு (1)இல் பிரதியிடுக.

$$v^2 = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a} = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

மேலும் அச்சமன்பாட்டிலிருந்து $v^2 < \frac{2\mu}{r}$ என்றும் காண்க. எனவே, $v^2 < \frac{2\mu}{r}$ எனில், துகளின் பாதையானது விசை மையத்தை ஒரு குவியமாகக் கொண்ட நீள்வட்டமென்று அறிந்து கொள்க.

வகை (ii) $C > O$

(1), (3) ஆகிய சமன்பாடுகளை ஒப்பிட்டு $C = \frac{\mu}{a}$ என்று காணலாம். எனவே, சமன்பாடு (1) இலிருந்து,

$$v^2 = \frac{2\mu}{r} + \frac{\mu}{a} = \mu\left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a}\right)$$

என்று காணலாம். மேலும் இச்சமன்பாட்டிலிருந்து, $v^2 > \frac{2\mu}{r}$ என்று காண்க. எனவே, $v^2 > \frac{2\mu}{r}$ எனில், துகளின் பாதை யானது விசை மையத்தை ஒரு குவியமாகக் கொண்ட ஆதி பரவளைவு என்று அறிந்து கொள்க.

வகை (iii) $C = O$ எனில் $v^2 = \frac{2\mu}{r}$ ஆகும். சமன்பாடு (4)இலிருந்து துகளின் பாதையானது விசை மையத்தைக் குவியமாகக் கொண்ட ஒரு பரவளைவு ஆகும்.

ஆகவே, $v^2 < \frac{2\mu}{r}$ எனில் துகளின் பாதை ஒரு நீள்வட்டம் என்றும்,

$v^2 = \frac{2\mu}{r}$ எனில் துகளின் பாதை ஒரு பரவளைவு என்றும்,

$v^2 > \frac{2\mu}{r}$ எனில் துகளின் பாதை ஒரு ஆதிபரவளைவு என்றும் அறிந்து கொள்க. அதாவது, துகளானது விசை மையத்தை ஒரு குவியமாகக் கொண்ட ஒரு கூம்பு வளைவுப் பாதையிலேயே எப்பொழுதும் நகருமென்றறிக.

குறிப்பு: துகளின் முடுக்கம் மையத்தை நோக்கி அதன் தூரத்தின் தலைகீழ் வர்க்கத்திற்கேற்ப மாறுபடுவதால், துகள் x தூரத்திலிருக்கும்போது அதன் முடுக்கம்

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\mu}{x^2}$$

என்ற சமன்பாட்டின்மூலம் தரப்படும்.

ஆனால் $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v$ ஆகையால்,

$$v \cdot \frac{dv}{dx} = -\frac{\mu}{x^2} \cdot dx$$

அல்லது, $v\, dv = -\mu \cdot \frac{dx}{x^2}$

எனவே, கந்தழி (∞)யிலிருந்து r தூரம்வரை இதே முடுக்கத்தின்கீழ் விழும்போது துகள் பெறக்கூடிய திசைவேகமானது மேற்கண்ட சமன்பாட்டைத் தொகையீடு செய்வதன்மூலம் பெறப்படுகிறது. அதாவது, கந்தழித் தூரத்திலிருந்து r தூரம் வரை இதே முடுக்கத்தின்கீழ் விழும்போது துகள் பெறக்கூடிய திசைவேகம் V_1 எனில்

$$\int_O^{V_1} v\, dv = -\mu \int_{\infty}^{r} \frac{dx}{x^2}$$

அதாவது, $\left[\frac{v^2}{2}\right]_O^{V_1} = -\mu \left[-\frac{1}{x}\right]_{\infty}^{r}$

அல்லது, $\frac{V_1^2}{2} = \frac{\mu}{r}$

அல்லது, $V_1^2 = \frac{2\mu}{r}$

ஆகவே, தலைகீழ் வர்க்க விதியின்கீழ் இயங்கிக் கொண்டிருக்கும் ஒரு துகளின் பாதையானது, அப்பாதையின் எந்த நிலையிலும் துகளின் வேகமானது கந்தழியிலிருந்து அந்த நிலைவரை விழும் போது பெறக்கூடிய வேகத்தைவிடக் குறைவாக அல்லது அதிகமாக அல்லது அவ்வேகத்திற்குச் சமமாகயிருப்பதற்கேற்ப ஒரு நீள்வட்டமாக அல்லது ஆதிபரவளைவாக இருக்குமென்றறிக.

குறிப்பு 2. துகள் R ஆரையுள்ள ஒரு வட்டப் பாதையில் நகருவதாகக் கொள்க. அதன்வேகம் V_2 எனில், மையத்தை நோக்கிய அதன் செங்கோட்டு முடுக்கம் (Normal acceleration) $\frac{V_2^2}{R}$ ஆகும். ஆனால் துகளானது மையத்திலிருந்து R தூரத்திலிருப்பதால், தலைகீழ் வர்க்க விதியின்கீழ் மையத்தை நோக்கிய அதன் முடுக்கம் μ/R^2 ஆகும்.

ஆகவே, $\frac{V_2^2}{R} = \frac{\mu}{R^2}$

அல்லது, $V_2^2 = \frac{\mu}{R}$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2\mu}{R}$$

அல்லது, $V_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2\mu}{R}}$

ஆனால் $\sqrt{\frac{2\mu}{R}}$ என்பது கந்தழியிலிருந்து $\frac{\mu}{x^2}$ என்னும் முடுக்கத்தின்கீழ் விழுகின்ற ஒரு துகள் விசை மையத்திலிருந்து R தூரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியை அடையும்போது பெறக்கூடிய திசைவேகமென்று கண்டோம். ஆகவே, விசை மையத்திலிருந்து R தூரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரு துகள் கந்தழியிலிருந்து அப்புள்ளிவரை விழுவதால் பெறக்கூடிய வேகத்தைப் போல் $\frac{1}{\sqrt{2}}$ மடங்கு வேகத்துடனும் தலைகீழ் வர்க்க விதிக்குட்

பட்ட முடுக்கத்துடனும் எறியப்பட்டால் அதன் பாதை விசை மையமாகவும், R ஆரையுமுடைய ஒரு வட்டமாக அமையு மென்றறிக.

கோளியக்கம் (Planetary Motion)

விண்ணிலே இயங்கிக் கொண்டிருக்கின்ற கோள்கள் யாவும் பின்வரும் மூன்று விதிகட்குட்பட்டு இயங்கிக் கொண்டிருக் கின்றன. கோள்களின் இயக்கம் பற்றிய உண்மைகளை ஆராய் தறிந்து அவற்றை மூன்று விதிகளாக வகுத்தளித்தவர் கெப்ளர் (Keplar) எனும் வானியல் வல்லுநராவர். எனவே, அம் மூன்று விதிகளும் அவர் பெயராலேயே வழங்கப்படுகின்றன.

கெப்ளரின் கோளியக்க விதிகள் (Keplar's Laws of Planetary Motion)

1. ஒவ்வொரு கோளும் சூரியனை ஒரு குவியமாகக் கொண்ட ஒரு நீள்வட்டப் பாதையில் இயங்கிக் கொண்டிருக் கிறது.

2. சூரியனுள் ஒரு கோளை இணைக்கின்ற ஆரைத் திசையி யினால் வரையப்படுகின்ற பரப்பளவானது, அப்பரப்பளவை வரைவதற்கு அக்கோள் எடுத்துக் கொள்ளும் நேரத்துடன் விகித சமத்திலிருக்கும்.

அதாவது, சூரியனுடன் கோளை இணைக்கும் ஆரைத் திசையியானது சமகாலங்களில் சமபரப்பளவுகளை வரையும்.

3. கோள்களின் காலவட்டங்களின் வர்க்கங்கள் அவற்றின் இயக்கப் பாதைகளின் பேரச்சுக்களின் மூன்றும் அடுக்குகளுடன் விகித சமத்திலிருக்கும்.

கெப்ளரின் விதிகளிலிருந்து பெறப்படும் உண்மைகள்

1. மைய விசையின்கீழ் ஒரு துகள் ஒரு நீள்வட்டப் பாதையில் இயங்கிக் கொண்டிருக்குமேயாயின், அதன் மைய முடுக்கமானது விசை மையக் குவியத்திலிருந்து அதன் தூரத்தின் தலைகீழ் வர்க்கத்திற்கேற்ப மாறுமென்று நாம் அறிவோம். கெப்ளரின் முதல் விதியின்படி, ஒவ்வொரு கோளும் சூரியனை ஒரு குவியமாகக் கொண்ட ஒரு நீள்வட்டப் பாதையில் இயங்கி வருவதால் அதன் மைய முடுக்கமானது சூரியனிலிருந்து

அதன் தூரத்தின் தலைகீழ் வர்க்கத்துடன் விகித சமத்திலிருக்கு மென அறிந்து கொள்ளலாம்.

2. இரண்டாவது விதியிலிருந்து சூரியனுடன் ஒரு கோளை இணைக்கும் ஆரைத் திசையியினால் வரையப்படும் ஆரைச் சிறைப் பரப்பளவு வீதம் ஒரு மாறிலியாகயிருக்குமென்று தெரிவதால் அக்கோளின்மீது செயல்படுகின்ற மைய முடுக்கம் சூரியனை நோக்கியே செயல்படுமென்றறியலாம்.

3. மைய விசையின்கீழ் $2a$ பேரச்சுடன் கூடிய ஒரு நீள் வட்டப் பாதையில் இயங்கிக் கொண்டிருக்கும் ஒரு துகளின் காலவட்ட நேரம்

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{\mu}}$$

என்று நாமறிவோம்.

அதாவது, $T^2 = \dfrac{4\pi^2 a^3}{\mu}$

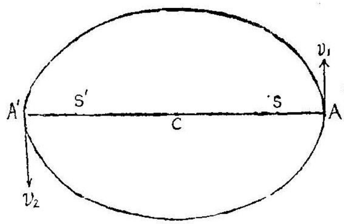
மூன்றும் விதியிலிருந்து T^2 ஆனது a^3க்கேற்ப மாறுபடுமென்று தெரிவதால் μ-இன் மதிப்பு எல்லாக் கோள்களுக்கும் பொதுவானதாகவே இருக்குமென்று தெரிகிறது. ஆனால் μ என்பது விசை மையத்திலிருந்து ஓர் அலகு தூரத்தில் துகளின் முடுக்கமாகுமாகையால் அது தனிமுடுக்கம் (Absolute acceleration) என்றழைக்கப்படுகிறது. ஆகவே, சூரியனைச் சுற்றி வருகின்ற எல்லாக் கோள்களின் தனி முடுக்கங்களும் சமமாகயிருக்கு மென்றறிகிறோம்.

குறிப்பு: சூரியனின் பொருண்மையுடன் ஒப்பிடுகையில் கோள்களின் பொருண்மைகள் புறக்கணிக்கத் தக்க அளவில் சிறியன வென்னும் தற்கோளின் அடிப்படையில் மட்டுமே கெப்ளரின் மூன்றாவது விதி உண்மையாகு மென்பதைக் கவனிக்கவும்.

மாதிரி 180. ஒரு கோள் சூரியனுக்கு மிக அருகாமையிலும், மிகத் தொலைவிலுமிருக்கும்போது அதன் நேர் கோட்டுத் திசை வேகங்கள் முறையே v_1, v_2 ஆகும். e என்பது அக்கோளின் இயக்கப் பாதையின் மையவகற்சி (eccentricity) எனில், $(1 - e)\, v_1 = (1 + e)\, v_2$ என்று நிறுவுக.

தீர்வு:

S என்பது சூரியன். எனவே, கோளின் இயக்கப் பாதையானது S ஐ ஒரு குவியமாகக் கொண்ட ஒரு நீள் வட்டமாகும். AA^1 என்பது அதன் பேரச்சு என்றும் $AA^1 = 2a$ என்றும் கொள்க.



படம் 125

கோள் A யிலிருக்கும்போது அதன் வேகம் v_1;

A^1 இலிருக்கும் போது அதன் வேகம் v_2.

$$SA = CA - CS = a - ae = (1 - e)$$

$$SA^1 = SC + CA^1 = ae + a(1 + e)$$

கோள் A யிலிருக்கும் போது $r = SA = a(1 - e)$

A^1 இலிருக்கும் போது $r = SA^1 = a(1 + e)$

இப்பொழுது, $v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$ என்னும் சூத்திரத்திலிருந்து,

$$v_1^2 = \mu\left[\frac{2}{a(1-e)} - \frac{1}{a}\right]$$

$$= \frac{\mu}{a}\left[\frac{2}{1-e} - 1\right]$$

$$= \frac{\mu}{a}\left[\frac{1+e}{1-e}\right]$$

$$v_2^2 = \mu\left[\frac{2}{a(1+e)} - \frac{1}{a}\right]$$

$$= \frac{\mu}{a}\left[\frac{2}{1+e} - 1\right]$$

$$= \frac{\mu}{a}\left[\frac{1-e}{1+e}\right]$$

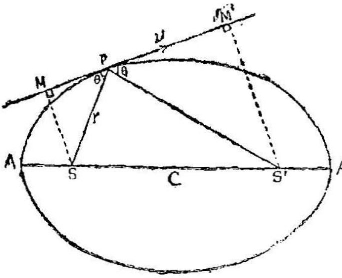
$$\therefore \frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{(1+e)^2}{(1-e)^2}$$

அல்லது, $(1 - e)\,v_1 = (1 + e)\,v_2$.

மாதிரி 181. ஒரு கோள் சூரியனை ஒரு குவியமாகக் கொண்டு ஒரு நீள்வட்டப் பாதையில் இயங்கிக் கொண்டிருக் கிறது. நீள்வட்டப் பாதையின் பேரச்சு $2a$; மையகற்சி e. கோளின் காலவட்ட நேரம் T. பாதையின் பேரச்சுடன் துகள்வழி ஆரைத் திசையி செங்குத்தாயிருக்கும்போது அவ் வாரைத்திசையி வழியே சூரியனிலிருந்து வெளிநோக்கிய அதன் திசைவேகம் மீப்பெரிதாகயிருக்குமென்றும், அப்போது அத்திசை வேகம் $\dfrac{2\pi\, ae}{T\sqrt{(1-e^2)}}$ என்றும் காட்டுக.

தீர்வு, S என்பது சூரியன். $AA^1 = 2a$ என்பது S ஐ ஒரு குவியமாகக் கொண்ட நீள் வட்டப்பாதை, S^1 என்பது இரண் டாவது குவியம். P என்பது பாதையில் துகளுடைய ஏதேனு மொரு நிலை. v என்பது P யில் தொடுகோடு வழியே செயல் படும் வேகம். SP, S^1P ஐச் சேர்க்கவும். தொடுகோட்டிற்கு SM, S^1M^1 என்ற செங்குத்துக் கோடுகள் வரைக.

SP, S^1P என்பன தொடுகோட்டுடன் சமச் சாய்விலிருக்கும்.



படம் 126

$S\hat{P}M = S^1PM^1 = \theta$ என்க.

$SP = r$ என்க.

$SP + S^1P = 2a$ ஆகையால், $S^1P = (2a - r)$

மேலும், b என்பது சிற்றச்சு எனில், $SM \cdot S^1M^1 = b^2$ ஆகும்.

$\Delta\, SMP$ இல், $\sin\theta = \dfrac{SM}{SP}$.

$\Delta\, S^1M^1P$ இல் $\sin\theta = \dfrac{S^1M^1}{S^1P}$

$$\therefore \quad \sin^2\theta = \frac{SM \cdot S^1M^1}{SP \cdot S^1P}$$

$$= \frac{b^2}{r(2a-r)}$$

கோளின் இயக்கப்பாதை ஒரு நீள் வட்டமாகையால்,

$$v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

$$= \mu\left(\frac{2a-r}{ar}\right)$$

$$\therefore v = \sqrt{\frac{\mu}{a}}\sqrt{\left(\frac{2a-r}{r}\right)}$$

இப்பொழுது SP வழியே v இன் கூறு $v \cos\theta$ ஆகும்.

அதாவது, v — இன் SP வழிக்கூறு =

$$\sqrt{\frac{\mu}{a}}\sqrt{\frac{2a-r}{r}} \,.\, \cos\theta$$

$$= \sqrt{\frac{\mu}{a}}\sqrt{\frac{2a-r}{r}} \,.\, \sqrt{1-\sin^2\theta}$$

$$= \sqrt{\frac{\mu}{a}}\sqrt{\frac{2a-r}{r}}\sqrt{1-\frac{b^2}{r(2a-r)}}$$

$$= \sqrt{\frac{\mu}{a}}\sqrt{\frac{(2a-r)(2ar-r^2-b^2)}{r \,.\, r(2a-r)}}$$

$$= \sqrt{\frac{\mu}{a}}\sqrt{\frac{2ar-r^2-b^2}{r^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\mu}{a}}\sqrt{\frac{2a}{r}-1-\frac{b^2}{r^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\mu}{a}}\sqrt{-1-\left(\frac{b^2}{r^2}-\frac{2a}{r}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{\mu}{a}}\sqrt{-1-\left\{\left(\frac{b}{r}-\frac{a}{b}\right)^2-\frac{a^2}{b^2}\right\}}$$

$$= \sqrt{\frac{\mu}{a}}\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1-\left(\frac{b}{r}-\frac{a}{b}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{\mu}{a}}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2}-\left(\frac{b}{r}-\frac{a}{b}\right)^2}$$

இத்திசைவேகக் கூறு மீப்பெரிதாகயிருக்க வேண்டுமாயின்

$$\frac{b}{r} - \frac{a}{b} - O \text{ அல்லது, } r = \frac{b^2}{a} - l \text{ (செவ்வகலம்).}$$

ஆகவே, கோளானது ஒரு விசை மைய வழிச் செவ்வலகத்தின் நுனியிலிருக்கும்போது ஆரைத் திசையி வழித் திசைவேகம் மீப் பெரிதாகயிருக்கும். ஆனல் செவ்வகலமானது பேரச்சுக்குச் செங்குத்தாக யிருக்குமாதலின், கோள்வழி ஆரைத் திசையி பேரச்சுக்குச் செங்குத்தாகயிருக்கும்போது கோளின் வேகத்தின் ஆரைத் திசை வழிக்கூறு மீப்பெரிதாகயிருக்கும்.

இவ்வாரைத் திசையி வழியே மீப்பெரு திசைவேகம்

$$= \sqrt{\frac{\mu}{a}} \quad \frac{a^3 - b^2}{b^2}$$

$$= \sqrt{\frac{\mu}{a}} \sqrt{\frac{a^2 - a^2 (1-e^2)}{a^2 (1-e^2)}}$$

$$= \sqrt{\frac{\mu}{a}} \sqrt{\frac{1 - e^2}{e^2}}$$

ஆனல் காலவட்டநேரம் $T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{\mu}}$ என்று நாமறிவோம்.

அதாவது, $T = 2\pi a \sqrt{\frac{a}{\mu}}$

அல்லது, $\sqrt{\frac{\mu}{a}} = \frac{2\pi a}{T}$

$\therefore$ மீப்பெரு திசைவேகம் $= \frac{2\pi a}{T} \sqrt{\frac{e^2}{1-e^2}}$

$$= \frac{2\pi a\, e}{T \sqrt{1-e^2}}$$

மாதிரி **182.** பூமியின் திசைவேகம், வட்டமெனக் கருதப் படுகின்ற அதன் பாதையில் ஏதேனுமொரு புள்ளியில் சுமார் பாதி யளவு அதிகரிக்கப்பட்டால் பூமியானது சூரியனைக் குவியமாகக் கொண்ட ஒரு பரவளைவுப் பாதையில் நகருமென நிறுவுக மேலும், பூமியிலிருந்து 7 மைல்/விநடி வேகத்தை விடவும்

அதிகமான வேகத்துடன் எறியப்படுகின்ற ஒரு பொருள் மீண்டும் பூமிக்குத் திரும்பாது என்று காட்டுக.

(பூமியின் ஆரை 4000 மைல்கள் ; பூமியின்வேகம் 18.5 மைல்/விநாடி.)

தீர்வு : பூமியின் வட்டப் பாதையின் ஆரை a என்க.

பூமியின் வேகம் v எனில்,

$$v^2 = \mu\left(\frac{2}{a} - \frac{1}{a}\right) = \frac{\mu}{a}$$

$$\therefore \quad v = \sqrt{\frac{\mu}{a}}$$

இயக்கப் பாதை ஒரு பரவளைவாகயிருக்க வேண்டுமாயின் திசை v_1 ஆனது

$$v_1^2 = \frac{2\mu}{a}$$

ஆகயிருக்க வேண்டும்

அதாவது, $v_1 = \sqrt{2}\sqrt{\frac{\mu}{a}} = \sqrt{2}\,v.$

$= \sqrt{2}$ (பூமியின் வேகம்)

$= 1.444$ (பூமியின் வேகம்)

= பூமியின் வேகத்தைப்போல் சுமார் பாதியளவு அதிகம்.

பூமியின் ஆரை R என்க.

எனவே, பூமியின் மேற்பரப்பில் பூமியின் மையத்தை நோக்கிய ஈர்ப்பு முடுக்கம் $\frac{\mu_1}{R^2}$ ஆகும். ஆனால், இவ்வீர்ப்பு முடுக்கம் g ஆகும்.

$$\therefore \quad \frac{\mu_1}{R^2} = g$$

பூமியின் மேற்பரப்பிலிருந்து $\frac{\mu_1}{R^2}$ என்னும் முடுக்கத்தின்கீழ் எறியப்படும் பொருள் ஒரு பரவளைவுப் பாதையில் செல்ல வேண்டுமெனில் அதன் எறிவேகம்

$$V = \sqrt{\frac{2\mu_1}{R}}$$

$$= \sqrt{2 . \frac{\mu_1}{R_4} . R}$$

$$= \sqrt{2gR}$$

$$= \sqrt{2 \times 32 \times 4000 \times 5280} \text{ அடி/விஞடி.}$$

(1 மைல் = 5280 அடி)

$$= \sqrt{\frac{2 \times 32 \times 4000}{5280}}$$

$$= \sqrt{\frac{1600}{33}} \text{ மைல்/விஞடி}$$

$$= \sqrt{48.5} \text{ மைல்/விஞடி}$$

= 7 மைல்/விஞடி (தோராயமாக)

இப்பொழுது, v = பூமியின் வேகம் = 18.5 மைல்/விஞடி.

v_1 = பரவளைவுப் பாதையில் இயங்குவதற்குத் தேவையான பூமியின்வேகம்

= $\sqrt{2}\, v$ என்று நிறுவியுள்ளோம்

= 1.414 × 18.5 மைல்/விஞடி

= 26 மைல்/விஞடி (தோராயமாக)

$\therefore\ v_1 - v = 26 - 18.5 = 7.5$ மைல்/விஞடி.

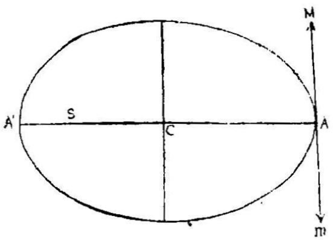
அதாவது, பூமியானது அதன் வேகத்தைவிட 7.5 மைல்/விஞடி வேகம் அதிகமாக இயங்குமாஞல் ஒரு பரவளைவுப பாதையில் செல்லும். ஆகவே, பூமியின் மேற்பரப்பிலிருந்து 7 மைல்/விஞடி வேகத்தை விடவும் அதிகமான வேகத்துடன் பூமியின் பாதையில் அதே திசையில் எறியப்படும் பொருளின் வேகம் சுமார் 26 மைல்/விஞடி வேகமாயிருக்குமாதலின் அது ஒரு பரவளைவுப் பாதையில் செல்லும். ஆஞல் பரவளைவு என்பது ஒரு திறந்த வளைவு ஆதலின் அவ்வாறு எறியப்படும் பொருள் மீண்டும் எறி புள்ளிக்குத் (அதாவது பூமிக்கு) திரும்பாது.

மாதிரி **183.** M பொருண்மையும் T காலவட்ட நேரமுமுடைய ஒரு கோள் சூரியனிலிருந்து மிக அதிகத் தொலைவிலிருக்கும்போது அதே இயக்கப் பாதையில் எதிர்த் திசையில் v திசைவேகத்துடன் நகர்ந்து கொண்டிருக்கும் m பொருண்மை

யுள்ள ஓர் எரி நட்சத்திரத்துடன் மோதுகிறது. $\frac{M}{m}$ என்பது மிகச் சிறியதெனில் கோளின் பாதையின் பேரச்சு $\frac{4m}{M}\frac{vT}{\pi}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$ அளவில் குறைக்கப்படுமென்று காட்டுக.

(சென்னை எம். எஸ்ஸி 1967)

தீர்வு: S என்பது சூரியன் AA^1 என்பது S-ஐ ஒரு குவியமாகக் கொண்ட நீள்வட்டப் பாதை. A என்பது S-இலிருந்து மிக அதிகத் தொலைவிலுள்ள புள்ளி. A-யில் கோளும் எரி நட்சத்திரமும் மோதுகின்றன. இரண்டும் ஒரே பாதையில் இயங்குவதால் அவற்றின் வேகங்கள் மோதலுக்குமுன்



படம் 127

சமமாக இருக்கும். இச் சம, எதிர் வேகங்களை v என்க.

$$r = SA = SC + CA = ae + a = a(1+e)$$

$$\therefore \quad v^2 = \mu\left[\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right]$$

$$= \mu\left[\frac{2}{a(1+e)} - \frac{1}{a}\right]$$

$$= \frac{\mu}{a}\left(\frac{1-e}{1+e}\right) \qquad \cdots \quad (1)$$

மோதலுக்குப் பின் இரண்டுக்கும் பொதுவான வேகம் V என்க. உந்தக் காப்புத் தத்துவப்படி,

$$(M+m)V = Mv - mv = (M-m)v$$

$$\therefore \quad V = \left(\frac{M-m}{M+m}\right)v$$

$$= \left\{\frac{1-\frac{m}{M}}{1+\frac{m}{M}}\right\}v$$

$$= \left(1 - \frac{m}{M}\right)\left(1 + \frac{m}{M}\right)^{-1} v$$

$$= \left(1 - \frac{m}{M}\right)\left(1 - \frac{m}{M}\right) v,$$ ஏனெனில் $\frac{m}{M}$ மிகச் சிறியது.

$$= \left(1 - \frac{m}{M} - \frac{m}{M}\right) v,$$ $\left(\frac{m}{M}\right)^2$ புறக்கணிக்கப் பட்டுள்ளது.

$$= \left(1 - \frac{2m}{M}\right) v.$$

$$\therefore \quad V < v$$

அல்லது, $V^2 < v^2$

$$< \mu \left[\frac{2}{a(1+e)} - \frac{1}{a}\right]$$

$$< \frac{2\mu}{a + ae}$$

$$< \frac{2\mu}{8A}$$

$$< \frac{2\mu}{r}$$

எனவே, மோதலுக்குப்பின் கோள்-எரிமீன் இணைப்பின் இயக்கப் பாதை ஒரு நீள்வட்டமாகும். அதன் பேரச்சு $2a^1$ என்க.

A-யில் மோதலுக்குப்பின்,

$$V^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a^1}\right)$$

$$= \mu \left(\frac{2}{3A} - \frac{1}{a^1}\right)$$

$$= \mu \left[\frac{2}{a(1+e)} - \frac{1}{a^1}\right]$$

அதாவது, $\left(1 - \frac{2m}{M}\right)^2 v^2 = \mu \left[\frac{2}{a(1+e)} - \frac{1}{a^1}\right]$

$$\left(1 - \frac{4m}{M}\right) \frac{\mu}{a} \frac{1-e}{1+e} = \mu \left[\frac{2}{a(1+e)} - \frac{1}{a^1}\right]$$

(1) இலிருந்து,

$$\left(1 - \frac{4m}{M}\right)\frac{1}{a} \cdot \frac{1-e}{1+e} = \frac{2}{a(1+e)} - \frac{1}{a^1}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{a^1} = \frac{2}{a(1+e)} - \left(1 - \frac{4m}{M}\right) \frac{1}{a} \frac{1-e}{1+e}$$

$$= \frac{1}{a}\left[\frac{2}{1+e} - \frac{1-e}{1+e}\left(1 - \frac{4m}{M}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{a}\left[\frac{2}{1+e} - \frac{1-e}{1+e} + \frac{4m}{M}\frac{1-e}{1+e}\right]$$

$$= \frac{1}{a}\left[1 + \frac{4m}{M}\frac{1-e}{1+e}\right]$$

$$\therefore \quad a^1 = a\left(1 + \frac{4m}{M}\frac{1-e}{1+e}\right)^{-1}$$

$$= a\left(1 - \frac{4m}{M}\frac{1-e}{1+e}\right) \text{ தோராயமாக}$$

$$= a - \frac{4m}{M}\frac{1-e}{1+e} \cdot a$$

$$\therefore \quad 2a^1 = 2a - \frac{4m}{M}\frac{1-e}{1+e} \cdot 2a$$

அல்லது, $2a^1 - 2a = -\frac{4m}{M}\frac{1-e}{1+e}2a$

ஆகவே, மோதலுக்குப் பின்னுள்ள பாதையின் பேரச்சு முன்னுள்ள பேரச்சைவிட $\frac{4m}{M}\frac{1-e}{1+e}2a$ அளவு குறைக்கப்பட்டுள்ளது.

ஆனல், $T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{\mu}}$; $v = \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{a}}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$, (1) இலிருந்து

$$\therefore \quad vT = \frac{2\pi a\sqrt{a}}{\sqrt{\mu}} \cdot \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{a}}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$$

$$= 2\pi a \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$$

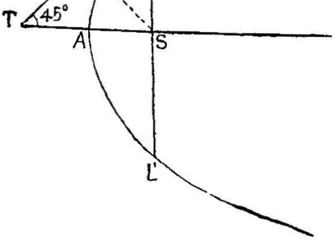
$$\therefore \quad 2a = \frac{vT}{\pi} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$$

ஆகவே, பேரச்சுக் குறை $= \dfrac{4m}{M} \cdot \dfrac{1-e}{1+e} \cdot 2a$

$$= \frac{4m}{M} \cdot \frac{1-e}{1+e} \cdot \frac{vT}{\pi} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$$

$$= \frac{4m}{M} \cdot \frac{vT}{\pi} \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$$

மாதிரி 184. ஒரு வால் நட்சத்திரம் சூரியனைக் குவியமாகக் கொண்டு ஒரு பரவளைவில் நகருகிறது. செவ்வலகத்தின் முனையில் வந்தபோது அதன் திசைவேகம் $n : 1$, $(n < 1)$ என்னும் விகிதத்தில் திடீரென மாற்றப்படுகிறது. பரவளைவுப் பாதையின் செவ்வகலம் $2l$ எனில், வேகம் குறைக்கப்பட்டபின் வால் நட்சத்திரமானது $\dfrac{1}{1-n^2}$ பேரச்சும், $\sqrt{(1-2n^2+2n^4)}$ மையவகற்சியும் கொண்ட ஒரு நீள்வட்டப் பாதையில் நகருமென்று காட்டுக.



படம் 128

தீர்வு : S என்பது சூரியன். S-ஐக் குவியமாகக் கொண்ட பரவளைவுப் பாதையின் செவ்வகலம் $LL^1 = 2l$. V என்பது L-இல் வால் நட்சத்திரத்தின் வேகமெனில்,

$$V^2 = \frac{2\mu}{SL} = \frac{2\mu}{l} \quad \dots \quad (1)$$

L-இல் மாற்றப்பட்ட வேகம் V_1 எனில்,

$$\frac{V_1}{V} = \frac{n}{1}$$

$$\therefore \quad V_1 = nV$$

$n < 1$ ஆகையால், $V_1 < V$.

$$\therefore \quad V_1^2 < \frac{2\mu}{l}$$

எனவே, வேகம் குறைக்கப்பட்டபின் வால் நட்சத்திரத்தின் பாதை ஒரு நீள்வட்டமாகும். அதன் பேரச்சு $2a$ என்றும் மையவகற்சி e என்றும் கொள்க.

வேகம் குறைக்கப்பட்டபின் L-இல் வேகம் V_1 ஆதலின்,

$$V_1^2 = \mu\left(\frac{2}{l} - \frac{1}{a}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{V_1^2}{V^2} \; \frac{\mu\left(\frac{2}{l} - \frac{1}{a}\right)}{\frac{2\mu}{l}}$$

$$= \left(\frac{2}{l} - \frac{1}{l}\right)\frac{l}{2}$$

$$= 1 - \frac{l}{2a}$$

ஆனால், $\frac{V_1}{V} = n$ ஆதலின்,

$$n^2 = 1 - \frac{l}{2a}$$

அல்லது, $\frac{l}{2a} = 1 - n^2$

அல்லது, $2a = \frac{l}{1 - n^2}$ = புதிய பாதையின் பேரச்சு.

வேகம் குறைக்கப்பட்டபின், நீள்வட்டப் பாதையில் L-இலுள்ள தொடுகோடு பேரச்சுடன் 45° சாய்விலிருக்கும். நீள்வட்டப் பாதையின் செவ்வகலம் l_1 எனில்,

$$vP = \sqrt{\mu \times \text{ஆரைச் செவ்வகலம்}}$$

என்னும் சூத்திரத்திலிருந்து, $P = l \sin 45^\circ = l/\sqrt{2}$ ஆகையால்,

$$V_1 \frac{l}{\sqrt{2}} = \sqrt{\mu \cdot l_1}$$

அல்லது, $V_1^2 \dfrac{l^2}{2} = \mu l_1^2$

அதாவது, $n^2 V^2 \dfrac{l^2}{2} = \mu \dfrac{b^2}{a}$, ஆனால் $V^2 = \dfrac{2\mu}{l}$

$$n^2 \frac{2\mu}{l} \cdot \frac{l^2}{2} = \mu \frac{a^2(1-e^2)}{a}$$

$$n^2 l = a(1-e^2), \text{ ஆனால் } 2a = \frac{l}{1-n^2}$$

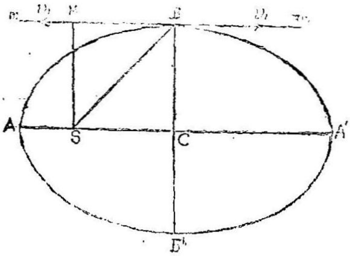
$$\therefore \quad n^2 l = \frac{l}{2(1-n^2)}(1-e^2)$$

$$\therefore \quad 2n^2(1-n^2) = 1-e^2$$

$$e^2 = 1 - 2n^2 + 2n^4$$

அல்லது, $e = \sqrt{(1-2n^2+2n^4)}$

மாதிரி **185.** $3m$, m பொருண்மைகளுள்ள மீளியல்புத் தன்மையற்ற இரு துகள்கள் e எனும் மையவகற்சியுடைய ஒரே நீள்வட்டப் பாதையில் ஒரு குவியத்தை நோக்கிய விசையின் கீழ் எதிர்த் திசைகளில் நகர்ந்து கொண்டிருக்கின்றன. சிற்றச்சின் ஒரு முனையில் அவை மோதி இணைந்து செல்கின்றன. அவற்றின் புதிய பாதையின் மையவகற்சி $\frac{1}{4}\sqrt{(9+7e^2)}$ என்று காட்டுக.



படம் 129

தீர்வு : S என்பது சூரியன். S-ஐ ஒரு குவியமாகக் கொண்ட நீள்வட்டப் பாதையின் பேரச்சு, சிற்றச்சு ஆகியவை முறையே $AA^1 = 2a$, $BB^1 = 2b$ ஆகும். B-யில் இரு துகள்களும் மோதி இணைகின்றன. இரு துகள்களும் ஒரே நீள்வட்டப் பாதையில் செல்வதால் B-யில் அவை மோதும்போது அவற்றின் திசைவேகங்கள் சமமாகயிருக்கும். இச்சம திசைவேகத்தை V_1 என்க.

$$\therefore \quad B\text{-யில் } V_1^2 = \mu\left(\frac{2}{SB} - \frac{1}{a}\right)$$

ஆனல் $SB^2 = SC^2 + CB^2 = a^2e^2 + b^2 = a^2e^2 + a^2(1-e) = a^2$

$$\therefore \quad SB = a$$

$$\therefore \quad V_1^2 = \mu\left(\frac{2}{a} - \frac{1}{a}\right) = \frac{\mu}{a} \qquad \dots \qquad (1)$$

மோதலுக்குப்பின் இணைந்த துகள்களின் பொதுவேகம் V என்க. எனவே, உந்தக் காப்பு விதிப்படி,

$$(3m + m)\,V = 3m\,V_1 - mV_1$$

அதாவது, $4m\,V = 2m\,V_1$

அல்லது, $V = \frac{1}{2}V_1$.

$$\therefore \quad V^2 = \frac{1}{4}V^{12} = \frac{1}{4}\,\frac{\mu}{a}, \text{ (1)இலிருந்து}$$

இப்பொழுது $V^2 < \frac{2\mu}{a}$ ஆகையால், மோதலுக்குப்பின் இணைந்த இரு துகள்களின் பொதுவான இயக்கப் பாதை ஒரு நீள்வட்டமாகும். இப்பொது நீள்வட்டப் பாதையின் பேரச்சு $2a^1$ என்க. B-யில் புதிய நீள்வட்டப் பாதையில்,

$$V^2 = \mu\left[\frac{2}{a} - \frac{1}{a^1}\right]$$

அதாவது, $\frac{\mu}{4a} = \mu\left[\frac{2}{a} - \frac{1}{a^1}\right]$

அல்லது, $\frac{1}{4a} = \frac{2}{a} - \frac{1}{a^1}$

அதாவது, $\frac{1}{a^1} = \frac{2}{a} - \frac{1}{4a} = \frac{7}{4a}$

அல்லது, $a^1 \; \frac{4a}{7} \qquad \dots \qquad (2)$

புதிய பாதையின் செவ்வகலம் l^1 சிற்றச்சு $2b^1$, மையவகற்சி e^1 எனில்,

$$l^1 = \frac{b_1^2}{a^1} = \frac{a_1^2(1-e_1^2)}{a} = a^1(1-e_1^2)$$

P என்பது Sஇலிருந்து B-யில் புதிய பாதையின் தொடுகோட்டிற்குள்ள செங்குத்துத் தூரம் எனில், $P = SM = CB = b$ ஆகும்.

இப்பொழுது புதிய பாதைக்கு $VP = \sqrt{\mu l^1}$ என்று அறிவோம்.

$$\therefore \quad V^2 P^2 = \mu \, l^1$$

$$\frac{\mu}{4a} \cdot b^2 = \mu \cdot a^1 (i - e^{12})$$

$$\frac{b^2}{4a} = \frac{4a}{\pi} (1 - e^{12})$$

$$\therefore \quad (1 - e^{12}) = \frac{7b^2}{16\,a^2}$$

$$= \frac{7\,a^2 (1 - e^2)}{16\,a^2}$$

$$\therefore = \frac{7}{16} (1 - e^2$$

$$\therefore \quad e^{12} = 1 - \frac{7}{16} (1 - e^2)$$

$$= 1 - \frac{7}{16} + \frac{7}{16} e^2$$

$$= 1 - \frac{7}{16} + \frac{7}{16} e^2$$

$$= \frac{9}{16} + \frac{7}{16} e^2$$

$$= \frac{1}{16} (9 + 7e^2)$$

$$\therefore e = \tfrac{1}{4} \sqrt{9 + 7\,e^2}$$

மாதிரி 186. ஒரு பொருள் e மையவகற்சியுடைய ஒரு நீள்வட்டப்பாதையில் ஒரு குவியத்தை நோக்கிய விசையின் கீழ் நகர்ந்து கொண்டிருக்கிறது. மிக அருகிலுள்ள கவியத்தைப் பொருள் அடைந்தபோது மைய விசையானது அடுத்த குவியத்திற்கு மாற்றப்படுகிறது. புதிய பாதையின் மையவகற்சியைக் காண்க.

தீர்வு: $AA^1 = 2a$ என்பது S, S^1 ஆகிய குவயங்களைக் கொண்ட நீள்வட்டப் பாதையின் பேரச்சு. S ஐ விசைமைய

மாகக் கொண்டு நகர்ந்து கொண்டிருக்கும் பொருள் A ஐ அடைந்ததும் மைய விசையானது S இலிருந்து S^1 க்கு மாற்றப் படுகிறது. மையவிசை மாற்றப்படுமுன் A யில் பொருளின் வேகம் v எனில்,

$$v^2 = \mu \left(\frac{2}{SA} - \frac{1}{a}\right)$$

$$= \mu \left[\frac{2}{a(1-e)} - \frac{1}{a}\right]$$

$$= \frac{u}{a}\left(\frac{1+e}{1-e}\right) \quad \cdots \quad (1)$$

விசைமையம் S^1 க்கு மாற்றப்பட்ட கணத்தில் திசைவேகத்தில் உடனடியாக மாற்றமேதுமிருக்காது.

$$S^1A = SC + CA = ae + a = a(1+e).$$

புதிய பாதையின் பேரச்சு $2a^1$ எனில்,

$$v^2 = \mu \left[\frac{3}{S^1A} - \frac{1}{a^1}\right]$$

$$= \mu \left[\frac{2}{a(1+e)} - \frac{1}{a^1}\right]$$

அதாவது, $\dfrac{\mu}{a} \cdot \dfrac{1+e}{1-e} = \mu\left[\dfrac{2}{a(1+e)} - \dfrac{1}{a^1}\right]$,

(1) இலிருந்து.

$$\therefore \frac{1+e}{a(1-e)} = \frac{1}{a^1} \quad \cdots \quad (2$$

விசைமையம் S^1 க்கு மாற்றப்பட்டதும் S_1 என்ற குவியத்திற்கு A ஆனது மிக அருகாமையிலுள்ள கவியமாக யிருக்குமாகை யால், புதிய பாதையின் மைய வகற்சி e^1 எனில்,

$$S^1A = a^1(1 - e'') \text{ ஆகும்.}$$

ஆனால் $S^1A = a(1+e)$

$$\therefore \quad a^1(1-e^1) = a(1+e)$$

அல்லது, $a^1 = \dfrac{a(1+e)}{1-e^1}$

ஆகவே (2) இலிருந்து,

$$\frac{1+e}{a(1-e)} = \frac{2}{a(1+e)} - \frac{(1-e^1)}{a(1+e)}$$

$$= \frac{1+e^1}{a(1+e)}$$

$$\therefore \frac{1+e^1}{1+e} = \frac{1+e}{1+e}$$

அல்லது, $1+e^1 = \frac{(1+e)^2}{1-e}$

$$e^1 = \frac{(1+e)^2}{1-e} - 1$$

$$= \frac{1+2e+e^2-1+e}{1-e}$$

$$= \frac{3e+e^2}{1-e}$$

$$= \frac{e(3+e)}{1-e}.$$

மாதிரி 187. S எனும் குவியத்தை நோக்கிய விசையின் கீழ் ஒரு துகள் ஒரு நீள் வட்டப் பாதையில் நகருகிறது. சிற்றச்சின் ஒரு முனையைத் துகளடைந்ததும் அதன் திசையில் மாற்ற மேதுமின்றி அதன் இயக்க ஆற்றல் இரட்டிக்கப்படுகிறது. துகள் ஒரு பரவளைவுப் பாதையில் நகருமென்று நிறுவுக.

தீர்வு: நீள் வட்டப்பாதையின் பேரச்சு $2a$ என்று கொள்க.

B என்பது சிற்றச்சின் ஒரு முனையெனில், $SB = a$ என்று கண்டோம். எனவே, V என்பது B யில் இயக்க ஆற்றல் இரட்டிக்கப்படுமுன்னர் துகளின் வேகமெனில்,

$$V^2 = \mu \left(\frac{2}{SB} - \frac{1}{a}\right)$$

$$= \mu \left(\frac{2}{a} - \frac{1}{a}\right)$$

$$= \frac{\mu}{a}.$$

துகளின் பொருண்மை m என்க. V_1 என்பது இயக்க ஆற்றல் இரட்டிக்கப்பட்ட பின்னர் துகளின்வேகமெனில்,

$$\frac{1}{2} mV_1^2 = 2 \times \frac{1}{2} mV^2$$

அதாவது, $$V_1^2 = 2V^2$$

$$= \frac{2\mu}{a}$$

ஆகவே, இயக்க ஆற்றல் இரட்டிக்கப்பட்ட பின்னர் துகள் ஒரு பரவளைவுப் பாதையில் இயங்கும்.

பயிற்சி 19

1. ஒரு துகள் ஒரு நீள்வட்டப் பாதையில் அதன் ஒரு குவியத்தை நோக்கிய $\frac{\mu}{(\text{தூரம்})^2}$ எனும் விசையின்கீழ் நகருகிறது. விசை மையத்திலிருந்து r தூரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து அது V என்னும் திசைவேகத்துடன் எறியப்பட்டால், அதன் காலவட்ட நேரம் $\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} \left(\frac{2}{r} - \frac{V^2}{\mu}\right)^{-3/2}$ என்று காட்டுக.

2. ஒரு துகள் $\mu/(\text{தூரம்})^2$ எனும் மைய விசையின்கீழ் நகருகிறது. அது விசை மையத்திலிருந்து R தூரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து எறியப்பட்டுள்ளது. எறிகோணம்

$$\sin^{-1}\left\{\frac{\mu}{VR\left(V^2 - \frac{2\mu}{R}\right)^{\frac{1}{2}}}\right\}$$ எனில், அதன் பாதை ஒரு செவ்வக அதிபரவளைவு என்று காட்டுக.

3. ஒரு நீள்வட்டப் பாதையில் அதன் ஒரு குவியத்தை நோக்கிய விசையின் நகர்ந்து கொண்டிருக்கும் ஒரு துகளின் திசைவேகமானது அதன் ஆரைத் திசையிச்குச் செங்குத்தாக $\frac{\mu}{h}$ எனும் மாருத் திசைவேகம், பேரச்சுக்குச் செங்குத்தாக $\frac{\mu e}{h}$ எனும் மாருத் திசைவேகம் ஆகியவற்றின் கூட்டுத் திசைவேகமாகுமென்று காட்டுக.

4. ஒரு துகள் ஒரு நீள்வட்டப் பாதையில் அதன் ஒரு குவியத்தை நோக்கிய மைய விசையின்கீழ் நகருகிறது. சிற்றச்சின் ஒரு முனையில் அதன் திசை வேகமானது எந்த விட்டத்தின் முனைகளிலும் அதன் திசைவேகங்களின் பெருக்குச் சராசரியாகுமென்று நிறுவுக.

5. 2a நீளப் பேரச்சுடைய ஒரு நீள்வட்டப் பாதையில் ஒரு துகள் நகருகிறது. S, S^1 என்பது அப்பாதையின் குவியங்கள். S-ஐ விசை மையமாகக் கொண்டு T எனும் கால வட்டத்துடன் அது நகர்ந்தாலும் அதன் பாதையில் P எனும் ஒரு புள்ளியில் அதன் திசைவேகம் ஒரே அளவிலேயே இருக்கின்றது.

$$SP = \frac{2a\ T^1}{T + T^1} \text{ என்றும் } S^1P = \frac{2\ aT^1}{T + T^1} \text{ என்றும்}$$

நிறுவுக.

6. ஒரு துகள் ஒரு நீள்வட்டப் பாதையில் அதன் ஒரு குவியத்தை விசை மையமாகக் கொண்டு நகருகிறது. அதன் பாதையில் எந்தப் புள்ளியிலும் அடுத்த குவியத்தைச் சுற்றி அதன் சுழல்வேகம் அப்புள்ளியில் வரையப்படுகின்ற செங்கோட்டின் (Normal) தலைகீழ் வர்க்கத்திற்கேற்ப மாறுபடுமென்று காட்டுக.

7. ஒரு துகள் ஒரு நீள்வட்டப் பாதையில் அதன் ஒரு குவியத்தை விசை மையமாகக் கொண்டு நகருகிறது. அது P எனும் புள்ளியை அடைந்ததும் அதன் வேகம் மாருத வகையில் அதன் திசை ஒரு செங்கோணத்திற்குத் திருப்பப்படுகிறது. துகள் ஒரு நீள்வட்டப் பாதையில் நகருமென்றும், அதன் மைய வகற்சியானது பாதையின் மையத்திலிருந்து P-யின் தூரத்திற்கேற்ப மாறுபடுமென்று காட்டுக.

8. ஒரு நீள் வட்டப் பாதையில் இயங்கிக் கொண்டிருக்கும் ஒரு துகள் குவியத்திலிருந்து r தூரத்திலிருக்கும் போது ஆரைத் திசையியுடன் θ கோணத்தில் v எனும் திசைவேகத்தைக் கொண்டிருந்தால்

$$e^2 \mu^2 = (v^2 r - \mu)^2 \operatorname{Sin}^2 \theta + \mu^2 \cos^2\theta$$

என்று காட்டுக.

9. சூரியனைச் சுற்றி ஒரு தளப் பரவளைவுப் பாதைகளில் நகர்ந்து கொண்டிருக்கும் m_1, m_2 பொருண்மைகளுள்ள இரு துகள்கள் சூரியனிலிருந்து R எனும் பொதுவான தூரத்திலிருக்கும்போது செங்குத்தாக மோதி இணைந்து செல்கின்றன. இணைந்த துகள்களின் அடுத்துள்ள பாதை $\frac{(m + m_2)^2}{2m_1\ m^2} R$ எனும் பேரச்சுடைய ஒரு நீள்வட்டமென்று காட்டுக.

10. ஒரு துகள் ஒரு வட்டப் பாதையில் தலைகீழ் வர்க்க விதியின்கீழ் வட்ட மையத்தை ஈர்ப்பு முடுக்கத்துடன் நகர்ந்து கொண்டிருக்கிறது. அது வட்டத்தில் P எனும் புள்ளியை

அடைந்ததும் அதன் வேகம் மாருதவாறு அதன்திசை α கோணத்தில் திருப்பப்படுகிறது. புதிய பாதை ஒரு நீள்வட்ட மென்றும், அதன் மையவகற்சி Sin α என்றும், P-ஆனது புதிய பாதையின் சிற்றச்சின் ஒரு முனையென்றும் காட்டுக.

11. ஒரு துகள் e எனும் மையவகற்சியுடைய ஒரு நீள் வட்டப் பாதையில் அதன் ஒரு குவியத்தை நோக்கிய μ/r^2 எனும் முடுக்கத்துடன் நகருகிறது. அது ஒரு குவியத்திற்கு மிக அருகாமையிலிருக்கும்போது அதன் முடுக்கமானது நீள்வட்டத் தின் மையத்தை நோக்கிய $\mu^1 r$ எனும் முடுக்கமாக மாற்றப்படு கிறது. அதன் பின்னரும் அத்துகள் அதே நீள்வட்டப் பாதை யில் தொடர்ந்து செல்லுமாயின், $\mu = \mu^1 (1-e)^2 a^3$ என்று காட்டுக. a என்பது நீள்வட்டத்தின் அரைப்பேச்சு.

12. வட்டமெனக் கருதப்படக்கூடிய இயக்கப் பாதையில் ஒரு கோள் திடீரென நிறுத்தப்பட்டால் அதன் காலவட்டத்தைப் போல் $\frac{\sqrt{2}}{8}$ மடங்கு நேரத்தில் அது சூரியனின்மேல் விழுந்து விடுமென்று நிறுவுக.

13. ஒரு கோளின் இயக்கப் பாதையில் எந்தப் புள்ளியிலும் அதன் திசைவேகமானது சூரியனிலிருந்து கோளின இயக்கப் பாதையின் பேரச்சின் நீளத்திற்குச் சமமான தூரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியில் ஓய்வு நிலையிலிருந்து அக்கோள் இயக்கப் பாதையி லுள்ள அப்புள்ளிவரை விழும்போது பெறக்கூடிய திசைவேகத் திற்குச் சமமாகுமென்று காட்டுக.

14. சூரியனைச் சுற்றிப் பரவளைவுப் பாதையில் இயங்கிக் கொண்டிருக்கும் ஒரு வால் நட்சத்திரம் சூரியனுக்கு மிக அருகில் வந்ததும் அதன் இயக்க ஆற்றல் எவ்வகையிலும் அதிகப்படா மலும் குறையாமலும் இரு சம பாகங்களாகப் பிளந்து விடுகிறது. பிளவுபட்ட பகுதிகளுள் ஒன்று ஒரு வட்டப் பாதையில் நகர்ந் தால் மற்றது மையவகற்சி 2 உடன்கூடிய ஒரு ஆதிபரவளைவுப் பாதையில் நகருமென்று காட்டுக.

15. குவியத்தை நோக்கிய மைய விசையின்கீழ் ஒரு பொருள் ஒரு நீள்வட்டப் பாதையில் நகருகிறது. சிற்றச்சின் ஒரு முனையை அடைந்ததும் அதன் இயக்கத் திசையில் ஒரு வெடிப்பு ஏற்பட்டு சம பொருண்மைகளுடைய இரு பாகங் களாகப் பிளவுபடுகின்றது. ஒரு பகுதி பரவளைவுப் பாதையிலும், மற்றது நீள்வட்டப் பாதையிலும் நகர்ந்தால், புதிய நீள்வட்டத் தின் பேரச்சுக்கும், மூல நீள்வட்டத்தின் பேரச்சுக்குமுள்ள விகிதம் $\sqrt{2} + 1 : 4$ என்று காட்டுக.

11. நிலைமத் திருப்புத்திறன்

(Moment of Inertia)

முடிவுறு பரிமாணங்களுடன் கூடிய பொருட்களின் நிலைகள், இயக்கங்கள் ஆகியவை பற்றி ஆராயுமிடத்து அப்பொருட்கள் பற்றிய இருவித தன்மைகள் வேண்டற்படுகின்றன. இவ்விரு தன்மைகளும் அப்பொருட்களின் வடிவியல் அமைப்புக்களையே பெரிதும் சார்ந்திருந்த போதிலும், இயந்திரவியலுக்குத் தேவையற்றவையென தள்ளிவிட முடியாதவை யாகும். அவற்றுள் ஒன்று சடப்பொருட்களின் புவியீர்ப்பு மையங்களாகும், சடப் பொருட்களின் புவியீர்ப்பு மையங்களை நிர்ணயிக்கும் முறைகள் பற்றியும், இயந்திரவியலில் புவியீர்ப்பு மையத்தின் பங்குபற்றியும் ''நிலையியல்'' பகுதியில் விரிவாக ஆராய்ந்தோம். இரண்டாவது, சடப்பொருட்களின் நிலைமத் திருப்புத் திறன்கள் எனப் படும் வடிவியல் தன்மையாகும். பொருட்களின் இடப்பெயர்ச்சியின் போது அவற்றின் பொருண்மைகள் எவ்வாறு பங்கு பெறுகின்றனவோ அதுபோன்று சுழலும் பொருட்கள் பற்றிய கொள்கைகளில் நிலைமத் திருப்புத்திறன்கள் முக்கிய பங்குவகிக்கின்றன. ஆகவே, சடப்பொருட்களின் நிலைமத் திருப்புத் திறன்கள் பற்றி இங்கு ஆராய்வோம்.

நிலைமத் திருப்புத்திறன்—வரையறை
(Moment of Inertia—Definition)

ஒரு நேர்கோட்டிலிருந்து m பொருண்மையுள்ள ஒரு துகளின் செங்குத்துத் தூரம் r எனில், mr^2 என்பது அந்நேர் கோட்டைப் பற்றி அத்துகளின் நிலைமத் திருப்புத்திறன் என்று வரையறுக்கப்படுகிறது. ஒரு சடப்பொருளானது $m_1, m_2, \ldots, m_n$ ஆகிய பொருண்மைகளுள்ள துகள்களைக் கொண்டு அமைந்திருப்பின், ஒரு நேர்கோட்டிலிருந்து அத் துகள்களின் செங்குத்துத் தூரங்கள் முறையே $r_1, r_1^2 \ldots, r_n$ எனில், அந்நேர் கோட்டைப் பற்றி அத்துகள்களின் நிலைமத் திருப்புத்திறன் களின் மொத்தமானது அந்நேர் கோட்டைப் பற்றி அச்சடப் பொருளின் நிலைமத் திருப்புத்திறனாகும். அதாவது Σmr^2

என்பது அந்த நேர்கோட்டைப் பற்றி அச்சடப் பொருளின் நிலைமத் திருப்புத் திறனாகும்.

சடப்பொருளிலடங்கியுள்ள துகள்கள் எண்ணற்றவையாயும், தொடர்ச்சியாய் பரவியுமிருந்தால், நிலைமத் திருப்புத் திறனைத் தொகையீட்டின் மூலம் காணலாம்.

நிலைமத் திருப்புத்திறன் என்பது "நிலை நெம்புதிறன் என்றும், "சடத்துவத் திருப்புத்திறன்" என்றும் வழங்கப் படுகிறது.

சுழியாரை (Radius of Gyration)

ஒரு சடப் பொருளின் பொருண்மை M என்றும் ஒரு நேர் கோட்டைப் பற்றி அதன் நிலைமத் திருப்புத்திறன் Σmr^2 என்றும் கொள்க.

$\Sigma mr^2 = Mk^2$ என்றிருக்குமாறு k என்னும் கணியம் நிர்ணயிக்கப்படுமாயின் k என்பது அந்நேர்கோட்டைப்பற்றி அப் பொருளின் "சுழியாரை" (radius of gyration) என்றழைக்கப் படுகிறது.

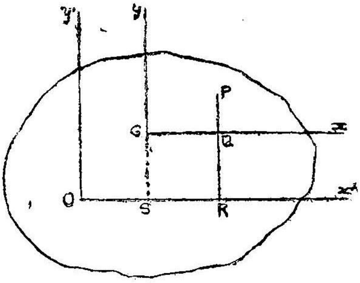
அ-ரா-வி. முறையில் M என்பது ராத்தல் எனும் அலகினாலும், k என்பது அடி எனும் அலகினாலும். குறிப்பிடப்படுவதால் நிலைமத் திருப்புத்திறனானது ராத்தல் (அடி)^2 என்னும் அலகினால் குறிப்பிடப்படும். இதுபோன்று செ. கி. வி. முறையில் நிலைமத் திருப்புத் திறனானது கிராம் (செ. மீ.)^2 என்னும் அலகினாலும் குறிப்பிடப்படும்.

இணையச்சுத்தேற்றம் (Theorem of Parallel Axes)

I என்பது M பொருண்மையுள்ள ஒரு பொருளின் சடத்துவ மையம் (centre of inertia) வழியே செல்லும் ஓர் அச்சை (நேர் கோட்டை)ப்பற்றிய நிலைமத் திருப்புத்திறன் ; I' என்பது அவ்வச்சுக்கு d தூரத்திலுள்ள ஓர் இணையச்சைப் பற்றிய திருப்புத் திறன் எனின், $I^1 = I + Md^2$ ஆகும்.

நிறுவல்: M பொருண்மையுள்ள ஒரு தகட்டைக் கருதுக.

G என்பது அதன் புவியீர்ப்பு மையம் (சடத்துவமையம்) என்று கொள்க.



படம் 130

Gx, Gy என்பன G வழியே செல்லும் இரு செங்குத் தச்சுக்கள். Ox^1, Oy^1 என்பன அத்தகட்டிலுள்ள O என்னும் ஏதேனுமொரு புள்ளி வழியே முறையே Gx, Gy ஆச்சுக்களுக்கு இணையான இரு செங்குத் தச்சுகள். Gx, Gy ஆகிய அச்சுக்களைப் பற்றிய நிலைமத் திருப்புத் திறன்கள் முறையே Ix, Iy என்றும், Ox, Oy ஆகிய இணையச்சுக்கள் பற்றிய நிலைமத் திருப்புத்திறன்கள் முறையே I^1x, I^1y என்றும் கொள்க.

P என்பது தகட்டில் m பொருண்மையுள்ள ஒரு துகள். Ox^1, Oy^1 அச்சுக்களைப் பொறுத்து P யின் அச்சுத்தூரங்கள் (x^1, y^1) என்றும், G-யின் அச்சுத் தூரங்கள் $(\bar{x}, \bar{y})$ என்றும் கொள்க. Gx, Gy ஆகிய அச்சுக்களைப் பொறுத்து P யின் அச்சுத் தூரங்கள் (x, y) என்றும் கொள்க.

$$\therefore \quad x^1 = OR = OS + SR = (\bar{x} + x)$$

$$y^1 = PR = PQ + QR = (y + \bar{y})$$

வரையறையின்படி,

$$I^1 y = Oy^1 \text{ ஐப்பற்றிய நிலைமத் திருப்புத்திறன்}$$

$$= \Sigma m . x^{12}$$

$$= \Sigma m\,(x + \bar{x})^2$$

$$= \Sigma m\,(x^2 + 2\,\bar{x}\,x + \bar{x}^2)$$

$$= \Sigma mx^2 + 2\,\bar{x}\,.\,\Sigma mx + \bar{x}^2 . \Sigma m$$

$$= \Sigma\, Ix + 2\,\bar{x}\,\Sigma mx + \bar{x}^2 .\, M$$

ஆனால் $\dfrac{\Sigma mx}{\Sigma x}$ என்பது Gx, Gy ஆகிய அச்சுக்களைப் பொறுத்து புவியீர்ப்பு மையம் G யின் x அச்சுத் தூரமாகையால் பூச்சியமாகும் ... $\Sigma mx = O$.

$$\therefore \quad I^1 y = Iy + M\bar{x}^2$$

ஆனால் $\bar{x} = OS = Gy$ இலிருந்து Oy^1 ஏனும் இணையச்சின் செங்குத்துத் தூரம்

$= dy$ என்க.

$\therefore\ I^1 y = Iy + Mdy.$

இதுபோல், $I^1 x = Ix + Mdx$, $dx = Gx$ இலிருந்து Ox^1 இன் தூரம்.

குறிப்பு: தகட்டிற்குச் செங்குத்தாக O வழியே செல்லும் அச்சைப் பற்றிய நிலைமத் திருப்புத்திறன் காணல்:

G வழியே செல்லும் செங்குத்தச்சைப் பற்றிய நிலைமத் திருப்புத்திறன் $= \Sigma m.\ GP^2$

$$= \Sigma m\,(GQ^2 + PQ^2)$$

$$= \Sigma m\,(x^2 + y^2)$$

O வழிச் செங்குத்தச்சைப் பற்றிய நி. தி. $= \Sigma m.\ OP^2$

$$= \Sigma m\,(OR^2 + PR^2)$$

$$= \Sigma m\,(x^{12} + y^{12})$$

$$= \Sigma m\,[\,(x + \bar{x})^2 + (y + \bar{y})^2\,]$$

$$= \Sigma m\,(\bar{x}^2 + \bar{y}^2) + \Sigma m\,(x^2 + y^2) + 2\,\bar{x}\,\Sigma mx + 2\bar{y}\,\Sigma my$$

ஆனால் $\Sigma mx = O = \Sigma my$.

$= \Sigma\, m\ (OS^2 + GS^2) + G$ வழிச் செங்குத்தச்சைப் பற்றிய நி. தி.

$= \Sigma\, m.\ OG^2 + G$ வழிச் செங்குத்தச்சைப் பற்றிய தி. தி.

$= M.\ OG^2 + G$ வழிச் செங்குத்தச்சைப் பற்றிய தி. தி.

செங்குத்தச்சுத் தேற்றம் (Theorem of Perpendicular axes)

Ix, Iy என்பன முறையே Ox, Oy எனும் இரு செங்குத்து அச்சுக்களைப் பற்றி ஒரு தகட்டின் நிலைமத் திருப்புத் திறன்களெனில், O வழியே தகட்டிற்குச் செங்குத்தாகயிருக்கும் ஒரு அச்சைப் பற்றிய நிலைமத் திறப்புத்திறன் $Ix + Iy$ ஆகும்.

நிறுவல்: P என்பது தகட்டின் ஒரு துகள். அதன் பொருண்மை m என்க. Ox, Oy ஆகிய செங்குத்தக்களைப் பொறுத்து P-யின் அச்சுத் தூரங்கள் (x, y) என்க.

$Iy = Oy$-ஐப் பற்றிய நி. தி. $= \Sigma\, mx^2$

$Ix = Ox$-ஐப் பற்றிய நி. தி. $= my^2$.

O-வழிச் செங்குத்தச்சைப் பற்றிய நி.தி. $= \Sigma m. OP^2$

$$= \Sigma m (x^2 + y^2)$$
$$= \Sigma mx^2 + \Sigma my^2$$
$$= Iy + Ix$$

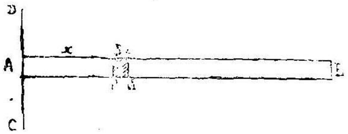
குறிப்பு : இணையச்சுத் தேற்றம் எந்தச் சடப்பொருளுக்கும் பொருந்துமென்பதையும், செங்குத்தச்சுத் தேற்றம் தளமாக அமைந்துள்ள தகடுகளுக்கு மட்டுமே பொருந்துமென்பதைக் கவனிக்கவும்.

சில சாதாரண பொருட்களின் நிலைமத்திருப்பத்திறன்கள்

1. $2a$ நீளமுள்ள சீரான மெல்லிய கோலின் நி-தி.

வகை (i) கோலின் ஒரு முனை வழியே செல்லும் செங்குத்தச்சைப் பற்றிய நி. தி.

$2a$ நீளமுள்ள AB என்னும் கோலின் பொருண்மை M என்க. எனவே, ஓர் அலகு நீளத்தின் பொருண்மை $\frac{M}{2a}$ ஆகும். கோலின் முனை A வழியே கோலுக்குச் செங்குத்தாக அமைந்துள்ள CD என்னும் அச்சைப் பற்றிய நி.தி. காணவேண்டும்.



படம் 131

முனை A-யிலிருந்து x அலகு தூரத்தில் δx பருமனுள்ள ஒரு துகளைக் கருதுக.

இத்துகளின் பொருண்மை $m = \frac{M}{2a}\delta x$.

CD-யிலிருந்து இத்துகளின் தூரம் $= x$.

$\therefore$ CD-ஐப் பற்றி இத்துகளின் நி. தி. $= mx^2 = \frac{M}{2a} x^2 \delta x$.

$\therefore$ CD-ஐப் பற்றி கோலின் நி. தி. $= \int_O^{2a} \frac{M}{2a} x^2 dx$

$$= \frac{M}{2a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_O^{2a}$$

$$= \frac{M}{2a} \cdot \frac{8a^3}{3}$$

$$= M \cdot \frac{4a^2}{3}$$

வகை (ii) கோலின் நடுப்புள்ளி வழிச் செங்குத்தச்சைப் பற்றி நி. தி.

கோலின் நடுப்புள்ளியிலிருந்து இரு முனைகளும் a தூரத்திலிருக்குமாகையால் x-இன் எல்லை $x = -a$-யிலிருந்து $x = a$ வரையாகும்.

$\therefore$ நடுப்புள்ளி வழி அச்சைப்பற்றி கோலின் நி. தி.

$$= \int_{-a}^{a} \frac{M}{2a} x^2 \, dx$$

$$= \frac{M}{2a} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-a}^{a}$$

$$= \frac{M}{2a} \cdot \frac{2a^3}{3}$$

$$= M \frac{a^2}{3}$$

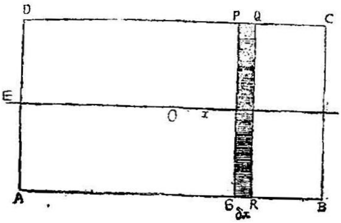
2. செவ்வகத் தகட்டின் நிலைமத்திருப்புதிறன்

$ABCD$ என்பது M பொருண்மையுள்ள ஒரு செவ்வகத் தகடு. $AB = 2a$; $AD = 2b$.

$\therefore$ ஒரு அலகுப் பரப்பளவின் பொருண்மை $= \frac{M}{4ab}$.

O என்பது தகட்டின் மையம்.

EF என்பது O வழியே AB-க்கு இணையான ஒரு அச்சு.



படம் 132

$PQRS$ என்பது O-விலிருந்து x அலகு தூரத்தில் AD-க்கு இணையான δx அகலம் கொண்ட ஒரு நீண்ட சதுரத் துண்டு.

இத்துண்டின் பரப்பு $= 2b \cdot \delta x$.

ஆகவே, இத்துண்டின் பொருண்மை $= \dfrac{M}{4\,ab}\, 2b\, \delta x = \dfrac{M}{2a}$

$\delta x = m$ என்க.

EF என்பது இத்துண்டின் நடுப்புள்ளி வழியே செல்லும் ஒரு செங்குத்து அச்சு ஆகும். எனவே, இத்துண்டின் $2b$ நீளமும், m பொருண்மையுமுள்ள ஒரு மெல்லிய கோலெனக் கருதுவோமானால்,

இச்சிறு துண்டின் நி. தி. $= m.\ \dfrac{b^2}{3} = \dfrac{M}{2a}\,\delta x.\ \dfrac{b^2}{3}$ ஆகும்.

ஆனால், x-இன் மதிப்பு O-க்கு இருபுறமும் a தூரத்தில் பரவிக் கிடப்பதால், EF-ஐப் பற்றிச் செவ்வகத் தகட்டின் நி. தி.

$$= \int_{-a}^{a} \frac{M}{2a}\,\frac{b^2}{3}\,dx$$

$$= \frac{M}{2a}\cdot\frac{b^2}{3}\Big[\,x\,\Big]_{-a}^{a}$$

$$= \frac{M}{2a}\cdot\frac{b^2}{3}\,[2a]$$

$$= M\,\frac{b^2}{3}$$

இதுபோல், O வழியே AD-க்கு இணையான அச்சைப் பற்றிச் செவ்வகத் தகட்டின் நி. தி. $= M\ \dfrac{b^2}{3}$ ஆகும்.

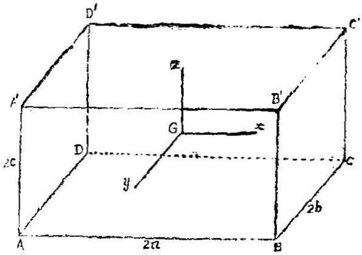
ஆகவே, செங்குத்தச்சுத் தேற்றப்படி செவ்வகத் தகட்டின் மையம் வழியே தகட்டிற்குச் செங்குத்தாக அச்சைப்பற்றி செவ்வகத் தகட்டின் நி. தி.

$$= M\,\frac{a^2}{3} + M.\ \frac{b^2}{3}$$

$$= \frac{M}{3}\,(a^2 + b^2)$$

3. செவ்வகத் திண்மத்தின் நி. தி.
(M. I. of a rectangular parallelopiped)

செவ்வகத் திண்மத்தின் நீளம் $AB = 2a$, அகலம் $BC = 2b$, உயரம் $AA^1 = 2C$ என்று கொள்க. G என்பது அதன் திணிவு மையம். Gx, Gy, GZ என்பன முறையே AB, BC, AA^1 ஆகிய ஓரங்களுக்கு இணையான செங்குத்து அச்சுக்கள்.



படம் 133

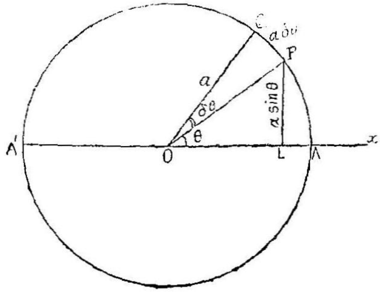
செவ்வகத் திண்மத்தினை Gxக்குச் செங்குத்தாக எண்ணற்ற பல மெல்லிய செவ்வகச் சீவல்களாகச் சீவுக. ஒவ்வொரு சீவலும் $2b$, $2C$ பக்கங்களுள்ள செவ்வகத்தகடு போன்றிருக்கும். ஒரு சீவலின் பொருண்மை m எனில், Gx ஐப்பற்றி அதன் நி. தி. $\frac{m}{3}(b^2 + C^2)$ ஆகும்.

ஆகவே, செவ்வகத் திண்மத்தின் பொருண்மை M எனில், Gx ஐப் பற்றி அதன் நிலைமத் திருப்புத்திறன் $\frac{M}{3}(b^2 + C^2)$ ஆகும்.

இதுபோல், Gy ஐப் பற்றிய நி. தி. $= \frac{M}{3}(C^2 + a^2)$,

GZ ஐப்பற்றிய நி. தி. $= \frac{M}{3}(a^2 + b^2)$.

4. a ஆரையுள்ள சீரான வட்ட வளையத்தின் நி. தி.



படம் 134

AA^1 என்பது a ஆரையுடன் கூடிய ஒரு வட்ட வளையத்தின் விட்டம். AA^1 ஐப் பற்றிய வளையத்தின் நிலைமத் திருப்புத்திறன் காண்போம்.

δS எனும் நீளமுடைய PQ எனும் மிகச் சிறிய விற்துண்டைக் கருதுக. விட்டத்துடன் OP, OQ ஆகிய ஆரைகளின் சாய்வுகள் முறையே θ, $(\theta + \delta\theta)$ என்க.

$\therefore \quad P\hat{O}Q = \delta\theta.$

$\therefore \quad$ வில் $PQ = a\,\delta\theta.$

வளையத்தின் பொருண்மை M என்றும், ஒரு அலகு நீள வளையத்தின் பொருண்மை ρ என்றும் கொள்க.

வளையத்தின் நீளம் $2\pi a$ ஆகையால், $\rho = \dfrac{M}{2\pi a}$ ஆகும்.

$\therefore \quad m = PQ$-வின் பொருண்மை $= \rho.\, a\,\delta\theta.$

விட்டம் AA^1 இலிருந்து PQ-இன் செங்குத்துத்தூரம் $= PL = a \sin\theta = r$ என்க.

$\therefore \quad AA^1$ ஐப்பற்றி PQ-வின் நி. தி. $= mr^2$

$$= \rho a\,\delta\theta.\,(a \sin\theta)^2$$

$$= \rho a^8.\, \sin^2\theta\,\delta\theta.$$

முழு வளையமும் $\theta = O$ முதல் $\theta = 3\pi$ வரை அமைந்திருப்பதால், AA^1 என்னும் விட்டத்தைப்பற்றி வளையத்தின் நி. தி-

$$= \int_O^{2\pi} \rho a^3.\, \sin^2\theta\, d\theta$$

$$= \rho a^3.\, 4.\int_O^{\pi/2} \sin^2\theta.\, d\theta$$

$$= \frac{M}{2\pi a}.\, a^3.\, 4..\, \tfrac{1}{2}\,\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{Ma^2}{2}$$

குறிப்பு: $AA^1\, BB^1$ என்பன இரு செங்குத்து விட்டங்களெனில், இவ்விரு விட்டங்களுள் ஒவ்வொன்றைப் பற்றியும் வளையத்தின் நி. தி. $\dfrac{Ma^2}{2}$ ஆகும்.

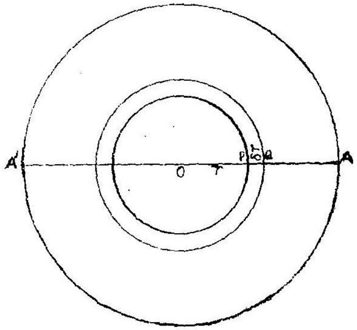
ஆகவே, வளையத்தின் மையத்தின் வழியே வளையத்தின் தளத்திற்குச் செங்குத்தாகச் செல்லும் அச்சைப் பற்றிய நி. தி. $= \dfrac{Ma^2}{2} + \dfrac{Ma^2}{2} = Ma^2$ ஆகும்.

5. வட்டத் தகட்டின் நிலைமத்திருப்புத்திறன் (M. I. of a circular Plate)

AA^1 என்பது a ஆரையுள்ள ஒரு வட்டத் தகட்டின் விட்டம். O என்பது அதன் மையம். AA^1 ஐப் பற்றிய நிலைமத் திருப்புத்திறன் காண்போம்.

வட்டத் தகட்டின் பொருண்மை M என்றும், ஒரு சதுர அலகுப் பரப்பளவின் பொருண்மை ρ என்றும் கொள்க.

$$\therefore \quad \rho = \frac{M}{\pi a^2}.$$



படம் 135

வட்ட மையம் O-வுலிருந்து r தூரத்தில் δr அகலமுள்ள ஒரு கங்கணத்தைக் கருதுக. இதை r ஆரையுள்ள வளையமாகக் கருதலாம். இவ்வளையத்தின் பரப்பு $= \pi (r + \delta r)^2 - \pi r^2$

$$= \pi \cdot 2r\delta r, \text{ } (\delta r)^2 \text{ புறக்கணிக்கப்பட்டுள்ளது.}$$

$$= 2\pi r \delta r.$$

$\therefore$ வளையத்தின் பொருண்மை $m = \rho \cdot 2\pi r \delta r$.

இவ்வளையத்தின் ஆரை r ஆகையால், AA^1 என்னும் விட்டத்தைப்பற்றி அதன் நிலைமத் திருப்புத்திறன் $= m \dfrac{r^2}{2}$

$$= \rho \cdot 2\pi r \, \delta r \cdot \frac{r^2}{2}$$

$$= \rho \cdot \pi \cdot r^3 \, \delta r.$$

இவ்வளையத்தைப் போன்ற எண்ணற்ற வளையங்கள் மையத்திலிருந்து விளிம்பு வரை பரவியிருக்குமாதலின் r இன் எல்லைகள் $r = O$ முதல் $r = a$ வரையாகும்.

$$\text{ஆகவே, விட்டம் } AA^1 \text{ ஐப் பற்றிய நி. தி.} = \int_O^a \rho \pi r^3 \, dr$$

$$= \rho\pi . \left[\frac{r^4}{4}\right]_O^a$$

$$= \frac{M}{\pi a^2} . \pi . \frac{a^4}{4}$$

$$= \frac{Ma^2}{4}.$$

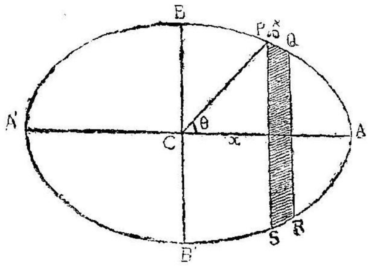
குறிப்பு - AA^1, BB^1 என்பன வட்டத் தகட்டின் இரு செங்குத்து விட்டங்களெனில், இவ்விரு விட்டங்களுள் ஒவ்வொன்றைப் பற்றியும் தகட்டின் நி. தி, $\frac{Ma^2}{4}$ ஆகும்.

ஆகவே, தகட்டின் மையம் வழியே தகட்டிற்குச் செங்குத்தான அச்சைப் பற்றிய நிலைமத் திருப்புத்திறன் =

$$\frac{Ma^2}{4} + \frac{Ma^2}{4} = \frac{Ma^2}{2} \text{ ஆகும்.}$$

6. நீள்வட்டத் தகட்டின் நி. தி. (M. I. of an elliptic disc)

$AA^1 = 2a$, $BB^1 = 2b$ என்பன C-ஐ மையமாகக் கொண்ட ஒரு நீள்வட்டத் தகட்டின் பேரச்சு, சிற்றச்சு ஆகும். முதலில் பேரச்சைப் பற்றிய நி. தி. காண்போம்.



படம் 136

M என்பது நீள்வட்டத் தகட்டின் பொருண்மையென்றும், ρ என்பது ஒரு சதுர அலகுப் பரப்பளவின் பொருண்மையென்றும் கொள்க.

AA^1க்-குச் செங்குத்தாக C-யிலிருந்து x தூரத்தில் δx அகலமுள்ள $PQRS$ என்னும் ஒரு சிறு செவ்வகலத் துண்டினைக் கருதுக. $P = (x, y)$ என்க.

P-யின் மையவகற்சிக் கோணம் θ எனில்,

$x = a \cos \theta$, $y = b \sin \theta$ ஆகும்.

$\therefore \quad \delta x = - a \sin \theta . \delta\theta$

$= a \sin \theta \ \delta\theta$ (அளவில் மட்டும்)

நீள்வட்டத்தின் பரப்பு $\pi\, ab$ ஆகையால், $\rho = \frac{M}{\pi\, ab}$ ஆகும்.

PQ-வின் பரப்பளவு $= PQ \,.\, \delta x$

$$= 2y \,.\, \delta x$$

$$= 2b \sin \theta \,.\, a \sin \theta\, \delta\theta$$

$$= 2ab \sin^2\theta\, \delta\theta$$

$\therefore \quad m = PQRS$-இன் பொருண்மை $= \rho \,.\, 2ab \sin^2\theta\, \delta\theta.$

இப்பொழுது $PQRS$-ஐ ஒரு மெல்லிய கோலாகவும், பேரச்சு AA^1-ஐ அக்கோலின் மையம் வழியே செங்குத்தாகச் செல்லும் அச்சு என்றும் கொள்ளலாம்.

அக்கோலின் நீளம் $= 2y = 2b \sin \theta$ ஆகையால்,

AA^1-ஐப் பற்றி $PQRS$-இன் நி. தி. $= m \,.\, \frac{y^2}{3}$

$$= \rho \,.\, 2ab \,.\, \sin^2\theta\, \delta\theta .\ \frac{(b \sin \theta)^2}{3}$$

$$= \rho \,.\, \frac{2\, ab^3}{3} \sin^4 \theta\, \delta\theta.$$

நீள்வட்டத் தகட்டினை $PQRS$-ஐப் போன்று எண்ணற்ற பல நுண்ணிய துண்டுகளாகப் பிரிக்கலாம். இத்துண்டுகள் யாவும் முனை A-யிலிருந்து முனை A^1வரை பரவியிருக்குமாகையால் θ-ன் எல்லை மதிப்புக்கள் $\theta = O$ இலிருந்து $\theta = \pi$ வரையாகும்

ஆகவே, AA^1-ஐப் பற்றி நீள்வட்டத் தகட்டின் நி. தி.

$$= \int_O^{\pi} \rho \,.\, \frac{2\, ab^3}{3} \,.\, \sin^4 \theta\, d\theta.$$

$$= \rho \,.\, \frac{2\, ab^3}{3} \,.\, 2 \int_O^{\pi/2} \sin^6\theta\, d\theta$$

$$= \frac{M}{\pi\, ab} \,.\, \frac{2\, ab^3}{3} \,.\, 2 \,.\, \tfrac{3}{4} \,.\, \tfrac{1}{2} \,.\, \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{M\, b^2}{4}$$

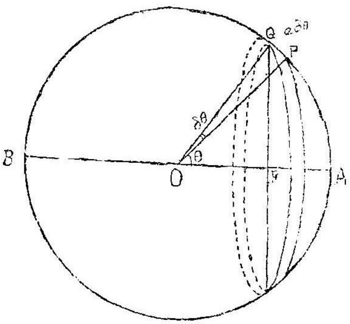
இதுபோல், சிற்றச்சைப் பற்றிய நி.தி. $= \frac{Ma^2}{4}$

ஆகவே, தகட்டின் மையம் வழியே செல்லும் செங்குத்தச்சைப் பற்றிய நிலைமத் திருப்புத்திறன்

$$= \frac{Ma^2}{4} + \frac{Mb^2}{4} = \frac{M}{4}(a^2 + b).$$

7. உள்ளீடற்ற கோளத்தின் நிலைமத்திருப்புத்திறன் (M. I. F. of hollow sphere)

AB என்பது a ஆரையுள்ள ஓர் உள்ளீடற்ற கோளத்தின் விட்டம். O என்பது அதன் மையம் ஓர் அரை வட்ட வில்லானது அதன் எல்லை விட்டத்தைப்பற்றிச் சுற்றப்படும்போது பிறப்பிக்கப்படுகின்ற உருவமே உள்ளீடற்ற கோளமாகும். இங்கு APB என்னும் அரை வட்டவில் AB-யைப் பற்றிச் சுற்றப்படுவதால் இவ்வுள்ளீடற்ற கோளம் பிறப்பிக்கப்பட்டிருப்பதாகக் கொள்க.



படம் 137

$PQ = \delta S$ எனும் ஒரு சிறு விற்துண்டினைக் கருதுக. $A\hat{O}P = \theta$ என்றும், $A\hat{O}Q$ $(\theta + \delta\theta)$ என்றும் கொள்வோமாயின், $PQ = a\,\delta\theta$ ஆகும். இவ்வில்லானது விட்டம் AB-யைப் பற்றிச் சுற்றப்படின் $PR = a \sin\theta$-ஐ ஆரையாகக் கொண்ட ஒரு வட்ட வளையம் பிறப்பிக்கப்படும். இவ்வளையத்தின் மேற்பரப்பளவு $= 2\pi\,(a \sin\theta).\, a\delta\theta = 2\pi\, a^2 \sin\theta\, \delta\theta$.

P என்பது ஒரு சதுர அலகுப் பரப்பளவின் பொருண்மையெனில்,

m = வளையத்தின் பொருண்மை $= \rho \cdot 2\pi\, a^2 \sin\theta\, \delta\theta$.

ஆனால் M என்பது உள்ளீடற்ற கோளத்தின் பொருண்மையெனில், கோளத்தின் மேற்பரப்பளவு $4\pi a^2$ ஆதலின்,

$$\rho = \frac{M}{4\pi a^2} \text{ ஆகும்.}$$

r = வளையத்தின் ஆரை $= a \sin\theta$.

ஆகவே, வளையத்தின் மையம் வழியே செல்லும் AB என்னும் அச்சைப் பற்றி வளையத்தின் நிலைமத் திறப்புத்திறன் $= mr^2$

$$= \rho \cdot 2\pi a^2 \sin\theta\, \delta\theta \cdot (a \sin\theta)^2$$
$$= \rho \cdot 2\pi a^4 \sin^3\theta\, \delta\theta.$$

அரைவட்ட வில்லானது A-யிலிருந்து B வரையிருப்பதால் θஇன் மதிப்பு O முதல் π வரை பரவியிருக்கும்.

ஆகவே, உள்ளீடற்ற கோளத்தின் நி. தி.

$$= \int_O^\pi \rho \cdot 2\pi a^4 \sin^3\theta\, d\theta$$

$$= \rho\, 2\pi\, a^4 \cdot \int_O^\pi \sin^3\theta\, d\theta$$

$$= \frac{M}{4\pi a^2} \cdot 2\pi\, a^4 \cdot 2 \int_O^{\pi/2} \sin^3\theta\, d\theta$$

$$= Ma^2 \cdot \tfrac{2}{3}$$

$$= \tfrac{2}{3} Ma^2.$$

8. திண்மக் கோளத்தின் நிலைமத் திருப்புத்திறன் (M. I. of a solid sphere)

a ஆரையும் M பொருண்மையுள்ள ஒரு திண்மக் கோளத்தின் நிலைமத் திருப்புத்திறனைக் காணவேண்டுமெனக் கொள்வோம். இத் திண்மக் கோளமானது O-ஐ மையமாகவும் $r_1, r_2, r_3 \ldots\ldots, a$ ஆகியவற்றை ஆரைகளாகவும் கொண்ட எண்ணற்ற பல உள்ளீடற்ற கோளங்களைக் கொண்டமைந்ததெனக் கொள்ளலாம். $r, r + \delta r$ ஆகிய ஆரைகளுக்குட்பட்ட உள்ளீடற்ற கோளத்தைக் கருதுக.

இதன் கன அளவு $= \frac{4}{3}\pi (r + \delta r)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3$

$$= \tfrac{4}{3}\pi\, [r^3 + 3r^2\, \delta r + 3r\, (\delta r)^2 + (\delta r)^3 - r^3]$$

$= \dfrac{4\pi}{3}\, [3r^2\, \delta r]$, δr மிகச் சிறியதாதலின் $(\delta r)^2$, (δr) புறக்கணிக்கப்பட்டுள்ளன.

$$= 4\pi r^2\, \delta r.$$

ρ என்பது ஒரு கன அலகுத் திண்மத்தின் பொருண்மையெனில்,
$m =$ இவ்வுள்ளீடற்ற கோளத்தின் பொருண்மை $= \rho \cdot 4\pi r^2 \delta r.$

ஆனல், M என்பது திண்மக் கோளத்தின் பொருண்மையெனில், அதன் கன அளவு $\frac{4}{3}\pi a^3$ ஆதலின்,

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi a^2} = \frac{3M}{4\pi a^3} \text{ ஆகும்.}$$

r = இவ்வுள்ளீடற்ற கோளத்தின் ஆரை.

ஆகவே, இவ்வுள்ளீடற்ற கோளத்தின் ஒரு விட்டம் பற்றிய

$$\begin{aligned} \text{நி. தி.} &= \tfrac{2}{3} mr^2 \\ &= \tfrac{2}{3}(\rho \cdot 4\pi r^2 \delta r) \cdot r^2 \\ &= \rho \cdot \tfrac{8}{3}\pi r^4 \delta r. \end{aligned}$$

இதுபோன்ற எண்ணற்ற உள்ளீடற்ற கோளங்களின் ஆரைகள் கோள மையத்திலிருந்து திண்மக் கோளத்தின் மேற்பரப்பு வரை பரவிக்கிடக்குமாகையால் r-இன் எல்லை மதிப்புக்கள் $r = O$ முதல் $r = a$ வரையாகும்.

∴ திண்மக் கோளத்தின் ஒரு விட்டம் பற்றிய நி. தி.

$$\begin{aligned} &= \int_O^a \rho \cdot \tfrac{8}{3}\pi r^4 \, dr \\ &= \rho \cdot \tfrac{8}{3}\pi \cdot \int_O^a r^4 \, dr \\ &= \frac{3M}{4\pi a^3} \cdot \tfrac{8}{3}\pi \cdot \left[\frac{r^5}{5}\right]_O^a \\ &= \frac{2M}{a^3} \cdot \frac{a^5}{5} \\ &= \tfrac{2}{5} Ma^2. \end{aligned}$$

குறிப்பு: ஒரு திண்மக் கோளத்தின் ஏதேனுமொரு தொடு கோட்டைப் பற்றி அதன் நிலைமத் திருப்புத்திறன் காணல்:

திண்மக்கோளததின் ஈர்ப்பு மையம் அதன் மையத்திலிருக்கும். தொடுகோட்டிற்கு இணையான விட்டத்தைப் பற்றிய நி. தி. $\frac{2}{5} Ma^2$ ஆகும். தொடுகோட்டிற்கும் இவ்விட்டத்திற்குமுள்ள தூரம் a ஆதலின் இணையச்சுத் தேற்றப்படி,

தொடுகோட்டைப்பற்றிய நி.தி.

$= $ விட்டத்தைப்பற்றிய நி.தி. $+Ma^2$

$= \frac{2}{5} Ma^2 + Ma^2$

$= \frac{7}{5} Ma^2$

9. திண்ம நேர்வட்டக் கூம்பின் நிலைமத்திருப்புத்திறன்
(M.I. of a solid right circular cone)

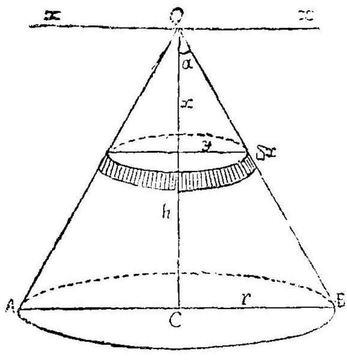
(i) கூம்பின் அச்சைப் பற்றிய நிலைமத்திருப்புத்திறன்.

OAB என்பது *h* உயரமும், *r* அடிப்பக்க ஆரையும் கொண்ட ஒரு நேர்வட்டக் கூம்பு. *OC* என்பது அதன் அச்சு.

கூம்பின் பொருண்மை M என்க. ρ என்பது ஒரு கன அலகுத் திண்மத்தின் பொருண்மை யெனில், கூம்பின் கன அளவு $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ ஆதலின்,

$$\rho = \frac{M}{\frac{1}{3}\pi r^2 h} = \frac{3M}{\pi r^2 h} \text{ ஆகும்.}$$

x^1Ox என்பது கூம்பின் உச்சி வழியே அதன் அச்சுக்குச் செங்குத்தாக வரையப்பட்டுள்ள ஒரு நேர் கோடு. கூம்பை இக்கோட்டிற்கு இணையான தளங்களினால் மெல்லிய சீவல்களாகப் பிரிக்கவும். Oவிலிருந்து x தூரத்தில் δx கனமுள்ள ஒரு சீவலைக் கருதுக. இது ஒரு வட்டத் தகடு போன்று இருக்கும். இதன் ஆரை y என்று கொள்க இவ்வட்டச் சீவலின் கன அளவு $= \pi y^2 \delta x$.



படம் 138

எனவே இவ்வட்டச் சீவலின் பொருண்மை $\rho \cdot \pi y^2 \delta x$ ஆகும்.

அதாவது, $m = \rho . \pi y^2 \delta x,$

$$a = \text{வட்டச் சீவலின் ஆரை} = y$$

ஆகவே, கூம்பின் அச்சு, OC ஆனது இச்சீவலின் மையம் வழியே அதன் தளத்திற்குச் செங்குத்தாயிருப்பதால், OCஐப் பற்றிய இச்சீவலின் நிலைமத்திருப்பம் $= m\ \frac{a^2}{2}$

$$= \rho . \pi y^2 \delta x . \frac{y^2}{2}$$

$$= \rho . \frac{\pi}{2} \rho . \frac{\pi}{2} y^4 \delta x$$

x-இன் எல்லை மதிப்புக்கள் $x = O$ முதல் $x = h$ வரை யாதலின் திண்மக் கூம்பின் அச்சைப் பற்றிய நிலைமத் திருப்புத்திறன்

$$= \int_O^h \rho \frac{\pi}{2} y^4 \, dx$$

$$= \rho \frac{\pi}{2} \int_O^h y^4 \, dx$$

ஆனால் கூம்பின் அரையுச்சிக்கோணம் $\propto$ எனில்,

$$\frac{y}{x} = \tan \propto = \frac{r}{h}$$

அல்லது, $y = \frac{r}{h} x.$

$\therefore$ கூம்பின் அச்சைப் பற்றிய நிலைமைத் திருப்புத்திறன்

$$= \rho \frac{\pi}{2} \int_O^h \frac{r^4}{h^4} x^4 \, dx$$

$$= \rho \frac{\pi}{2} . \frac{r^4}{h^4} . \left[\frac{x^5}{5} \right]_O^h$$

$$\frac{3M}{\pi r^2 h} . \frac{\pi}{2} . \frac{r^4}{h^4} . \frac{h^5}{5}$$

$$= \frac{3M}{10} r^2.$$

(ii) கூம்பின் உச்சி வழியே அதன் அச்சுக்குச் செங்குத்தான கோடு பற்றி நி. தி.

x^1Ox பற்றிய சீவலின் நி. தி. = சீவலின் தளத்தில் x^1Oxக்கு இணையான கோடு பற்றிய நி. தி. + $m. x^2$

$$= m \frac{y^2}{4} + \iota :$$

$$= \rho\, \pi y^2\, \delta x.\ \frac{y^2}{4} + \rho\, \pi\, y^2\, \delta x.\ x^2$$

$$= \frac{\rho\pi}{4} y^4\, \delta x + \rho\pi\, y^2\, x^2\, \delta x\ ,$$ ஆனால் $y = \frac{r}{h} x.$

$$= \frac{\rho\pi}{4}\ \frac{r^4}{h^4}\ x^4\, \delta x + \rho\pi\ \frac{r^2}{h^2}\ x^4\, \delta x$$

$$= \frac{\rho\pi\, r^2}{4h^4}\ (r^2 = 4h^2)\ x^4\, \delta x.$$

ஆகவே, $x^1 Ox$ ஐப்பற்றி கூம்பின் நி. தி.

$$= \int_O^h \frac{\rho\pi r^2}{4h^4}\ (r^2 + 4h^2)\ x^4\, dx$$

$$= \frac{\rho\pi r^2}{4h^4}\ .\ (r^2 + 4h^2).\ \frac{h^5}{5}$$

$$= \frac{3M}{\pi r^2\, h}\ .\ \frac{\pi r^2}{4h^4}\ .\ (r^2 + 4h^2).\ \frac{h^5}{5}$$

$$= \frac{3M}{20}\ (r^2 + 4h^2).$$

(iii) கூம்பின் புவியீர்ப்பு மையம் G வழியே அச்சுக்குச் செங்குத்தான கோடு பற்றிய நிலைமத் திருப்புத்திறன்.

கூம்பின் அச்சுக்குச் செங்குத்தாக G வழிக் கோட்டைப் பற்றிய நி. தி. I என்றும், O வழிக் கோட்டைப் பற்றிய நி. தி. I' என்றும் கொள்க.

$I' = \frac{3M}{20}\ (r^2 + 4h^2)$ என்று கண்டோம்.

d = இரு இணைகோடுகளுக்கு மிடையேயுள்ள தூரம் $= \frac{3h}{4.}$

இணையச் சுத்தேற்றத்தின்படி,

$$I' = I + Md^2$$

$$\therefore\ \ I = I' - Md^2$$

$$= \frac{3M}{20}\ (r^2 + 4h^2) - M.\ \frac{9h^2}{16}$$

$$= \frac{3M}{80}\,[4\,(r^2 + 4h^2) - .\ 15\,h^2]$$

$$= \frac{3M}{80}\,(4r^2 + h^2)$$

(10) உள்ளீடற்ற நேர்வட்டக் கூம்பின் நிலைமத் திருப்புத்திறன்
(M. I. of a hollow right circular cone)

(திண்மக் கூம்புக்குரிய படத்தைப் பார்க்கவும்)

OAB என்பது h உயரமும், r அடிப்பக்க ஆரையுமுள்ள ஒரு உள்ளீடற்ற நேர்வட்டக் கூம்பு. கூம்பின் பொருண்மை M என்க.

ρ என்பது ஒரு சதுர அலகு மேற்பரப்பின் பொருண்மை என்க.

கூம்பின் சாய்வு உயரம் l எனில், அதன் மேற்பரப்பு πrl ஆகும்.

$$\therefore\ \rho = \frac{M}{\pi rl}$$

கூம்பின் அச்சுக்குச் செங்குத்தான தளங்களின் மூலம் கூம்பை எண்ணற்ற நுண்ணிய வளையங்களாகப் பிரிக்கவும். கூம்பின் உச்சியிலிருந்து x தூரத்தில் δS அகலமுள்ள ஒரு நுண் வளையத்தைக் கருதுக. இதன் ஆரை y என்க.

இந்த நுண்வளையத்தின் மேற்பரப்பு $= 2\pi y\,\delta S$.

$\therefore$ இதன் பொருண்மை $m = \rho\,.\,2\pi y\,\delta S$.

OC ஐப்பற்றி இந் நுண்வளையத்தின் நி. தி. $= my^2$

$$= \rho\,.\,2\pi y\,\delta S . y^2$$

$$= \rho\,.\,2\pi\,y^3\,\delta S.$$

x இன் எல்லை மதிப்புக்கள் $x = O$ முதல் $x = h$ வரையாதலின், OC ஐப்பற்று கூம்பின் நிலைமத்திருப்புத்திறன்

$$= \int_O^h \rho\,.\,2\pi\,y^3\,dS$$

$$\rho\,.\,2\pi . = \int_O^h y^3\,dS.$$

ஆனால் $\frac{y}{x} = \frac{r}{h}$ ஆதலின் $y = \frac{r}{h} x.$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{r}{h}$$

இப்பொழுது $\frac{dS}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

$$= \sqrt{1 + \frac{r^2}{h^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{h^2 + r^2}}{h}$$

$$= \frac{l}{h}$$

$$\therefore dS = \frac{l}{h} dx.$$

$\therefore$ கூம்பின் அச்சைப் பற்றிய நி. தி.

$$= \rho . 2\pi . \int_0^h \frac{r^3}{h^3} x^3 . \frac{l}{h} dx$$

$$= \rho . 2\pi . \frac{r^3 l}{h^4} . \frac{h^4}{4}$$

$$= \frac{M}{\pi r l} . 2\pi . \frac{r^3 l}{4}$$

$$= \frac{Mr^2}{2}.$$

"ரூத்"-இன் விதி (Routh's Rule)

சமச்சீரான பொருள்கள் யாவும் சமச் சீரச்சுகள் கொண்டவையாகவிருக்கும். மேலே குறிப்பிடப்பட்ட பொருள்கள் யாவும் சமச் சீரச்சுகளுடன் கூடிய சமச்சீர்ப் பொருள்களாகும். இத்தகைய சமச்சீர்ப் பொருள்களின் ஏதேனுமொரு சமச்சீர் அச்சைப்பற்றிய நிலைமத் திருப்புத்திறன்களைப் பின்வரும் ரூத்-ன் விதியின் மூலம் எளிதாக நினைவிலிருத்திக் கொள்ளலாம்.

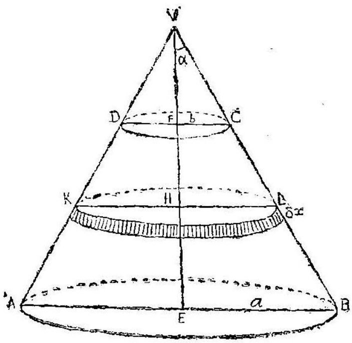
ஒரு பொருளின் ஒரு சமச்சீரச்சைப் பற்றிய நி. தி.

$$= \frac{\text{பொருண்மை} \times (\text{செங்குத்து அரை அச்சுகளின் வர்க்கங்களின் மொத்தம்})}{3 \text{, } 4 \text{ அல்லது } 5}$$

பொருள் செவ்வக வடிவமாயின் பகுதியில் 3 ஐயும், நீள்வட்ட வடிவமாயின் (வட்டம் உட்பட) பகுதியில் 4ஐயும், நீள்வளையக் கோளவடிவமாயின் (கோளம் உட்பட) பகுதியில் 5ஐயும் எடுத்துக்கொள்ளவேண்டும்.

மாதிரி 188. a, b என்ற முனைப்பக்க ஆரைகள் கொண்ட ஒரு நுனியிலாக் கூம்பின் அச்சைப்பற்றிய நிலைமத் திருப்புத் திறன் காண்க.

தீர்வு : $ABCD$ என்பது V-ஐ உச்சியாகக் கொண்ட VAB எனும் நேர்வட்டக் கூம்பிலிருந்து வெட்டியெடுக்கப்பட்ட நுனியிலாக் கூம்பு. அதன் அடிப்பக்கம் AB-ன் ஆரை a; மேற்பக்கம் CD-ன் ஆரை b. முழுக்கூம்பின் அரையுச்சிக் கோணம் α என்க.



படம் 139

முழுக் கூம்பின் உச்சியிலிருந்து x தூரத்தில் அதன் அச்சுக்குச் செங்குத்தான தளம் ஒன்றினால் வெட்டியெடுக்கப்பட்ட δx கனமுள்ள ஒரு வட்டத் தகட்டினைக் கருதுக.

இவ்வட்டத் தகட்டின் ஆரை $= HK = VH \tan\alpha = x \tan\alpha$.

ஆகவே, இதன் பரப்பு $= \pi x^2 \tan^2\alpha . \delta x$.

ஒரு கன அலகுத் திண்மத்தின் பொருண்மை ρ எனில்,

இவ்வட்டத் தகட்டின் பொருண்மை $m = \rho \pi \tan^2\alpha \, x^2 \, \delta x$.

இதன் ஆரை $a = x \tan\alpha$

∴ கூம்பின் அச்சைப்பற்றி இவ்வட்டத் தகட்டின் நி. தி.

$$= m \frac{a^2}{2}$$

$$= \rho\, \pi \tan^2 \alpha \cdot x^2 x.\ \frac{(x^2 \tan^2 \alpha)}{2}$$

$$= \frac{\rho\pi}{2} \tan^4\alpha \cdot x^4\, \delta x$$

x-ன் எல்லை மதிப்புகள் $x = VF$ முதல், $x = VE$ வரை.

ஆனால் $VF = b \cot \alpha$, $VE = a \cot \alpha$.

$$\therefore \text{ நுனியிலாக் கூம்பின் நி. தி.} = \int_{b \cot \alpha}^{a \cot \alpha} \rho\, \frac{\pi}{2} \tan^4\alpha\, x^4\, dx$$

$$= \rho\, \frac{\pi}{2} \tan^4 \alpha \cdot \tfrac{1}{5} (a^5 - b^5) \cot^5 \alpha.$$

$$= \frac{\rho\, \pi \cot \alpha}{10} \cdot (a^5 - b^5)$$

மேலும் வட்டத் தகட்டின் பொருண்மை $\rho\pi \tan^2 \alpha\, x^2\, \delta x$

ஆதலின்,

நுனியிலாக் கூம்பின் பொருண்மை

$$M = \int_{b \cot \alpha}^{a \cot \alpha} \rho\, \pi \tan^2 \alpha\, x^2\, dx$$

$$= \rho\, \pi \tan^2 \alpha \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]_{b \cot \alpha}^{a \cot \alpha}$$

$$= \rho\, \pi \tan^2 \alpha \cdot \tfrac{1}{3} (a^3 - b^3) \cot^3 \alpha$$

$$= \frac{\rho\pi}{3} \cot \alpha\, (a^3 - b^3)$$

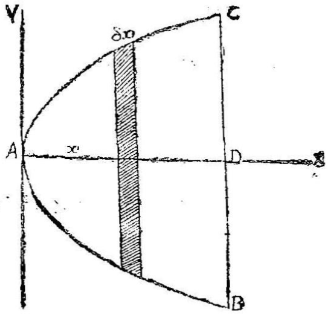
$$\therefore \rho\, \pi \cot \alpha = \frac{3M}{a^3 - b^3}$$

$$\therefore \left.\begin{array}{l}\text{நுனியிலாக்}\\ \text{கூம்பின் நி. தி.}\end{array}\right\} = \frac{1}{10}\, \frac{3M}{a^3 - b^3} \cdot (a^5 - b^5)$$

$$= \frac{3M}{10} \left(\frac{a^5 - b^5}{a^3 - b^3} \right)$$

மாதிரி 189. $4a$ செவ்வகலம் கொண்ட ஒரு பரவளேவின் உச்சியிலிருந்து h தூரத்திலுள்ள நிலைத்தூரத்தினால் வெட்டியெடுக்கப்பட்ட பரவளேவுப் பரப்பளவின் உச்சியிலுள்ள தொடுகோடு பற்றிய நிலைமத் திருப்புத்திறன் $\frac{3}{7} Mh^2$ என்றும், அச்சைப் பற்றிய நிலைமத் திருப்புத்திறன் $\frac{4}{5} Mah$ என்றும் காட்டுக. [M என்பது மொத்தப் பரப்பளவின் பொருண்மை)

தீர்வு : ABC என்பது A-ஐ உச்சியாகவும் AX-ஐ அச்சாகவும் $4a$-ஐச் செவ்வகலமாகவும் கொண்ட ஒரு பரவளேவில் A-யிலிருந்து h தூரத்திலுள்ள நிலைத் தூரத்தினால் வெட்டியெடுக்கப்பட்ட பகுதி.



படம் 140

A-யிலிருந்து x தூரத்தில் AX-க்குச் செங்குத்தான δx அகலமுள்ள ஒரு நுண்ணிய செவ்வகத் துண்டினைக் கருதுக.

பரவளேவின் சமன்பாடு $y^2 = 4ax$ எனில், இச் செவ்வகத் துண்டின் நீளம் $2y$ ஆகும்.

$\therefore$ செவ்வகத் துண்டின் பரப்பு $= 2y\,\delta x$.

ஒரு சதுர அலகுப் பரப்பளவின் பொருண்மை ρ எனில்,

செவ்வகத் துண்டின் பொருண்மை $m = \rho \,.\, 2y\,\delta x$.

இச் செவ்வகத் துண்டிலுள்ள ஒவ்வொரு துகளும் A-யிலுள்ள தொடுகோட்டிலிருந்து x தூரத்திலிருக்குமாதலின், A-ல் வரையப்படும் தொடுகோட்டைப்பற்றி இத் துண்டின் நிலைமத் திருப்புத்திறன் $= mx^2 = \rho\, 2y\,\delta x \,.\, x^2$ ஆகும். x ஆனது A-யிலிருந்து D வரை இருக்கலாமாதலின் x-ன் எல்லை மதிப்புகள் $x = O$ முதல் $x = h$ வரையாகும்.

$\therefore$ தொடுகோட்டைப்பற்றி ABC-ன் நி. தி.

$$= \int_O^h \rho \,.\, 2y\, x^2\, dx$$

ஆனால் $y^2 = 4ax$ ஆகையால், $y = 2\sqrt{a}.\ \sqrt{x}$ ஆகும்.

$\therefore$ தொடுகோட்டைப்பற்றி ABC-யின் நி. தி.

$$= \int_O^h \rho \cdot 2\,(2\sqrt{a}\,\sqrt{x})x^2\,dx$$

$$= \rho\, 4\sqrt{a} \int_O^h x^{5/2}\,dx$$

$$= \rho\, 4\sqrt{a} \cdot \tfrac{2}{7}\, h^{7/2}$$

செவ்வகத் துண்டின் பொருண்மை $\rho \cdot 2y\,\delta x$ ஆதலின்,

$$ABC\text{-ன் பொருண்மை } M = \int_O^h \rho \cdot 2y\,dx$$

$$= \rho \cdot 2 \cdot \int_O^h 2\sqrt{a}\,\sqrt{x}\,dx$$

$$= \rho\, 4\sqrt{a} \cdot \tfrac{2}{3} \Big[\, x^{3/2} \,\Big]_0^h$$

$$= \rho\, \tfrac{8}{3}\sqrt{a}\, h^{3/2}$$

$$\therefore\quad \rho = \frac{3M}{8\sqrt{a}\,h^{3/2}}$$

M தொடு கோட்டைப்பற்றி ABC-ன் நி.தி.

$$= \frac{3M}{8\sqrt{a}\;h^{3/2}}\, 4 \cdot \sqrt{a} \cdot \tfrac{2}{7}\, h^{7/2}$$

$$= \frac{3M}{7}\, h^2$$

இப்பொழுது அச்சு AX ஐப்பற்றிச் செவ்வகத்துண்டின் நி.தி.

$$= m \cdot \frac{a^2}{3} \text{ (சூத்திரம்)}$$

$$= \rho \cdot 2y\,\delta x \cdot \frac{y^2}{3}$$

$$= \rho \cdot \frac{2}{3}\, y^3\,\delta x$$

$$\rho \cdot \frac{2}{3}\,(\sqrt{4ax})^3\;\delta x$$

$$= \rho \cdot \frac{2}{3}(8a\sqrt{a})\, x^{3/2}\, \delta x.$$

$\therefore$ AX ஐப்பற்றி ABC-ன் நி.தி.

$$= \rho \cdot \frac{2}{3}(8a\sqrt{a}) \int_0^h x^{3/2}\, dx$$

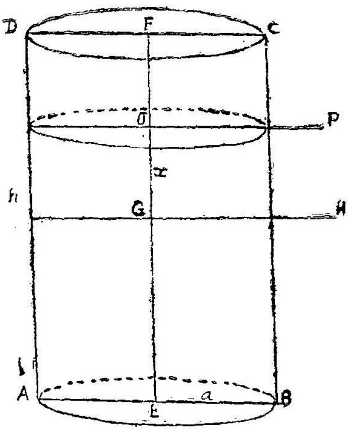
$$= \rho\, \frac{16}{3}\, a\sqrt{a} \cdot \frac{2}{5}\, h^{5/2}$$

$$= \frac{3M}{8\sqrt{a}\, h^{3/2}} \cdot \frac{16}{3}\, a\sqrt{a}\, \frac{2}{5}\, h^{5/2}$$

$$= \frac{4}{5} Mah.$$

மாதிரி 190. ஒரு நேர்வட்ட உருளையின் புவியீர்ப்பு மையம் வழியே அதன் அச்சுக்குச் செங்குத்தான கோட்டைப் பற்றிய நிலைமத் திருப்புத்திறன் காண்க.

(மதுரை பி.எஸ்ஸி. 1973 ஏப்.)



படம் 141

தீர்வு: $ABCD$ என்பது a ஆரையும், h உயரமுமுள்ள ஒரு திண்ம உருளை. M என்பது அதன் பொருண்மை எனில், ஒருகன அலகுத் திண்மத்தின் பொருண்மை $\rho = \frac{M}{\pi a^2 h}$. G என்பது உருளையின் புவியீர்ப்பு மையம். GH என்பது G வழியே உருளையின் அச்சுக்குச் செங்குத்தான நேர்கோடு. இந் நேர்கோடு பற்றிய உருளையின் நி.தி. I என்க.

G யிலிருந்து x தூரத்தில் GH-க்கு இணையான δx கனமுள்ள ஒரு நுண்ணிய வட்டத் தகட்டினைக் கருதுக.

$$m = \text{இவ்வட்டத் தகட்டின் பொருண்மை} = \rho \cdot \pi a^2\, \delta x.$$

வட்டத் தகட்டின் ஆரை a ஆதலின், GH-க்கு இணையான ஒரு விட்டத்தைப் பற்றி இவ்வட்டத் தகட்டின் நி. தி. $= m\dfrac{a^2}{4}$

இணையச்சுத் தேற்றத்தின்படி, GH ஐப்பற்றி இவ்வட்டத் துண்டின் நி. தி.

$$= m\frac{a^2}{4} + mx^2$$

$$= m\left(\frac{a^2}{4} + x^2\right)$$

$$= \rho\pi a^2\left(\frac{a^2}{4} + x^2\right)\delta x.$$

x-ன் எல்லை மதிப்புகள் $x = -\dfrac{h}{2}$ முதல் $x = \dfrac{h}{2}$ வரையாதலின்,

$$I = \int_{-h/2}^{h/2} \rho\,\pi a^2\left(\frac{a^2}{4} + x^2\right)dx$$

$$= \rho\pi a^2\left[\frac{a^2}{4}x + \frac{x^3}{3}\right]_{-h/2}^{h/2}$$

$$= \rho\pi a^2\left[\left(\frac{a^2 h}{8} + \frac{h^3}{24}\right) - \left(-\frac{a^2 h}{8} - \frac{h^3}{24}\right)\right]$$

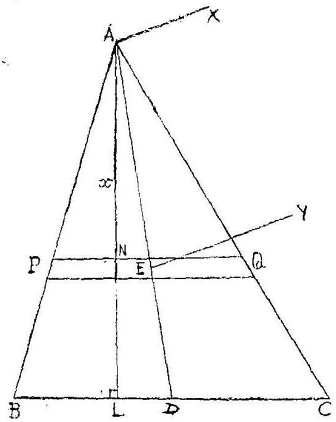
$$= \rho\pi a^2.\left[\frac{a^2 h}{4} + \frac{h^3}{12}\right]$$

$$= \frac{M}{\pi a^2 h}.\pi a^2.\frac{h}{4}\left(a^2 + \frac{h}{3}\right)$$

$$= \frac{M}{4}\left(a^2 + \frac{h}{3}\right)$$

மாதிரி 191. ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு மூலைவழியே அதன் தளத்திற்குச் செங்குத்தாக வரையப்படும் கோட்டைப் பற்றிய நிலமத் திருப்புத்திறன் காண்க.

தீர்வு: ABC எனும் முக்கோணத்தில் AL என்பது Aயி லிருந்து வரையப்பட்ட குத்துயரம். $AL = h$ என்க.



படம் 142

AX என்பது A வழியே முக்கோணத்தின் தளத்திற்கு வரையப்பட்டுள்ள செங்குத்துக்கோடு. $BC = a$ என்க.

AX ஐப்பற்றி முக்கோணத்தின் நிலைமத் திருப்புத்திறன் காண வேண்டும்.

A-யிலிருந்து x தூரத்தில் BC-க்கு இணையாக δx அகல முள்ள PQ எனும் நுண்ணிய செவ்வக வடிவத்துண்டினைக் கருதுக.

$PQ \parallel BC$ ஆகையால், $\dfrac{PQ}{BC} = \dfrac{AN}{AL}$

அதாவது, $$\frac{PQ}{a} = \frac{x}{h}$$

அல்லது, $$PQ = \frac{ax}{h}$$

$\therefore$ செவ்வகத் துண்டு PQ-ன் பரப்பளவு $= \dfrac{ax}{h}\,\delta x$.

முக்கோணத் தளத்தின் பொருண்மை M என்க.

ρ என்பது ஒரு சதுர அலகுப் பரப்பளவின் பொருண்மை யெனில்,

$$\rho = \frac{M}{\frac{1}{2}ah} = \frac{2M}{ah}.$$

$\therefore$ செவ்வகத் துண்டின் பொருண்மை $m = \rho \cdot \dfrac{ax}{h}\,\delta x$

E என்பது PQ-வின் நடுப்புள்ளி. AE ஆனது BC ஐ D-ல் வெட்டட்டும்.

$$\therefore \quad \frac{AE}{AD} = \frac{AN}{AL} = \frac{x}{h}$$

அல்லது, $AE = \frac{AD}{h} x.$

$\triangle ABC$-ல் D என்பது BC-ன் நடுப்புள்ளியாகையால்,

$$AB^2 + AC^2 = BD^2 + DC^2 + 2\,AD^2$$

$$\therefore \quad 2\,AD^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,BD^2 \quad (\because BD = DC)$$

$$= C^2 + b^2 - 2\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$= C^2 + b^2 - \frac{a^2}{2}$$

$$\therefore \quad AD^2 = \frac{2\,b^2 + 2C^2 - a^2}{4}.$$

EY என்பது முக்கோணத்தின் தளத்திற்குச் செங்குத்தாக வரையப்பட்ட நேர்கோடெனில் அது PQ-க்கு அதன் நடுப்புள்ளி E வழியே செங்குத்தாகவும், AX-க்கு இணையாகவுமிருக்கும்

$$\therefore \quad EY \text{ ஐப்பற்றி } PQ\text{-வின் நி. தி.} = \frac{m.}{3}\left(\frac{PQ}{2}\right)^2$$

$$= \frac{m}{3}\left(\frac{ax}{2h}\right)^2$$

$$= \tfrac{1}{3}.\ \rho\ \frac{ax}{h}\ \delta x.\ \frac{a^2 x^2}{4h^2}$$

$$= \frac{\rho\ a^3}{12\ h^3}\ x^3\ \delta x$$

$\therefore$ இணையச்சுத் தேற்றத்தின்படி,

AX-ஐப்பற்றி PQ-வின் நி.தி. $=$ EY-ஐப்பற்றி PQ-வின் நி.தி. $+ m.\ AE^2$

$$= \frac{\rho\ a^3}{12\ h^3}\ x^3\ \delta x + \rho\,\frac{ax}{h}\ \delta x.\left(\frac{AD}{h}\ x\right)^2$$

$$= \frac{\rho\, a^3}{12\, h^3}\, x^3\, \delta x + \frac{\rho a.\ AD^2}{h^3}\, x^3\, \delta x$$

$$= \frac{\rho\, a}{12\, h^3}\, [a^2\, x^3\, \delta x + 12\ AD^2\, x^3\, \delta x]$$

$$= \frac{\rho\, a}{12\, h^3}\, [a^2 + 12\ AD^2]\, x^3\, \delta x$$

$$= \frac{\rho\, a}{12\, h^3}\left[\, a^2 + 12\ \ \frac{(2b^2 + 2c^2 - a^2)}{4}\right] x^3\, \delta x$$

$$= \frac{\rho\, a}{12\, h^3}\, [6b^2 + 6c^2 - 2a^2]\ x^3\, \delta x$$

$$= \frac{\rho\, a}{6\, h^3}\, (3b^2 + 3c^2 - a^2)\ x^3\, \delta x$$

x-ன் எல்லை மதிப்புகள் $x = O$ முதல் $x = h$ வரையிருப்பதால்,

AX-ஐப் பற்றி முக்கோணத்தின் நி. தி.

$$= \frac{\rho\, a}{6\, h^3}\, (3b^2 + 3c^2 - a^2) \int_O^h x^3\, dx$$

$$= \frac{2\ M}{a\, h} \cdot \frac{a}{6\, h^3}\, (3b^2\ 3c^2 - a^2)\ \ \frac{h^4}{4}$$

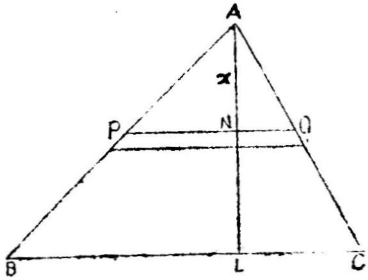
$$= \frac{M}{12}\, (3b^2 + 3c^2 - a^2).$$

மாதிரி 192. M பொருண்மையுள்ள ஒரு மெல்லிய முக்கோணத் தகட்டின் ஒரு பக்கத்திற்கு வரையப்படும் குத்துயரம் h எனில் அப்பக்கத்தைப்பற்றி அம் முக்கோணத்தின் நிலைமத் திருப்புத்திறன் $\frac{M}{6}\, h^2$ என்று காட்டுக.

(மதுரை, பி. எஸ்ஸி. 1970 செப்.)

தீர்வு : $\triangle ABC$-ல் AL என்பது A-யிலிருந்து BC-க்கு வரையப்பட்ட குத்துயரம்.

$AL = h.$



படம் 143

A-யிலிருந்து x தூரத்தில் BC-க்கு இணையாக வரையப்பட்ட δx அகலமுள்ள PQ எனும் செவ்வகத் துண்டு ஒன்றைக் கருதுக. குத்துயரம் AL-ஆனது இத்துண்டை N-இல் சந்திக்கட்டும்.

$$\therefore \frac{AN}{AL} = \frac{AP}{AB}$$

$$= \frac{PQ}{BC}$$

$$\therefore PQ = \frac{AN}{AL} BC = \frac{x}{h} a = \frac{ax}{h} \ (\because \ BC = a)$$

ஒரு சதுர அலகுப் பரப்பளவின் பொருண்மை ρ என்க.

முக்கோணத்தின் பொருண்மை M எனில், $\rho \dfrac{M}{\frac{1}{2} ah} = \dfrac{2M}{ah}$

ஆகும்.

செவ்வகத்துண்டு PQ-வின் பரப்பு $= PQ \cdot \delta x = \dfrac{ax}{h} \cdot \delta x.$

$\therefore$ செவ்வகத் துண்டு PQ-வின் பொருண்மை $m = \rho \cdot \dfrac{ax}{h} \ \delta x$

இத்துண்டிலுள்ள ஒவ்வொரு துகளும் BC-யிலிருந்து $NL = (h-x)$ தூரத்திலிருக்குமாகையால்,

BC-ஐப் பற்றி PQ-வின் நி.தி. $= m. (h-x)^2$

$$= \rho \cdot \frac{a}{h} \ x \ \delta x \ . \ (h-x)^2$$

$$= \rho \cdot \frac{a}{h} (h^2x - 2hx^2 + x^3) \ \delta x.$$

x-ன் எல்லை மதிப்புகள் $x = O$ முதல் $x = h$ வரையாதலின், BC-ஐப் பற்றி $\triangle ABC$-ன் நி.தி.

$$= \rho \frac{a}{h} \int_{O}^{h} (h^2x - 2hx^2 + x^3)\, dx$$

$$= \rho \frac{a}{h} \left[h^2 \frac{x^2}{2} - 2h\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right]_0^h$$

$$= \rho \frac{a}{h} \left(\frac{h^4}{2} - \frac{2h^4}{3} + \frac{h^4}{4} \right)$$

$$= \rho \frac{a}{h} \frac{(6h^4 - 8h^4 + 3h^4)}{12}$$

$$= \frac{2M}{ah} \cdot \frac{a}{h} \cdot \left(\frac{h^4}{12} \right)$$

$$= \frac{M}{6} h^2$$

மாதிரி 193. M பொருண்மையுள்ள ஒரு முக்கோணத் தகட்டின் ஓர் உச்சி வழியே வரையப்படும் ஏதேனுமொரு நேர் கோட்டிலிருந்து ஏனைய இரு உச்சிகள் தூரங்கள் β, γ எனில், அக் கோட்டைப்பற்றி முக்கோணத்தின் நி. தி.

$\frac{M}{6}$ $(\beta^2 + \beta\gamma + \gamma^2$ என நிறுவுக.

தீர்வு : AX என்பது $\triangle ABC$-ன் முனை A வழியே வரையப் பட்ட ஏதேனுமொரு நேர்கோடு. BP, CQ என்பன முறையே B, C-யிலிருந்து அக்கோட்டிற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோடுகள். $BP = \beta$; $CQ = \gamma$;

BC-ஆனது AX-ஐ R-ல் சந்திக்குமாறு நீட்டுக.

ஒரு சதுர அலகுப் பரப்பளவின் பொருண்மை ρ என்க.

$\triangle ABC$, $\triangle ABR$, $\triangle ACR$ ஆகியவற்றின் பொருண்மைகள் முறையே M, M_1, M_2 என்க.

$$\triangle ABR = \tfrac{1}{2} AR.\, \beta$$

$$\triangle ACR = \tfrac{1}{2} AR.\, \gamma$$

$$\triangle ABC = \triangle ABR - \triangle ACR$$

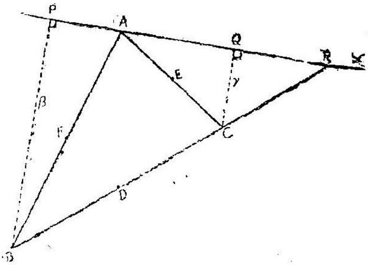
$$= \tfrac{1}{2} AR\,(\beta - \gamma)$$

$$\therefore\ M_1 = \tfrac{1}{2} AR.\, \beta\rho$$

$$M_2 = \tfrac{1}{2} AR.\, \gamma\rho$$

$$M = AR\,(\beta - \gamma).$$

$$\rho = M_1 - M_2$$



படம் 144

$$\therefore\ \rho = \frac{M_1}{\frac{1}{2} AR.\, \beta} = \frac{M_2}{\frac{1}{2} AR.\, \gamma} = \frac{M_1 - M_2}{\frac{1}{2} AR\,(\beta - \gamma)} = \frac{M}{\frac{1}{2} AR\,(\beta - \gamma)}$$

அதாவது, $\dfrac{M_1}{\beta} = \dfrac{M_2}{\gamma} = \dfrac{M}{\beta - \gamma}$

$$\therefore\ M_1 = \frac{M\beta}{\beta - \gamma}\ ;\ M_2 = \frac{M\gamma}{\beta - \gamma}$$

AX-ஐப்பற்றி $\triangle ABR$-ன் நி.தி. $= \dfrac{M_1\, \beta^2}{6}$

AX-ஐப் பற்றி $\triangle ACR$-ன் நி.தி. $= \dfrac{M_2\, \gamma^2}{6}$

$\therefore$ AX-ஐப்பற்றி $\triangle ABC$-ன் நி.தி. $= \dfrac{M_1\, \beta^2}{6} - \dfrac{M_2\, \gamma^2}{6}$

$$= \frac{M\beta}{\beta - \gamma} \cdot \frac{\beta^2}{6} - \frac{M\gamma}{\beta - \gamma} \cdot \frac{\gamma^2}{6}$$

$$= \frac{M}{6} \left(\frac{\beta^3 - \gamma^3}{\beta - \gamma} \right)$$

$$= \frac{M}{6} (\beta^2 + \beta\gamma + \gamma^2)$$

குறிப்பு: D, E, F என்பன முறையே BC, CA, AB ஆகியவற்றின் நடுப்புள்ளிகள் என்க. இந்த நடுப்புள்ளிகள் ஒவ்வொன்றிலும் $\dfrac{M}{3}$ என்னும் பொருண்மை வைக்கப்பட்டுள்ளதாகக் கொள்க.

D என்பது BC-ன் நடுப்புள்ளியாதலின், AX-இலிருந்து D-ன் தூரம் $\frac{\beta+\gamma}{2}$ ஆகும். இதுபோல், AX-யிலிருந்து E, F ஆகியவற்றின் தூரங்கள் முறையே $\frac{\gamma}{2}$, $\frac{\beta}{2}$ ஆகும்.

$\therefore$ AX-ஐப்பற்றி D-யிலுள்ள $\frac{M}{3}$ பொருண்மையின் நி. தி.

$$= \frac{M}{3}\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)^2$$

AX-ஐப் பற்றி E-யிலுள்ள $\frac{M}{3}$ பொருண்மையின் நி. தி.

$$= \frac{M}{3}\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2$$

AX-ஐப் பற்றி F-யிலுள்ள $\frac{M}{3}$ பொருண்மையின் நி. தி.

$$= \frac{M}{3}\left(\frac{\beta}{2}\right)^2$$

$\therefore$ AX-ஐப்பற்றி D, E, F ஆகிய நடுப்புள்ளிகளிலுள்ள $\frac{M}{3}$, $\frac{M}{3}$, $\frac{M}{3}$ ஆகிய கூட்டுப் பொருண்மைகளின் நி. தி.

$$= \frac{M}{3}\left[\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)^2+\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2+\left(\frac{\beta}{2}\right)^2\right]$$

$$= \frac{M}{12}\left[\beta^2+2\beta\gamma+\gamma^2+\gamma^2+\beta^2\right]$$

$$= \frac{M}{6}\left(\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2\right)$$

$= AX$-ஐப்பற்றி முக்கோணத்தின் நி. தி.

முக்கோணத்தின் நிலைமத் திருப்புத் திறனும், பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகள் ஒவ்வொன்றின்மீதும் முக்கோணத்தின் பொருண்மையில் மூன்றிலொரு பொருண்மை வைக்கப்பட்ட பொருண்மைத் தொகுதியின் நிலைமத் திருப்புத் திறனும் ஒன்றாக

யிருப்பதால் இவ்விரு தொகுதிகளும் (அதாவது முக்கோணமும், பொருண்மைத் தொகுதியும்) சமதிருப்புத்திறன் தொகுதிகள் (Equimomental Systems) என்றழைக்கப்படுகின்றன.

இரு தொகுதிகள் சம திருப்புத்திறன் தொகுதிகளாகயிருப்பதற்குத் தேவையான நிபந்தனைகள் வருமாறு :

1. இரு தொகுதிகளின் மொத்தப் பொருண்மைகள் சமமாகயிருக்கவேண்டும்.
2. அவை ஒரே புவியீர்ப்பு மையத்தைக் கொண்டவையாக விருத்தல்வேண்டும்.
3. எந்த அச்சைப் பற்றியும் அவற்றின் நிலைமத் திருப்புத்திறன்கள் சமமாகயிருத்தல் வேண்டும்.

மாதிரி **194.** m பொருண்மையுள்ள ஒரு முக்கோணத்தின் உச்சிகள் அம் முக்கோணத்தின் தளத்திலுள்ள ஏதேனுமொரு நேர்கோட்டிலிருந்து α, β, γ என்னும் தூரங்களிலிருப்பின் அந் நேர்கோட்டைப்பற்றி அம்முக்கோணத்தின் நிலைமத் திருப்புத்திறன் $\frac{1}{6}m(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$ என்று காட்டுக.

தீர்வு : l என்பது $\triangle ABC$-ன் தளத்திலுள்ள ஒரு நேர்கோடு. l-இலிருந்து A, B, C ஆகியவற்றின் தூரங்கள் முறையே α, β, γ என்க. எனவே, D, E, F என்பன முறையே BC, CA, AB ஆகிய பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகளெனில், l-யிலிருந்து இவற்றின் தூரங்கள் முறையே $\frac{\beta+\gamma}{2}$, $\frac{\gamma+\alpha}{2}$, $\frac{\alpha+\beta}{2}$ ஆகும்.

l-ஐப் பற்றி முக்கோணத்தின் நி. தி. $=$ l-ஐப் பற்றி D, E, F ஆகிய ஒவ்வொன்றின் மீதும் $\frac{m}{3}$ வீதம் வைக்கப்பட்டுள்ள தொகுதியின் நி.தி.

$$= \frac{m}{3}\left(\frac{\beta+\gamma}{12}\right)^2 + \frac{m}{3}\left(\frac{\gamma+\alpha}{2}\right)^2 + \frac{m}{3}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2$$

$$= \frac{m}{12}\left[(\beta+\gamma)^2+(\gamma+\alpha)^2(\alpha+\beta)^2\right]$$

$$= \frac{m}{12}\left[2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha\right]$$

$$= \frac{m}{6}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$$

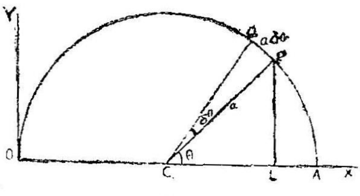
சடத்துவப் பெருக்கம் (Product of Inertia)

Ox, Oy எனும் செங்குத்து அச்சுகளைக் குறித்து m பொருண்மையுள்ள ஒரு துகளின் அச்சுத் தூரங்கள் (x, y) எனில், mxy என்பது Ox, Oy ஆகிய அச்சுகளைக் குறித்து அத் துகளின் 'சடத்துவப் பெருக்கம்' என்றழைக்கப்படுகிறது.

ஒரு தகட்டின் தளத்தில் Ox, Oy என்பன செங்குத்து அச்சுகளெனில், இவ்வச்சுகளைக் குறித்து அத் தகட்டின் எல்லாத் துகள்களின் சடத்துவப் பெருக்கங்களின் மொத்தமாகிய Σmxy என்பது அவ்வச்சுகளைக் குறித்து அத் தகட்டின் 'சடத்துவப் பெருக்கம்' என்றழைக்கப்படுகிறது.

Ox, Oy என்னும் செங்குத்து அச்சுகளைக் குறித்து ஒரு தகட்டின் சடத்துவப் பெருக்கம் பூச்சியமெனில் அவ்விரு அச்சுகளும் O-வில் அத் தகட்டின் 'தலையாய அச்சுக்கள்' (Principal axes) என்றழைக்கப்படுகின்றன.

மாதிரி 195. ஓர் அரைவட்டக் கம்பியின் எல்லை விட்டம், விட்ட முனைத் தொடுகோடு ஆகியவற்றைக் குறித்து அக்கம்பியின் சடத்துவப் பெருக்கம் காண்க.



படம் 145

தீர்வு : $OQPA$ என்பது a ஆரையுள்ள ஓர் அரை வட்டக் கம்பி. OA என்பது அதன் எல்லை விட்டம். OAஐ x அச்சாகவும். Oவில் அரை வட்டத்தின் தொடுகோட்டை y அச்சாகவும் கொள்க.

$PQ = \delta S$ எனும் மிகக் குறுகிய நீளமுள்ள விற்துண்டினைக் கருதுக.

வட்டத்தின் மையம் C என்றும், $A\hat{C}P = \theta$, $A\hat{C}Q = (\theta + \delta\theta)$ என்றும் கொள்க.

$\therefore$ வில் PQவின் நீளம் $= a\delta\theta$.

அரை வட்ட வில்லின் நீளம் πa ஆகும்.

M என்பது அரைவட்ட வில்லின் பொருண்மை எனில், ஓர் அலகு நீள வில்லின் பொருண்மை $\rho = \dfrac{M}{\pi a}$ ஆகும்.

$\therefore$ வில் PQவின் பொருண்மை $m = \rho\, a\delta\theta$.

Ox-லிருந்து வில் PQவின் தூரம் $= a \sin\theta = y$ என்க.

Oy-லிருந்து வில் PQவின் தூரம் $= OC + CL$

$$= a + a\cos\theta$$

$$= a(1 + \cos\theta) = x \text{ என்க.}$$

Ox, Oy குறித்து வில் PQவின் சடத்துவப் பெருக்கம்

$$= mxy$$

$$= \rho\, a\delta\theta \cdot a(1 + \cos\theta) \cdot a\sin\theta$$

$$= \rho\, a^3 (1 + \cos\theta)\sin\theta\,\delta\theta$$

θ-வின் எல்லை மதிப்புகள் $\theta = O$ முதல் $\theta = \pi$ வரை ஆகும்.

ஆகவே, Ox, Oy குறித்து அரை வட்ட வில்லின் சடத்துவப்

$$\text{பெருக்கம்} = \rho\, a^3 \int_O^{\pi} (1 + \cos\theta)\sin\theta\, d\theta$$

$$= \rho\, a^3 \int_O^{\pi} (\sin\theta + \sin\theta\cos\theta)\, d\theta$$

$$= \rho\, a^3 \left[-\cos\theta = \frac{\sin^2\theta}{2} \right]_O^{\pi}$$

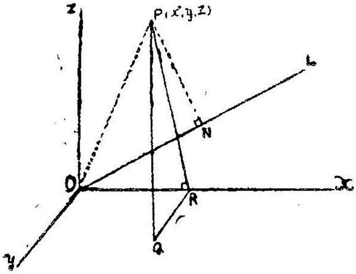
$$= \frac{M}{\pi a} \cdot a^3 [2]$$

$$= \frac{2\, Ma^2}{\pi}$$

நிலைமத் திருப்புத்திறன் காண மற்றுமொரு முறை

ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்ற ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான மூன்று அச்சுகளைப்பற்றிய நிலைமத் திருப்புத்திறன்கள், சடத்துவப் பெருக்கங்கள் ஆகியவற்றின் மூலம் அப் புள்ளி வழியே செல்லும் ஏதேனுமோர் அச்சைப்பற்றிய நிலைமத் திருப்புத் திறன் காணல்.

Ox, Oy, Oz என்னும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான மூன்று அச்சுகள் O-ல் சந்திக்கின்றன. A, B, C என்பன முறையே Ox, Oy, Oz ஆகிய அச்சுகளைப் பற்றி ஒரு பொருளின் நிலைமத் திருப்புத்திறன்களென்றும், D, E, F என்பன முறையே y, z அச்சுகள், z, x அச்சுகள், x, y அச்சுகள் ஆகியவை குறித்து அப் பொருளின் சடத்துவப் பெருக்கங்களென்றும் கொள்க.



படம் 146

m^1 என்பது P என்னும் புள்ளியிலுள்ள ஒரு துகளின் பொருண்மை என்று கொள்க. $P = (x, y, z)$ என்க.

$$\therefore \quad OP^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Ox-லிருந்து P யின் தூரம் $= PR$

$$= \sqrt{OP^2 - OR^2}$$

$$= \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2) - x^2}$$

$$= \sqrt{y^2 + z^2}$$

$\therefore$ Ox ஐப்பற்றி P யின் நி. தி. $= m^1 . (y^2 + z^2)$

$$\therefore \quad A = \Sigma m^1 (y^2 + z^2)$$

இதுபோல், $B = \Sigma m^1 (z^2 + x^2)$

$$C = \Sigma m^1 (x^2 + y^2)$$

Oy, Oz அச்சுகளைக் குறித்து P யின் ச. பெ. $= m^1 yz$

$$\therefore \quad D = \Sigma m^1 yz$$

இதுபோல், $E = \Sigma m^1 zx$

$$F = \Sigma m^1 xy$$

OL என்பது O வழியே வரையப்பட்டுள்ள ஒரு நேர்கோடு. இக் கோட்டின் திசைக் கொசைன்கள் (direction cosines) l, m, n என்க.

OL ஐப் பற்றிய பொருளின் நிலைமத் திருப்புத்திறன் காண வேண்டும்.

$PN \perp OL$ வரைக.

OL ஆனது ஆதிவழியே செல்வதால் அதன் சமன்பாடு $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$ ஆகும்.

$$ON = lx + my + nz$$

$$\therefore \quad PN^2 = OP^2 - ON^2$$
$$= (x^2 + y^2 + z^2) - (lx + my + nz)^2$$
$$= x^2(1 - l^2) + y^2(1 - m^2) + z^2(1 - n^2) - 2\,mnyz - 2nl\,zx - 2\,lmxy$$

ஆனால், $l^2 + m^2 + n^2 = 1$

ஆகையால், $1 - l^2 = (m^2 + n^2)$, ...

$$\therefore \quad PN^2 = x^2(m^2 + n^2) + y^2(n^2 + l^2) + z^2(l^2 + m^2) - 2\,mnyz - 2\,nlzx - 2\,lmxy$$
$$= l^2(y^2 + z^2) + m^2(z^2 + x^2) + n^2(x^2 + y^2) - 2\,mnyz - 2\,nlzx - 2\,lmxy$$

$\therefore$ OL ஐப்பற்றி P-யின் நி. தி.

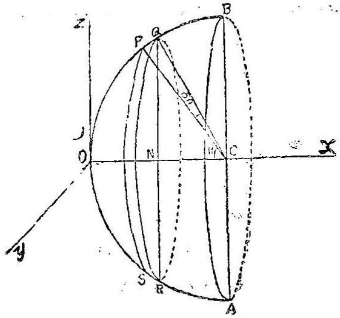
$$= l^2 . m^1 (y^2 + z^2) + m^2 . m^1 (z^2 + x^2) + n^2 . m^1 (x^2 + y^2) - 2\,m\,n.\,m^1\,yz - 2\,nl.\,m^1\,zx - 2\,lm.\,m^1\,xy$$

$\therefore$ OL ஐப்பற்றிப் பொருளின் நி. தி.

$$= l^2 \Sigma m^1 (y^2 + z^2) + m^2 \Sigma m^1 (z^2 + x^2) + n^2 . \Sigma m^1 (x^2 + y^2)$$
$$- 2\,mn\,\Sigma m^1\,yz - 2\,nl\,\Sigma m^1\,zx - 2\,lm\,\Sigma m^1\,xy$$
$$= Al^2 + Bm^2 + Cn^2 - 2\,Dmn^2 - 2\,Enl - 2F\,lm.$$

மாதிரி 196. M பொருண்மையும் a ஆரையுமுள்ள ஒரு மெல்லிய அரைக்கோளக் கூட்டின் உச்சி வழியே செல்லும் ஒரு நேர்கோட்டைப்பற்றி அதன் நிலைமத் திருப்புத்திறன் $\frac{2}{3}\;Ma^2$ என்று காட்டுக.

தீர்வு: OAB என்பது O ஐ உச்சியாகவும், a, M ஆகிய வற்றை முறையே ஆரை, பொருண்மையாகவும் கொண்ட ஓர் அரைக்கோளக் கூடு. C என்பது கோள மையம்.



படம் 147

O வழி ஆரையை x அச்சாகவும், அதற்குச் செங்குத்தான Oy, Oz என்னும் கோடுகளை முறையே y, z அச்சுகளாகவும் கொள்க.

இவ் வரைக்கோளக் கூடானது OB என்னும் கால்வட்ட வில்லை Ox மீது சுற்றுவதால் பிறப்பிக்கப்பட்டுள்ளதாகக் கொள்ளலாம்.

இக் கால்வட்ட வில்லில் PQ என்னும் ஒரு நுண்ணிய விற்பகுதியைக் கருதுக. $O\hat{C}P = \theta$, $O\hat{C}Q = (\theta + \delta\theta)$ எனில், வில் $PQ = a\,\delta\theta$.

வில் PQ ஐ Ox மீது சுற்றுவதால் $a \sin\theta$ ஆரையும் $a\,\delta\theta$ அகலமுள்ள ஒரு வளையம் பிறப்பிக்கப்படும்.

இவ் வளையத்தின் மேற்பரப்பு $= 2\pi a \sin\theta . a\,\delta\theta$.

$= 2\pi a^2 \sin\theta\,\delta\theta$.

ρ என்பது ஒரு சதுர அலகு பரப்பளவின் பொருண்மையெனில்,

வளையத்தின் பொருண்மை $= \rho . 2\pi a^2 \sin\theta\,\delta\theta = m$ என்க.

வளையத்தின் ஆரை $= a \sin\theta$

$\therefore$ Ox ஐப் பற்றி இவ் வளையத்தின் நி. தி. $= m.(a \sin\theta)^2$

$= \rho\, 2\pi a^2 \sin\theta . \delta\theta . a^2 \sin^2\theta$

$= \rho . 2\pi a^4 \sin^3\theta\,\delta\theta$.

ρ என்பது ஒரு சதுர அலகு பரப்பளவின் பொருண்மையெனில், கூட்டின் மேற்பரப்பு $2\pi a^2$ ஆதலின் $\rho = \dfrac{M}{2\pi a^2}$ ஆகும்.

மேலும், θ ஆனது $\theta = O$ முதல் $\theta = \frac{\pi}{2}$ வரை மாறு மாகையால்,

Ox ஐப்பற்றி அரைக்கோளக் கூட்டின் நி. தி.

$$= \int_{O}^{\pi/2} \rho . 2\pi a^4 \sin^3 \theta . d\theta$$

$$= \rho . 2\pi a^4 . \int_{O}^{\pi/2} \sin^3 \theta \, d\theta$$

$$= \frac{M}{2\pi a^2} . 2\pi a^4 . \frac{2}{3}$$

$$= \frac{2}{3} Ma^2 = A.$$

B, C என்பன முறையே Oy, Oz அச்சுகளைப்பற்றி அரைக் கோளக் கூட்டின் நி. தி. என்க.

$PQRS$ என்னும் வளையத்தின் பொருண்மை ($\rho . 2\pi a^2 \sin \theta \, \delta\theta$), ஆரை ($a \sin\theta$) ஆதலின், Oy-க்கு இணையான அதன் விட்டத்தைப்பற்றி நிலைமத் திருப்புத்திறன்

$$= \rho \, (2\pi a^2 \sin \theta \, \delta\theta) \frac{(a \sin \theta)^2}{2}$$

$$= \rho \pi a^4 \sin^3 \theta \, \delta\theta,$$

Oy-க்கும் இவ் விணைவிட்டத்திற்குமுள்ள தூரம் $= ON$

$$= OC - CN$$

$$= a - a \cos \theta$$

$$= a (1 - \cos \theta)$$

இணையச்சுத் தேற்றப்படி,

Oy-ஐப்பற்றி வளையத்தின் நி. தி. = இணை விட்டத்தைப்பற்றி நி. தி. $+ m . ON^2$

$$= \rho \pi a^4 \sin^3\theta \, \delta\theta + \rho . 2\pi a^2 \sin\theta \, \delta\theta . a^2 (1 - \cos \theta)^2$$

$$= \rho \pi a^4 [\sin^3\theta + 2 \sin\theta (1 - 2 \cos\theta + \cos^2 \theta)] \, \delta\theta$$

$$= \rho \pi a^4 [\sin \theta (\sin^2 \theta + 2 - 4 \cos \theta + 2 \cos^2 \theta)] \, \delta\theta$$

$$= \rho \pi a^4 [3 - 4 \cos \theta + \cos^2 \theta] \sin\theta \, \delta\theta.$$

θ-வின் எல்லை மதிப்புகள் $\theta = O$ முதல் $\theta = \frac{\pi}{2}$ வரையாதலின் Oy-ஐப்பற்றி அரைக்கோளக்கூட்டின் நி. தி.

$$= \rho\, \pi a^4 \int_{O}^{\pi/2} (3 - 4\cos\theta + \cos^2\theta) \sin\theta \, d\theta$$

$$= \rho\, \pi a^4 \int_{O}^{\pi/2} (3 - 4\cos\theta + \cos^2\theta)\, d\,(-\cos\theta)$$

$$= \rho\, \pi a^4 \left[-3\cos\theta + 4\,\frac{\cos^2\theta}{2} - \frac{\cos^3\theta}{3} \right]_{O}^{\pi/2}$$

$$= \rho\, \pi a^4 \left[3 - 2 + \tfrac{1}{3}\right]$$

$$= \frac{M}{2\,\pi a^2} \cdot \pi a^4 \left[\frac{4}{3}\right]$$

$$= \tfrac{2}{3} Ma^2 = B.$$

இதுபோல் $C = \frac{2}{3} Ma^2$.

அரைக்கோளத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் G ஆனது OC-யின் நடுவிலிருக்குமாகையால், $G = \left(\frac{a}{2}, O, O\right)$

D, E, F என்பன முறையே y, z ; z, x ; x, y அச்சுத் தொகுதிகள் குறித்து அரைக்கோளக் கூட்டின் சடத்துவப் பெருக்கங்களெனில்,

$$D = E = F = O \text{ ஆகும்.}$$

இப்பொழுது O வழியே வரையப்படும் ஏதேனுமொரு நேர் கோட்டின் திசைக் கொசைன்கள் (l, m, n) எனில், இக் கோட்டைப்பற்றி அரைக்கோளக் கூட்டின் நிலைமத் திருப்புத் திறன்

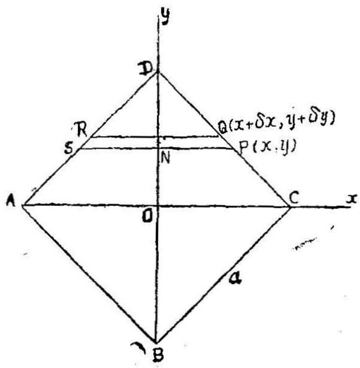
$$= Al^2 + Bm^2 + Cn^2 = 2\,D\,mn - 2Enl - 2\,Flm$$

$$= \tfrac{2}{3} Ma^2 (l^2 + m^2 + n^2)$$

$$= \tfrac{2}{3} Ma^2, \text{ ஏனெனில் } l^2 + m^2 + n^2 = 1.$$

மாறுபடும் அடர்த்தியுள்ள பொருளின் நிலைமத் திருப்புத்திறன் காணல் :

மாதிரி 197. ஒரு சதுரத் தகட்டின் எந்தப் புள்ளியிலும் அடர்த்தியானது அதன் ஒரு மூலைவிட்டத்திலிருந்து அப் புள்ளியின் தூரத்தின் வர்க்கத்திற்கேற்ப மாறுபடுகிறது. அந்த மூலைவிட்டத்தைப் பற்றிய சதுரத் தகட்டின் நிலைமத் திருப்புத்திறன் காண்க.



படம் 148

தீர்வு : $ABCD$ என்பது a நீளப்பக்கமுடைய ஒரு சதுரத் தகடு. அதன் மேலுள்ள எந்தப் புள்ளியிலும் அடர்த்தியானது மூலைவிட்டம் AC-யிலிருந்து அப் புள்ளியின் தூரத்தின் வர்க்கத்திற்கேற்ப மாறுபடுகிறது.

AC-ஐப்பற்றிய சதுரத்தின் நி. தி. காணவேண்டும்.

மூலைவிட்டங்கள் AC, BD ஆகியவற்றை x, y அச்சுகளாக எடுத்துக்கொள்க.

பக்கம் CD-யின்மேல் $P(x, y)$, $Q(x+\delta x, y+\delta y)$ என்னுமிரு நெருங்கிய புள்ளிகளையெடுத்து அவற்றின் வழியே AC-க்கு இணையாக இரு நேர்கோடுகள் வரைக. இவ்விரு நேர்கோடுகளுக்கிடைப்பட்ட $PQRS$ என்னும் நுண்ணிய பகுதியைக் கருதுக. இந்த நுண்ணிய பகுதியின் அகலம் δy ஆகும்.

$P = (x, y)$ ஆதலின் $PN = x$ ஆகும். $\therefore \; PS = 2x$.

ஆகவே, நுண்ணிய பகுதியின் பரப்பளவு $= 2x\,\delta y$.

இப் பகுதியிலுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும் மூலைவிட்டம் AC-யிலிருந்து y தூரத்திலிருக்குமாகையால் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் அடர்த்தியானது y^2-க்கேற்ப மாறுபடும் ; அதாவது ky^2-க்குச் சமமாகயிருக்கும். (k என்பது ஒரு மாறிலி.)

$\therefore$ நுண் செவ்வகப் பகுதியின் பொருண்மை $= ky^2 . 2x\,\delta y = 2ky^2 x\delta y$. PND என்பது இரு சமபக்க முக்கோணமாகுமாகையால்,

$$PN = ND = OD - ON$$

ஆனால் $PN = x$; $ON = y$; $OD = \frac{1}{2}$ (மூலைவிட்டம்) $= \frac{1}{2}(\sqrt{2}\ a)$
$= \dfrac{a}{\sqrt{2}}$;

$$\therefore\ x = \left(\frac{a}{\sqrt{2}} - y\right)$$

∴ நுண் செவ்வகப் பகுதியின் பொருண்மை

$$= 2ky^2 \left(\frac{a}{\sqrt{2}} - y\right) \delta y.$$

y-ன் எல்லை மதிப்புகள் $y = -\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ முதல் $y = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ வரை யாகும்.

∴ M = சதுரத் தகட்டின் பொருண்மை

$$= \int_{-a/\sqrt{2}}^{a/\sqrt{2}} 2ky^2 \left(\frac{a}{\sqrt{2}} - y\right) dy$$

$$= 2k.\ 2 \int_{O}^{a/\sqrt{2}} \frac{a}{\sqrt{2}} \left(y^2 - y^3\right) dy$$

$$= 4k. \left[\frac{a}{\sqrt{2}}\ \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_{o}^{a/\sqrt{2}}$$

$$= 4k \left[\frac{a^4}{12} - \frac{a^4}{16}\right]$$

$$= 4k \left[-\frac{a^4}{48}\right]$$

$$= \frac{-ka^4}{12}$$

AC-ஐப் பற்றிய நுண் செவ்வகப் பகுதியின் நி.தி.

$$= (2ky^2\ x\ \delta y)\ .\ y^2$$

$$= 2k\ y^4 \left(\frac{a}{\sqrt{2}} - y\right) \delta y.$$

AC-ஐப்பற்றிய சதுரத் தகட்டின் நி.தி.

$$= \int_{-a/\sqrt{2}}^{a/\sqrt{2}} 2ky^4 \left(\frac{a}{\sqrt{2}} - y\right) dy$$

$$= 2k.\,2 \int_{0}^{a/\sqrt{2}} \left(\frac{a}{\sqrt{2}} y^4 - y^5\right) dy$$

$$= 4k.\left[\frac{a}{\sqrt{2}} \frac{y^5}{5} - \frac{y^6}{6}\right]_0^{a/\sqrt{2}}$$

$$= 4k\left[\frac{a^6}{40} - \frac{a^6}{48}\right]$$

$$= 4k\left[-\frac{a^6}{240}\right]$$

$$= -\frac{ka^6}{60}$$

$$= \left[-\frac{ka^4}{12}\right]\frac{a^2}{5}$$

$$= \frac{M\,a^2}{5}$$

பயிற்சி 20

1. $2a$, $2b$ பக்கங்களும் M பொருண்மையுமுள்ள ஒரு செவ்வகத் தகட்டின் ஒரு மூலைவிட்டம் பற்றிய நிலைமத் திருப்புத்திறன் $\frac{M}{3} \frac{2a^2 b^2}{a^2 + b^2}$ என்று காட்டுக.

2. $2a$ பக்கமுடைய ஒரு சதுரத் தகட்டின் ஒரு மூலைவிட்டம் பற்றிய நிலைமத் திருப்புத்திறன் $\frac{Ma^2}{3}$ என்று காட்டுக.

3. a ஆரையும், M பொருண்மையுமுள்ள ஓர் அரை வட்டத் தகட்டின் எல்லை விட்டத்திற்கு இணையான தொடு கோட்டைப்பற்றிய நிலைமத் திருப்புத்திறன் $Ma^2\left(\frac{5}{4} - \frac{8}{3\pi}\right)$ என்று காட்டுக.

4. M பொருண்மையும், a அடிப்பக்க ஆரையும் கொண்ட ஒரு கூம்பின் அச்சைப்பற்றிய நிலைமத் திருப்புத்திறன் $\frac{3}{10} Ma^2$ என்று காட்டுக.

5. h உயரமும் a அடிப்பக்க ஆரையும் கொண்ட M பொருண்மையுள்ள ஒரு நேர்வட்டக் கூம்பின் ஒரு சாய்வுப் பக்கத்தைப்பற்றிய நிலைமத் திருப்புத்திறன் $\frac{3M}{80}(h^2 + 4a^2)$ என்று காட்டுக.

6. சாய்வு உயரம் l-ம், அடிப்பக்க ஆரை r-ம் கொண்ட ஓர் உள்ளீடற்ற நேர்வட்டக் கூம்பின் அடிப்பக்கம் மூடப்பட்டுள்ளது. அதன் மொத்தப் பொருண்மை M. அதன் சமச்சீர் அச்சைப்பற்றிய நிலைமத் திருப்புத்திறன் $\frac{1}{2} Mr^2$ என்றும், அதன் உச்சிவழியே அச்சுக்குச் செங்குத்தான நேர் கோட்டைப் பற்றிய நிலைமத் திருப்புத்திறன் $\frac{1}{4} M(2l^2 + 2rl - 3r^2)$ என்றும் காட்டுக.

7. M பொருண்மையும் a, b ஆகியவற்றை அரை அச்சுகளாகவும் கொண்ட ஒரு நீள்வட்டப் பரப்பின் r நீளமுள்ள ஒரு விட்டம் பற்றிய நிலைமத் திருப்புத்திறன் $\frac{1}{4} M \frac{a^2 b^2}{r^2}$ என்று காட்டுக.

(ஐ. ஏ. எஸ். 1953)

8. a, b என்ற அரை அச்சுகள் கொண்ட ஒரு நீள்வட்டத் தகட்டின் பொருண்மை M. அதன் மையத்திலிருந்து ஏதேனுமொரு தொடுகோட்டிற்குள்ள செங்குத்துத் தூரம் P எனில், அத் தொடுகோடுபற்றிய நீள்வட்டத்தின் நிலைமத் திருப்புத்திறன் $\frac{5}{4} MP^2$ என்று காட்டுக.

9. ஓர் இரு சமபக்க நேர்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணம் a; பொருண்மை M. கர்ணத்தைப்பற்றிய அம் முக்கோணத்தின் நிலைமத் திருப்புத்திறன் $\frac{Ma^2}{24}$ என்று காட்டுக.

10. a ஆரையும் M பொருண்மையுமுள்ள ஒரு வட்டத் தகட்டின் எந்தப் புள்ளியிலும் அடர்த்தியானது வட்ட மையத்திலிருந்து அப் புள்ளியின் தூரத்தின் வர்க்கத்திற்கேற்ப மாறுபடுகிறது. அதன் மையத்தின் வழியே அதன் தளத்திற்குச் செங்குத்தாகச் செல்லும் ஓர் அச்சைப்பற்றிய அத் தகட்டின் நிலைமத் திருப்புத்திறன் $\frac{2}{3} Ma^2$ என்று காட்டுக.

11. a பக்கமும் M பொருண்மையுமுள்ள ஒரு சதுரத் தகட்டிலிருந்து b ஆரையுள்ள ஒரு வட்டத் துவாரம் வெட்டியெடுக்கப்பட்டுள்ளது. துவாரத்தின் மையம் சதுரத்தின் மையத்திலிருந்தால் சதுரத்தின் ஒரு மூலைவிட்டத்தைப்பற்றிய எஞ்சியுள்ள பகுதியின் நிலைமத் திருப்புத்திறன் $\frac{M}{12}\frac{(a^4-3\pi b^4)}{a^2}$ என்று காட்டுக.

12. m பொருண்மையும் a ஆரையுமுள்ள ஓர் அரை வட்டத் தகட்டின் எல்லை விட்டத்தைப் பற்றிய நிலைமத் திருப்புத் திறன் $\frac{Ma^2}{4}$ என்று காட்டுக.

(மதுரை பி.எஸ்ஸி. 1971 செப்.)

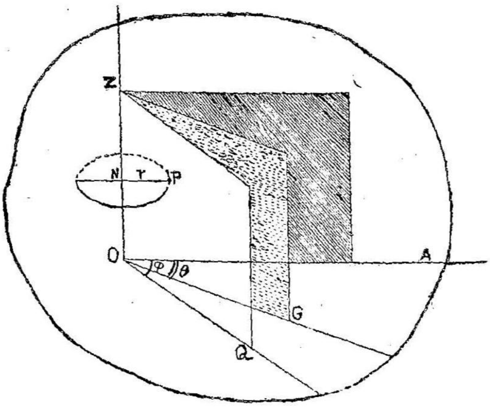
13. M பொருண்மையுள்ள $ABCD$ எனும் சீரான இணைகரத்தகட்டின் நான்கு பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகளில் $\frac{M}{6}$ பொருண்மையுள்ள சம துகள்களும், அதன் மூலைவிட்டங்களின் வெட்டுப் புள்ளியில் $\frac{M}{3}$ பொருண்மையுள்ள ஒரு துகளும் வைக்கப்பட்டுள்ளன. இவ்வைந்து துகள்களைக் கொண்ட தொகுதியும், இணைகரத் தகடும் சமதிருப்புத்திறன் தொகுதிகளாகுமென்று நிறுவுக.

14. M பொருண்மையுள்ள ஒரு சீரான செவ்வகத் தகட்டின் முனைகள் ஒவ்வொன்றிலும் $\frac{M}{12}$ பொருண்மையுள்ள ஒரு துகளும், செவ்வகத்தின் மையத்தில் $\frac{2}{3}M$ பொருண்மையுள்ள ஒரு துகளும் வைக்கப்பட்டுள்ளன. செவ்வகத்தின் ஒரு பக்கத்திற்கு இணையான ஒரு நேர்கோட்டைப்பற்றிய இவ்வைந்து துகள்களடங்கிய தொகுதியின் நிலைமத் திருப்புத்திறனும், செவ்வகத் தகட்டின் நிலைமத் திருப்புத்திறனும் சமமாகுமென்று காட்டுக.

12. நிலையான அச்சைப்பற்றிய இயக்கம்

(Motion about a Fixed Axis)

ஒரு நிலையான அச்சைப் பற்றிச் சுழலும் கட்டிறுக்கப் பொருள்மீது செயல்படும் விசைகளின் அவ்வச்சைப்பற்றிய திருப்புத்திறன்



படம் 149

M பொருண்மையுள்ள கட்டிறுக்கப் பொருளொன்று OZ என்னும் நிலையான அச்சைச் சுற்றிச் சுழலுவதாகக் கொள்க. ZOA என்பது வெளியில் (space) அமைந்துள்ள ஒரு நிலையான தளம். G என்பது கட்டிறுக்கப் பொருளின் சடத்துவ மையம் (centre of inertia). ZOG என்பது கட்டிறுக்கப் பொருளில் நிலையாக அமைந்துள்ள ஒரு தளம். t நேரத்தில் ZOA, ZOG ஆகிய தளங்களுக்கிடையேயுள்ள கோணம் θ என்க. $\therefore \quad A\hat{O}G = \theta$.

கட்டிறுக்கப் பொருளில் P என்னும் புள்ளியிலுள்ள m பொருண்மையுள்ள ஒரு துகளைக் கருதுக. OZ-லிருந்து இத்

துகளின் தூரம் r என்க. எனவே, $PN \perp OZ$ எனில் $PN = r$ ஆகும். ZOQ என்பது OZ, P ஆகியவற்றின் வழியே செல்லும் ஒரு தளம். ZOQ, ZOA ஆகிய தளங்களுக்கிடையேயுள்ள கோணம் ϕ என்க. $\therefore \hat{AOQ} = \phi$.

ZOG, ZOQ ஆகிய இரு தளங்களும் கட்டிறுக்கப் பொருளிலேயே அமைந்திருப்பதால் கட்டிறுக்கப் பொருள் OZ ஐப்பற்றிச் சுழலும்போது அவ்விரு தளங்களுக்கு மிடையேயுள்ள கோணம் மாறாது.

அதாவது, $\hat{GOQ} = (\phi - \theta)$ என்பது இயக்கம் முழுவதும் மாறாமல் அப்படியே இருக்கும்.

அதாவது, $\phi - \theta =$ மாறிலி.

$$\therefore \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\theta}{dt}; \quad \frac{d^2\phi}{dt^2} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad \dots \quad (1)$$

கட்டிறுக்கப் பொருள் OZஐப் பற்றிச் சுழலும்போது P யிலுள்ள துகளானது N ஐ மையமாகவும் OZஐ அச்சாகவும் கொண்டு r ஆரையுள்ள ஒரு வட்டப்பாதையில் இயங்கும். இத் துகள் இரு முடுக்கங்களைப் பெற்றிருக்கும்.

(i) PN வழியே செங்கோட்டு முடுக்கம்.

(ii) PN-க்குச் செங்குத்தாகத் தொடுகோட்டு முடுக்கம்.

துகளின் தொடுகோட்டு வேகம் v என்றும், சுழல்வேகம் ω என்றும் கொள்க.

$$\therefore \omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\theta}{dt}; \quad v = r\omega.$$

$$PN \text{ வழியே செங்கோட்டு முடுக்கம்} = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 = r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

PN-க்குச் செங்குத்தாகத் தொடுகோட்டு முடுக்கம்

$$= \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(r\omega) = r\frac{d\omega}{dt} = r\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\therefore PN \text{ வழியே துகளின்மீது செயல்படும் விசை} = mr\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

PN-க்குச் செங்குத்தாகத் துகளின்மீது செயல்படும் விசை

$$= mr\,\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

இவ் விரு விசைகளுக்கும் OZ-ஐப் பற்றிய திருப்புத்திறன் காண்க.

PN வழியே செயல்படும் $mr\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ எனும் விசை PN-ஐ N-ல் சந்திப்பதால் PNஐப் பற்றி அதன் திருப்புத்திறன் பூச்சியமாகும்.

ஆனால் PN-க்குச் செங்குத்தாகச் செயல்படும் $mr\frac{d^2\theta}{dt^2}$ எனும் விசை OZ-லிருந்து r தூரத்தில் செயல்படுவதால், OZ ஐப் பற்றி அதன் திருப்புத்திறன் $= r \times mr\frac{d^2\theta}{dt^2} = mr^2\frac{d^2\theta}{dt^2}$ ஆகும். ஆகவே, OZஐப் பற்றி P-யிலுள்ள துகளின்மீது செயல்படுகின்ற விசைகளின் மொத்தத் திருப்புத்திறன் $mr^2\frac{d^2\theta}{dt^2}$ ஆகும்.

∴ கட்டிறுக்கப் பொருளின்மீது செயல்படும் எல்லா விசைகளின் OZ ஐப் பற்றிய திருப்புத்திறன் $= \Sigma\, mr^2\frac{d^2\theta}{dt^2}$

$= \frac{d^2\theta}{dt^2}\,.\,\Sigma\, mr^2$, ஏனெனில் $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ எல்லாத் துகள்களுக்கும் ஒரே மாதிரியேயிருக்கும்.

$= \frac{d^2\theta}{dt^2}\,.\,Mk^2$, k என்பது சுழியாரை

$= Mk^2\,\ddot{\theta}$

ஒரு நிலையான அச்சைப்பற்றிச் சுழலும் கட்டிறுக்கப் பொருளின் இயக்க ஆற்றல் (K. E. of a rigid body rotating about a fixed axis)

P-யிலுள்ள m பொருண்மையுள்ள துகள் PN-க்குச் செங்குத்துத் திசையில் $v = r\omega = r\,\frac{d\theta}{dt}$ எனும் திசைவேகத்துடன் சுழலுகிறது.

ஆகவே, இத் துகளின் இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2}\,mv^2$

$$= \frac{1}{2} mr^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

∴ கட்டிறுக்கப் பொருளின் இயக்க ஆற்றல்

$$= \Sigma \frac{1}{2} mr^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 . \Sigma mr^2$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 Mk^2$$

$$= \frac{1}{2} Mk^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$= \frac{1}{2} Mk^2 \omega^2$ அல்லது

$$= \frac{1}{2} Mk^2 \dot{\theta}^2$$

ஒரு நிலையான அச்சைப் பற்றிச் சுழலும் கட்டிறுக்கப் பொருளின் சுழலுந்தம் அல்லது உந்தத் திருப்பம் (Angular momentum or moment of momentum of a rigid body rotating about a fixed axis)

துகள் P-யின் திசைவேகம் $v = r \frac{d\theta}{dt}$ ஆகையால் அதன் உந்தம் $mr \frac{d\theta}{dt}$ ஆகும். அதன் வேகத்தின் திசைக்கும் OZ-க்கு மிடையேயுள்ள தூரம் r ஆதலின்,

OZஐப் பற்றி இவ்வுந்தத்தின் திருப்புத்திறன் $= mr \frac{d\theta}{dt} \times r$

$$= mr^2 \frac{d\theta}{dt}$$

அதாவது OZ ஐப் பற்றி துகளின் உந்தத்திருப்பம் (சுழலுந்தம்)

$$= mr^2 \frac{d\theta}{dt}$$

∴ OZ ஐப் பற்றி கட்டிறுக்கப் பொருளின் உந்தத் திருப்பம் (சுழலுந்தம்) $= \Sigma mr^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt} . \Sigma mr^2$

$$= \frac{d\theta}{dt} . Mk^2$$

$$= Mk^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)$$

$= Mk^2 \dot{\theta}$; அல்லது

$= Mk^2 \omega$

சுழலச்சைப்பற்றிய இயக்கச் சமன்பாடு (Equation of Motion about the axis of rotation)

P-யிலுள்ள துகளின்மீது செயல்படுகின்ற விசைகள் PN வழியே $mr\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ என்றும், PN-க்குச் செங்குத்துத் திசையில் $mr\frac{d^2\theta}{dt^2}$ என்றும் கண்டோம். இவ்விரு விசைகள் துகளின் இயக்கத்திற்குத் தேவையான முடுக்கங்களை அளிப்பதால் அவை 'பயன்படு விசைகள்' (effective forces) என்றழைக்கப்படு கின்றன. கட்டிறுக்கப் பொருளின்மீதுள்ள எல்லாத் துகள் களின்மீதும் செயல்படுகின்ற இத்தகைய 'பயன்படு விசை களின்' OZஐப் பற்றிய திருப்புத்திறன்களின் மொத்தம் $\Sigma mr^2\frac{d^2\theta}{dt^2} = Mk^2\frac{d^2\theta}{dt^2}$ என்றும் கண்டோம். ஆனால், பொரு ளின் மீது செயல்படுத்தப்பட்ட விசைகளின் (impressed forces) OZஐப் பற்றிய திருப்புத்திறன்களின் மொத்தம் L எனில், பயன்படு விசைகளின் மொத்தத் திருப்புத்திறன் செயல்படுத்தப் பட்ட விசைகளின் மொத்தத் திருப்புத்திறனுக்குச் சமமாக இருக்க வேண்டுமாதலின்,

$$Mk^2\frac{d^2\theta}{dt^2} = L \text{ அல்லது, } Mk^2\dot{\omega} = L.$$

என்னும் இயக்கச் சமன்பாட்டைப் பெறுகிறோம்.

இச் சமன்பாட்டை இருமுறை தொகையீடு செய்து ω, θ ஆகியவற்றின் தொடக்க மதிப்புகளின்மூலம் தொகையீட்டு மாறிலிகளை நிர்ணயித்து ω, θ ஆகியவற்றைப் பெறலாம்.

சுழலுந்தக் காப்புத் தத்துவம் (Principle of conservation of angular momentum)

OZ என்னும் நிலையான அச்சைப்பற்றிச் சுழலுகின்ற ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின்மீது செயல்படுத்தப்பட்ட விசைகளின் அவ் வச்சைப்பற்றிய திருப்புத் திறன்களின் மொத்தமாகிய L பூச்சியமாயின்;

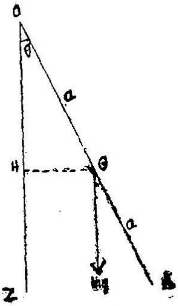
$$Mk^2\dot{\omega} = 0$$

ஆகும். தொகையீடு காணின், $Mk^2\omega$ = மாறிலியாகும்.

அதாவது, கட்டிறுக்கப் பொருளின் சுழலுந்தம் ஒரு மாறிலி யென்று காண்கிறோம்.

அதாவது, ஒரு நிலையான அச்சைப் பற்றிச் சுழலுகின்ற ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின்மீது செயல்படுத்தப்பட்ட விசைகளின் அவ் வச்சைப்பற்றிய திருப்புத்திறன்களின் மொத்தம் பூச்சியமெனில், அவ் வச்சைப்பற்றி அப் பொருளின் சுழலுந்தம் ஒரு மாறிலியாகும். இதுவே சுழலுந்தக் காப்புத் தத்துவமாகும்.

மாதிரி 198. m பொருண்மையும் $2a$ நீள முழுள்ள ஒரு சீரான கோல் அதன் நிலையான ஒரு முனையைச் சுற்றித் திரும்ப முடியும். அது நிலைக்குத்தாகத் தொங்கும் நிலையிலிருந்து ω சுழல் வேகத்துடன் சுழலத் தொடங்கினால் எந்தக் கணத்திலும் அதன் சுழல் வேகத்தைக் காண்க.



படம் 150

தீர்வு : OA என்பது m பொருண்மையும், $2a$ நீளமுமுள்ள ஒரு சீரான கோல். அது O எனும் முனையைச் சுற்றித் திரும்பக்கூடியதாக யிருக்கின்றது. O வழியே செல்லும் கிடைக்கோட்டினைச் சுழலச்சாகக் கருதுக.

தொடக்கத்தில் கோலானது OZ என்னும் நிலைக்குத்து நிலையில் தொங்குகிறது. பின் t நேரத்தில் θ கோணத்திற்குத் திரும்பி OA என்னும் நிலையிலிருப்பதாகக் கொள்க. அதன் எடை mg ஆனது அதன் நடுப்புள்ளி G வழியே நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கிச் செயல்படும்.

$$O \text{ ஐப்பற்றி } mg\text{-ன் திருப்புத்திறன்} = -mg.\,GH$$
$$= -mg\,a\sin\theta.$$

$$\therefore \text{ இயக்கச் சமன்பாடு } mk^2\frac{d^2\theta}{d\theta^2} = -mg\,a\sin\theta$$

$$\text{அல்லது,}\quad k^2\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\,a\sin\theta.$$

ஆனால் $2a$ நீளக் கோலின் முனைவழிச் செங்குத்துக் கோட்டைப்பற்றிய நி. தி. $m\dfrac{4a^2}{3}$

$$\text{ஆகையால்}\quad mk^2 = m.\frac{4a^2}{3} \text{ அல்லது, } k^2 = \frac{4a^2}{3}$$

$$\therefore \frac{4a^2}{3} \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\,a \sin\theta$$

அல்லது,
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{3g}{4a}\sin\theta.$$

இருபக்கமும் $2\,\frac{d\theta}{dt}$ ஆல் பெருக்கித் தொகையீடு காணவும்.

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{3g}{2a}(-\cos\theta) + C$$

$$= \frac{3g}{2a}\cos\theta + C.$$

தொடக்கத்தில் $\theta = O$, $\frac{d\theta}{dt} = \omega$.

$$\therefore \omega^2 = \frac{3g}{2a} + C$$

அல்லது,
$$C = \omega^2 - \frac{3g}{2a}$$

$$\therefore \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{3g}{2a}\cos\theta + \omega^2 - \frac{3g}{2a}$$

$$= \omega^2 - \frac{3g}{2a}(1 - \cos\theta)$$

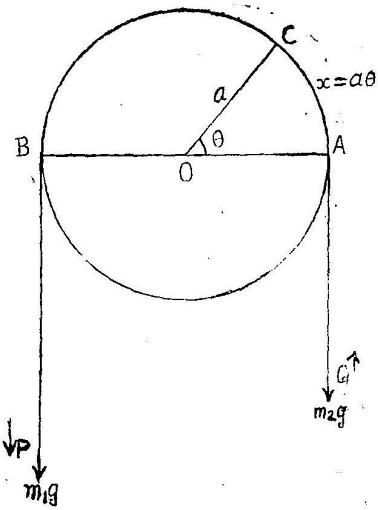
இச் சமன்பாட்டிலிருந்து எந்தக் கணத்திலும் கோலின் சுழல் வேகத்தைப் பெறலாம்.

மாதிரி 199. m_1, m_2 எனும் இரு சமனற்ற பொருண்மைகள் $(m_1 > m^2)$ M பொருண்மையும் a ஆரையுமுள்ள ஒரு வட்டக் கப்பியின் வழியே செல்லும் ஓர் இலேசான கயிற்றின் மூலம் இணைக்கப்பட்டுத் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளன. கயிற்றில் வழுக்குதலேதுமில்லை. கப்பியின் அச்சிலுள்ள உராய்வு புறக்கணிக்கப்படலாம். இத் தொகுதியின் முடுக்கம் f ஆனது நிலை

யானதென்றும், கப்பியின் அச்சைப்பற்றிக் கப்பியின் சுழலாரை k எனில், $k^2 = \frac{a^2}{Mf}\left\{(g-f)\,m_1 - (g+f)\,m_2\right\}$

என்றும் காட்டுக.

தீர்வு: t நேரத்தில் m_1 ஆனது x தூரம் கீழ் நோக்கியும் m_2 ஆனது x தூரம் மேல் நோக்கியும் நகர்ந்திருப்பதாகக் கொள்க. அதே நேரத்தில் கப்பியானது AC என்னும் வில்லின் நீளத்திற்கு θ கோணத்தில் திரும்பியிருக்குமென்று கொள்க.



படம் 151

$\therefore \quad x =$ வில் $AC = a\theta$.

$\therefore \quad \dot{x} = a\dot{\theta}$

m_1 இன் இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2$

m_2 இன் இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2$

கப்பியின் இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2} M k^2 \dot{\theta}^2$

$$= \frac{1}{2} Mk^2 \frac{\dot{x}^2}{a^2}$$

ஆகவே, தொகுதியின் மொத்த இயக்க ஆற்றல்

$$= \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} Mk^2 \frac{\dot{x}_2}{a^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\; m_1 + m_2 + M\frac{k^2}{a^2}\right]$$

இந்த நேரத்தில் m_1 ஆல் செய்யப்பட்ட வேலை $= m_1\, gx$

m_2 ஆல் செய்யப்பட்ட வேலை $= -\,m_2\, gx$

மொத்தம் செய்யப்பட்ட வேலை $= (m_1 - m_2)\, gx$.

ஆகவே, இயக்க ஆற்றல் சமன்பாடு வருமாறு:

$$\tfrac{1}{2}\left[m_1 + m_2 + \frac{Mk^2}{a^2}\right]\dot{x}^2 = (m_1 - m_2)\, gx$$

t ஐப் பொறுத்து வகையீடு செய்க.

$$\tfrac{1}{2}\left[m_1 + m_2 + M\frac{k^2}{a^2}\right].\ 2\,\dot{x}\,\ddot{x} = (m_1 - m_2)\, g\,\dot{x}$$

அல்லது, $$\left[m_1 + m_2 + M\frac{k^2}{a^2}\right]\ddot{x} = (m_1 - m_2)\, g$$

ஆகவே, முடுக்கம் $f = \ddot{x} = \dfrac{(m_1 - m_2)\, g}{m_1 + m_2 + M\dfrac{k^2}{a}} =$ மாறிலி.

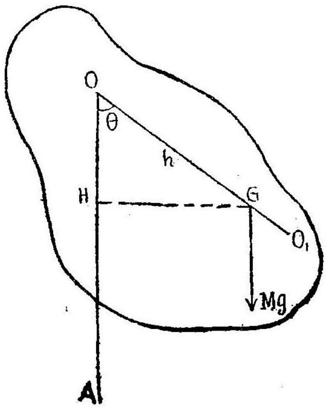
மேலும், $\left(m_1 + m_2 + M\dfrac{k^2}{a^2}\right) f = (m_1 - m_2) g$ ஆகையால்,

$$M\frac{k^2}{a^2} f = (g - f)\, m_1 - (g + f)\, m_2$$

அல்லது, $$k^2 = \frac{a^2}{Mf}\{(g - f)\, m_1 - (g + f)\, m_2\}.$$

கூட்டுசல் (Compound pendulum)

ஒரு நிலையான கிடையச்சைச் சுற்றி நிலைத்தளத்தில் தாராளமாகச் சுழலக்கூடிய ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருள் கூட்டுசல் அல்லது கூட்டு ஊசலி எனப்படும்.



படம் 152

கூட்டுசலின் ஒரு சிறு அலைவின் நேரம்

M பொருண்மையுள்ள ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருள் O என்னும் புள்ளிவழியே செல்லும் ஒரு கிடை அச்சைச் சுற்றிச் சுழலுகிறது. G என்பது பொருளின் புவியீர்ப்பு மையம். பொருளின்மீது G வழியே செல்லும் நிலைத்தளத்தின் குறுக்கு வெட்டுமுகம் படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளது. இந் நிலைத்தளம் சுழலச்சை O என்னும் புள்ளியில் வெட்டுகிறது. OA என்பது O வழியே செல்லும் நிலைக் குத்துக் கோடு. t நேரத்தில் பொருளானது θ கோணத்தில் திரும்பியிருப்பதாகக் கொள்க.

$\therefore G\hat{O}A = \theta$

பொருளின்மீது செயல்படுகின்ற விசைகளாவன :

(i) G வழியே நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கிச் செயல் படும் பொருளின் எடை Mg.

(ii) O-வில் சுழலச்சின் மீதுள்ள அழுத்தம்.

சுழலச்சைப் பற்றித் திருப்புத்திறன் காண்க.

$OG = h$ எனில், சுழலச்சைப் பற்றி Mg இன் திருப்புத்திறன் $-Mgh \sin \theta$. O விலுள்ள அழுத்தத்தின் திருப்புத்திறன் பூச்சிய மாகும்.

ஆகவே மொத்தத் திருப்புத்திறன் $= -Mgh \sin \theta$.

ஆகவே, சுழலியக்கச் சமன்பாடு வருமாறு :

$$Mk^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -Mgh \sin \theta$$

அல்லது, $$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{gh}{k^2} \sin \theta$$

$$= -\frac{gh}{k^2} \cdot \theta, \text{ ஏனெனில் } \theta \text{ மிகச் சிறியது.}$$

$$= -\mu\,\theta \text{ என்க, } \mu = \frac{gh}{k^2}.$$

இது ஒரு சாமானிய சீரிசை இயக்கச் சமன்பாடு ஆகும். ஆகவே, ஒரு சிறு அலைவின் நேரம்

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} = \frac{2\pi}{\sqrt{gh/k^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{k^2}{gh}}$$

தனிச்சம ஊசலி (த.ச.ஊ.) (Simple Equivalent Pendulum —S.E.P)

ஒரு கூட்டு ஊசலியின் காலவட்ட நேரத்தையே காலவட்ட நேரமாகக் கொண்ட ஒரு தனி ஊசலியானது அக் கூட்டு ஊசலிக்குச் சமமான 'தனிச்சம ஊசலி' என்றழைக்கப்படும்.

ஒரு தனி ஊசலியின் நீளம் l எனில் அதன் காலவட்ட நேரம் $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ ஆகும். ஒரு கூட்டு ஊசலியின் காலவட்ட நேரம் $2\pi\sqrt{\frac{k^2}{gh}}$ ஆகும்.

இவ்விரு காலவட்டங்களும் சமமாக வேண்டுமாயின்,

$$\frac{l}{g} = \frac{k^2}{gh}$$

அல்லது, $l = \frac{k^2}{h}$.

அதாவது, $2\pi\sqrt{\frac{k^2}{gh}}$ காலவட்ட நேரமுடைய ஒரு கூட்டு ஊசலிக்குச் சமமான தனிச்சம ஊசலியின் நீளம் $\frac{k^2}{h}$ ஆகும். $\frac{k^2}{h}$ எனும் இக் கணியம் தனிச்சம ஊசலியின் நீளம் என்றழைக்கப் படுகிறது.

தொங்கு மையம் (Centre of suspension)

ஒரு நிலையான அச்சைச் சுற்றிச் சுழலுகின்ற ஒரு கட்டிறுக் கப் பொருளின் புவியீர்ப்பு மையம் வழியே சுழலச்சுக்குச் செங்குத் தான தளம் சுழலச்சை வெட்டுகின்ற புள்ளிக்குத் 'தொங்கு மையம்' என்று பெயர். (கூட்டு ஊசலியின் படத்தில் O என்பது தொங்கு மையமாகும்.)

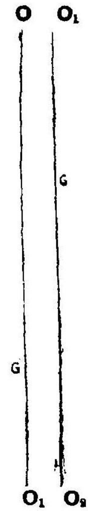
அலைவு மையம் (Centre of oscillation)

ஒரு நிலையான அச்சைச் சுற்றிச் சுழலும் ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் புவியீர்ப்பு மையம் G, தொங்கு மையம் O, தனிச்சம ஊசலியின் நீளம் $\frac{k^2}{h}$ என்று கொள்க. OG-ஐ $OO_1 = \frac{k^2}{h}$ என்றவாறு O_1 வரை நீட்டுக. O_1 என்னும் புள்ளியானது அக் கட்டிறுக்கப் பொருளின் அலைவு மையம் எனப்படும்.

தொங்கு மையமும் அலைவு மையமும் ஒன்றுக்கொன்று மாற்றப்படக் கூடியவை

ஒரு நிலையான அச்சைச் சுற்றிச் சுழலுகின்ற ஒரு கட்டிறுக் கப் பொருளின் தொங்கு மையம் O என்றும், அலைவு மையம்

O_1 என்றும் கொள்க. அதன் புவியீர்ப்பு மையம் G என்றும், சுழியாரை k என்றும் கொள்க. $OG = h$ எனில், $OO_1 = \frac{k^2}{h}$ ஆகும்.



படம் 153

G வழியே சுழலச்சுக்கு இணையாகச் செல்லும் ஓர் அச்சைப் பற்றி அப் பொருளின் சுழியாரை K என்க.

∴ இணையச்சுத் தேற்றப்படி,

$$Mk^2 = MK^2 + M.\ OG^2$$

அல்லது, $k^2 = K^2 + OG^2$

$$OG = h,\ OO_1 = \frac{k^2}{h} \text{ ஆதலின்,}$$

$$OO_1 = \frac{k^2}{h} = \frac{K^2 + OG^2}{OG}$$

$$\therefore\ K^2 + OG^2 = OO_1\ .\ OG^2$$

$$K^2 = OO_1\ .\ OG - OG^2$$

$$= OG\,(OO_1 - OG)$$

$$= OG.\ GO_1$$

இப்பொழுது O_1 வழியே செல்லும் ஓர் இணையான அச்சைப் பற்றிப் பொருள் சுழலுவதாகக் கொள்க. அதாவது, O_1 ஐத் தொங்கு மையமாகக் கொள்க.

இப்பொழுது புதிய அலைவு மையம் O_2 எனில், முன்போல்

$$K^2 = O_1G.\ GO_2$$

ஆகும்.

$$\therefore\ OG\ .\ GO_1 = O_1G.\ GO_2$$

அல்லது, $OG = GO_2$

அதாவது O_2 ஆனது O-வின் மேல் பொருந்துகிறது.

அதாவது, O_1 ஐத் தொங்கு மையமாகக் கொள்ளும்போது O ஆனது அலைவு மையமாக மாறுகிறது. ஆகவே, தொங்கு மையமும் அலைவு மையமும் ஒன்றுக்கொன்று மாற்றப்படக் கூடிய தன்மை வாய்ந்தவையென்று காண்கிறோம்.

சுழலச்சின் திசை தரப்பட்டிருப்பின் மீச்சிறு அலைவு நேரம் காணல்

ஒரு நிலையான அச்சைச் சுற்றிச் சுழலக்கூடிய ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் புவியீர்ப்பு மையம் சுழலச்சிலிருந்து h தூரத்திலிருப்பதாகக் கொள்க. சுழலச்சைப் பற்றிப் பொருளின் சுழியாரை k என்றும், புவியீர்ப்பு மையம் வழியே சுழலச்சுக்கு இணையான அச்சைப் பற்றிப் பொருளின் சுழியாரை K என்றும் கொண்டால்,

$$k^2 = K^2 + h^2$$

என்று கண்டோம். தனிச்சம ஊசலியின் நீளம் l எனில்,

$$l = \frac{k^2}{h} = \frac{K^2 + h^2}{h} = h + \frac{K^2}{h}$$

$$\therefore \frac{dl}{dh} = 1 - \frac{K^2}{h^2}$$

l-ன் மீப்பெரு அல்லது மீச்சிறு மதிப்புக்கு $\frac{dl}{dh} = O.$

$$\therefore 1 - \frac{K^2}{h^2} = O$$

அல்லது, $h = K.$

$$\therefore l = K + \frac{K^2}{K} = 2K.$$

மேலும் $\frac{d^2l}{dh^2} = \frac{2K^2}{h^3}$

= ஒரு நேரெண் $h = K$ ஆக யிருக்கும்போது,

ஆகவே, $h = K$ ஆக யிருக்கும்போது l மீச்சிறியதாகயிருக்கும்.

l-ன் மீச்சிறு நீளம் $= 2K.$

ஆனால், l மீச்சிறிதாயிருக்கும்போது அலைவு நேரமும் மீச்சிறிதாக யிருக்குமாதலின், சுழலச்சிலிருந்து புவியீர்ப்பு மையத்தின் தூரம் hஆனது புவியீர்ப்பு மையம் வழியே சுழலச்சுக்கு இணையாகச் செல்லும் அச்சைப் பற்றிப் பொருளின் சுழியாரையாகிய K-க்குச் சமமாயின், அலைவு நேரம் மீச்சிறிதாகயிருக்கும்.

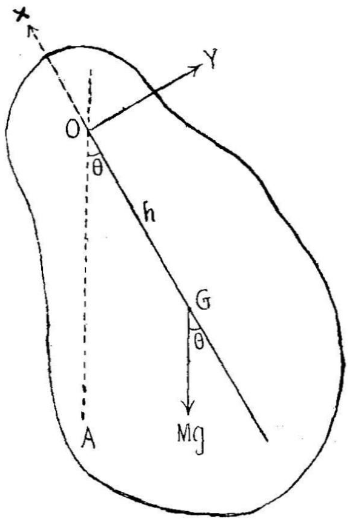
குறிப்பு: $h = O$ ஆக யிருந்தாலும் அல்லது $h = \infty$ ஆக யிருந்தாலும் $l = \infty$ ஆகும். அதாவது, சுழலச்சு புவியீர்ப்பு

மையம் வழியே சென்றாலும் அல்லது புவியீர்ப்பு மையத்திலிருந்து கந்தழித் தூரத்திலிருந்தாலும் தனிச்சம ஊசலியின் நீளம் கந்தழியாகயிருக்குமாகையால், அலைவு நேரமும் கந்தழியாகயிருக்குமென்றறிக.

கூட்டுசலின் சுழலச்சின் மீதுள்ள அழுத்தம்

G என்பது பொருளின் புவியீர்ப்பு மையம். G வழியே செல்லும் நிலைத்தளம் சுழலச்சை O-ல் செங்குத்தாக வெட்டுகிறது. $OG = h$ என்க. t நேரத்தில் பொருளானது நிலைக்குத்திலிருந்து θ கோணத்தில் திரும்பியுள்ளதெனக் கொள்க.

சுழற்சியின் காரணமாக சுழலச்சின் மீதுள்ள அழுத்தம் R என்க. இவ்வழுத்தத்தின் கூறுகள் GO வழியே X என்றும், GO-க்குச் செங்குத்த் திசையில் Y என்றும் கொள்க.



படம் 154

O ஐப்பற்றிய திருப்புத்திறன் காண்க.

$$Mk^2 \ddot{\theta} = -Mgh \sin \theta$$

அல்லது, $$k^2 \ddot{\theta} = -gh \sin \theta \qquad \ldots \quad (1)$$

G ஆனது O ஐ மையமாகவும் $OG = h$ ஐ ஆரையாகவும் கொண்ட ஒரு வட்டப் பாதையில் சுழலுமாகையால், GO வழியாகவும், GO-க்குச் செங்குத்துத் திசையில் அதன் முடுக்கங்கள் முறையே $h\dot{\theta}^2$, $h\ddot{\theta}$ ஆகும்.

GO வழியே விசைப் பிரிப்பு செய்க.

$$Mh\dot{\theta}^2 = X - Mg \cos \theta \qquad \ldots \quad (2)$$

GO-க்குச் செங்குத்துத் திசையில் விசைப் பிரிப்பு செய்க.

$$Mh\ddot{\theta} = Y - Mg \sin \theta \qquad \ldots \quad (3)$$

(1)-லிருந்து $= \ddot{\theta} = -\frac{gh}{k^2}\sin\theta$ என்னும் மதிப்பை (3)-ல் பிரதியிடுக.

$$Y = Mg\sin\theta + Mh\ddot{\theta}$$

$$= Mg\sin\theta = \frac{Mgh^2}{k^2}\sin\theta$$

$$= \frac{Mg}{k^2}\sin\theta\,(k^2 - k^2)$$

சமன்பாடு (1) ஐத் தொகையீடு செய்து, தொடக்க நிலை நிபந்தனைகளைப் பயன்படுத்தி $\dot{\theta}$-ன் மதிப்பைக் கணக்கிட்டு, சமன்பாடு (2)-ல் பிரதியிட்டு X-ன் மதிப்பைப் பெறலாம்.

∴ சுழலச்சின் மீதுள்ள அழுத்தம் $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

இவ்வழுத்தம் செயல்படும் திசையானது GO வுடன் $\tan^{-1}\left(\frac{Y}{X}\right)$

மாதிரி 200. a ஆரையுள்ள ஒரு வட்டத் தகடு அதன் மையத்திலிருந்து h தூரத்தில் (i) தகட்டின் தளத்திலுள்ள, (*ii*) தகட்டின் தளத்திற்குச் செங்குத்தாகவுள்ள கிடையச்சைச் சுற்றிச் சுழலுகிறது. அலைவு நேரத்தைக் காண்க.

(சென்னை, பி.எஸ்ஸி., 1967, செப்.)

தீர்வு: வட்டத் தகட்டின் பொருண்மை M என்க.

வட்டத் தகட்டின் ஒரு விட்டத்தைப்பற்றிய நி. தி. $= M\frac{a^2}{4}$

∴ இணையச்சுத் தேற்றத்தின்படி, h தூரத்திலுள்ள இணையான அச்சைப்பற்றி வட்டத்தகட்டின் நி. தி.

$$= M\frac{a^2}{4} + Mh^2 = M\left(\frac{a^2}{4} + h^2\right) = \frac{M}{4}(a^2 + 4h^2)$$

∴ இவ் விணையச்சைப் பற்றிய சுழியாரை k எனில்,

$$k^2 = \left(\frac{a^2 + 4h^2}{4}\right)$$

$$\therefore \text{அலைவு நேரம்} = 2\pi\sqrt{\frac{k^2}{gh}}$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{a^2 + 4h^2}{4\,gh}}$$

$$= \pi \sqrt{\frac{a^2 + 4h^2}{gh}}\ .$$

(*ii*) வட்டத் தகட்டின் மையம் வழியே செங்குத்தாகச் செல்லும் அச்சைப் பற்றித் தகட்டின் நிலைமத் திருப்புத்திறன் $\frac{Ma^2}{2}$

∴ h தூரத்திலுள்ள இணையச்சைப் பற்றிய நி. தி.

$$= \frac{Ma^2}{2} + Mh^2 = \frac{M}{2}(a^2 + 2h^2)$$

$$\therefore\ K^2 + \frac{a^2 + 2h^2}{2}$$

$$\text{கால வட்டம்} = 2\pi \sqrt{\frac{k^2}{gh}}$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{a^2 + 2\,h^2}{2gh}}$$

மாதிரி 201. $2a$ பக்கமுள்ள ஒரு சதுரத் தகடு அதன் ஒரு முனை வழியே அதன் தளத்திற்குச் செங்குத்தாகச் செல்லும் ஒரு கிடையச்சைச் சுற்றி ஒரு நிலைத் தளத்தில் சுழல்கிறது. அதன் எதிர் முனையில் அத் தகட்டின் எடைக்குச் சமமான எடையொன்று வைக்கப்படுகிறது. தனிச் சம ஊசலியின் நீளம் காண்க.

தீர்வு: சதுரத் தகட்டின் பொருண்மை M எனில், அதன் மையம் வழியே அதன் தளத்திற்குச் செங்குத்தான அச்சைப் பற்றிய நி. தி. $= \frac{2}{3}\ Ma^2$.

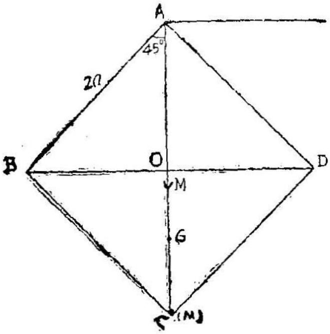
இங்கு எதிர்முனையில் M எனும் பொருண்மை வைக்கப் பட்டுள்ளதால் மொத்தப் பொருண்மை $2\ M$ ஆகும்.

ஆகவே சதுரத்தின், மைய வழி அச்சைப் பற்றிய நி. தி.

$$= \tfrac{2}{3}(2M)\,a^2 = \tfrac{4}{3}\,Ma^2$$

O விலும் C யிலும் சமப் பொருண்மைகள் இருப்பதால், புவியீர்ப்பு மையம் G ஆனது OC யின் நடுப்புள்ளியிலிருக்கும்.

இப்பொழுது $OA = OC = 2a \cos 45^\circ$



படம் 155

$$= 2a\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \sqrt{2}\, a.$$

$$\therefore\ OG = \frac{\sqrt{2}\, a}{2}$$

$$\therefore\ AG = \sqrt{2}\, a + \sqrt{\frac{2}{2}}\, a = \frac{3}{2}\sqrt{2}\, a.$$

அதாவது, $h = \dfrac{3}{2}\sqrt{2}\, a.$

O வழிச் செங்குத்து அச்சுக்கு இணையாக A வழியே செல்லும் செங்குத்து அச்சைப் பற்றிய நி. தி.

$$= \tfrac{4}{3} Ma^2 + (2M)(\sqrt{2}\, a)^2$$

$$= \tfrac{4}{3} Ma^2 + 4\, Ma^2$$

$$= \tfrac{16}{3} Ma^2.$$

$$\therefore\ k^2 = \tfrac{16}{3} a^2.$$

தனிச் சம ஊசலியின் நீளம் $= \dfrac{k^2}{h}$

$$= \frac{\frac{16}{3} a^2}{\frac{3}{2}\sqrt{2}\, a}$$

$$= \frac{16}{9}\sqrt{2}\, a.$$

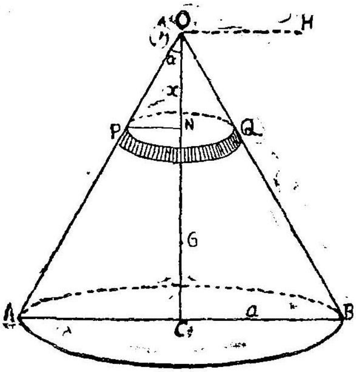
மாதிரி 202. உயரம் h-ம், உச்சிக்கோணம் 2αவுமுடைய ஒரு சீரான திண்மக் கூம்பு அதன் உச்சி வழியே செல்லும் ஒரு கிடையச்சைப் பற்றி ஊசலாடுகிறது. தனிச்சம ஊசலியின் நீளம் $\frac{1}{5} h\,(4 + \tan^2 \alpha)$ என்று காட்டுக.

(சென்னை, பி.எஸ்ஸி. 1962, செப்., '70 ஏப்.)

தீர்வு : OAB என்னும் கூம்பு வழியே செல்லும் OH என்னும் கிடையச்சைச் சுற்றிச் சுழல்கிறது.

கூம்பின் உயரம் $OC = h$

உச்சிக் கோணம் $= 2\alpha$. கூம்பின் பொருண்மை M என்க. ஓர் அலகுக் கன அளவின் பொருண்மை P எனில்,



படம் 156

$$P = \frac{M}{\frac{1}{3}\pi a^2 h} = \frac{3M}{\pi a^2 h}$$

$$= \frac{3M}{\pi h^3 \tan^2 \alpha}$$

O-விலிருந்து x தூரத்தில் கூம்பின் அச்சுக்குச் செங்குத்தான δx கனமுள்ள ஒரு வட்டத் தகட்டைக் கருதுக. அதன் ஆரை a எனில், $a = x \tan \alpha$ ஆகும்.

$\therefore$ வட்டத் தகட்டின் பொருண்மை $m = \rho . \pi (x \tan \alpha)^2 . \delta x$

$$= \rho \pi \tan^2 \alpha . x^2 \delta x.$$

OH-க்கு இணையான விட்டத்தைப் பற்றி வட்டத் தகட்டின் நி.தி

$$= m \frac{a^2}{4}$$

$$= \rho\pi \tan^2\alpha . x^2 \delta x . \frac{(x \tan \alpha)^2}{4}$$

$$= \frac{\rho \pi \tan^4 \alpha}{4} x^4 \delta x.$$

இவ் விட்டமானது OH-லிருந்து x தூரத்திலிருப்பதால்,

OHஐப் பற்றிய நி. தி. =

$$= \frac{\rho\pi \tan^4 \alpha}{4} x^4 \, \delta x + \rho \pi \tan^2\alpha . \, x^2 \, \delta x . \, x^2$$

$$= \frac{\rho \pi \tan^2 \alpha}{4} [\tan^2\alpha + 4] \, x^4 \, \delta x.$$

∴ OH ஐப் பற்றி முழுக் கூம்பின் நி. தி.

$$= \frac{\rho\pi \tan^2 \alpha}{4} (\tan^2\alpha + 4) \int_O^h x^4 \, dx$$

$$= \frac{\rho \pi \tan^2 \alpha}{4} (\tan^2 \alpha + 4) . \frac{h^5}{5}$$

$$= \frac{3M}{\pi h^3 \tan^2 \alpha} . \frac{\pi \tan^2 \alpha}{4} (\tan^2\alpha + 4) \frac{h^5}{5}$$

$$= \frac{3}{20} Mh^2 (\tan^2 \alpha + 4)$$

$$\therefore \quad k^2 = \frac{3}{20} h^2 (\tan^2 \alpha + 4)$$

O-விலிருந்து புவியீர்ப்பு மையத்தின் தூரம் $= \dfrac{3h}{4} = h_1$ என்க.

∴ தனிச் சம ஊசலியின் நீளம் $= \dfrac{k^2}{h_1}$

$$= \frac{\frac{3}{20} h^2 (\tan^2 \alpha + 4)}{\frac{3h}{4}}$$

$$= \frac{h}{5} (\tan^2 \alpha + 4)$$

மாதிரி 203. a, b எனும் அரையச்சுகள் கொண்ட ஒரு நீள்வட்டமும், l ஆரையுள்ள ஒரு வட்டமும் ஒரே சீரான தகட்டிலிருந்து வெட்டியெடுக்கப்பட்டு, அவற்றின் மையங்கள் ஒன்றாகப் பொருந்துமாறு ஒன்றின்மேல் ஒன்றாக இணைத்துப்

பொருத்தப்படுகின்றன. இத் தொகுதியானது பேரச்சின் ஒரு முனையைச் சுற்றி அதன் நிலைத்தளத்தில் நகருமாறு அமைக்கப் படுகிறது. தனிச் சம ஊசலியின் நீளம்

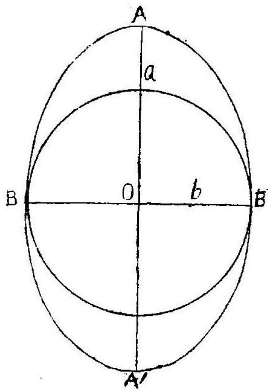
$$\frac{5a^2 - ab + 2b^2}{4a}$$

என்று காட்டு.

தீர்வு : ஒரு சதுர அலகுத் தகட்டின் பொருண்மை ρ என்க.

$\therefore$ வட்டத்தின் பொருண்மை $= \rho .\ \pi b^2 = M_1$ என்க.

நீள் வட்டத்தின் பொருண்மை $= \rho\ \pi\ ab = M_2$ என்க.



படம் 157

வட்டத்தின் மைய வழிச் செங்குத்தச்சைப் பற்றி

வட்டத்தின் நி. தி. $= M_1 \frac{b^2}{2}$

$\therefore$ A வழி இணையச்சைப் பற்றி வட்டத்தின் நி. தி.

$$= M_1 \frac{b^2}{2} + M_1 .\ OA^2$$

$$= M_1 \frac{b^2}{2} + M_1\, a^2$$

$$= M_1 \left(\frac{b^2}{2} + a^2 \right)$$

நீள்வட்டத்தின் மையவழிச் செங்குத்தச்சைப் பற்றி நீள் வட்டத்தின் நி. தி.

$$= \frac{M_2}{4} (a^2 + b^2)$$

$\therefore$ A வழி இணையச்சைப் பற்றி நீள்வட்டத்தின் நி. தி.

$$= \frac{M_2}{4} (a^2 + b^2) + M_2 .\ OA^2$$

$$= \frac{M_2}{4} (a^2 + b^2) + M_2\, a^2$$

$$= M_2 \left(\frac{a^2 + b^2}{4} + a^2 \right)$$

∴ A வழி இணையச்சைப் பற்றித் தொகுதியின் நி. தி.

$$= M_1 \left(\frac{b^2}{2} + a^2 \right) + M_2 \left(\frac{a^2 + b^2}{4} + a^2 \right)$$

$$= \rho \pi b^2 \left(\frac{b^2}{2} + a^2 \right) + \rho \pi ab \left(\frac{a^2 + b^2}{4} + a^2 \right)$$

தொகுதியின் மொத்தப் பொருண்மை M என்றும், A வழி அச்சைப் பற்றிய சுழிபாதை K என்றும் கொள்க.

$$\therefore \; M = M_1 + M_2 = \rho \pi (b^2 + ab).$$

இப்பொழுது,

$$MK^2 = \rho \pi b^2 \left(\frac{b^2}{2} + a^2 \right) + \rho \pi ab \left(\frac{a^2 + b^2}{4} + a^2 \right)$$

அதாவது,

$$\rho \pi b (b + a) . K^2 = \rho \pi b^2 \left(\frac{b^2}{2} + a^2 \right) + \rho \pi ab \left(\frac{a^2 + b^2}{4} + a^2 \right)$$

$$\therefore \; (b + a) K^2 = \frac{b (b^2 + 2a^2)}{2} + \frac{a(5a^2 + b^2)}{4}$$

$$= \frac{2b^3 + 4a^2b + 5a^3 + ab^2}{4}$$

$$= \frac{2b^3 + 2a^3 + 3a^3 + 3a^2b + a^2b + ab^2}{4}$$

$$= \frac{2 (b^3 + a^3) + 3a^2 (a + b) + ab (a + b)}{4}$$

$$= \frac{(b + a) [2 (b^2 - ab + a^2) + 3a^2 + ab]}{4}$$

$$\therefore K^2 = \frac{2b^2 - 2ab + 2a^2 + 3a^2 + ab}{4}$$

$$= \frac{(5a^2 - ab + 2b^2)}{4}$$

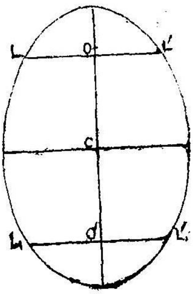
h = சுழலச்சிலிருந்து தொகுதியின் புவியீர்ப்பு மையத்தின் தூரம் $= OA = a$.

$\therefore$ தனிச்சம ஊசலியின் நீளம் $= \dfrac{K^2}{h}$

$$= \frac{(5a^2 - ab + 2b^2)}{4a}$$

மாதிரி 204. ஒரு நீள்வட்டத் தகடு அதன் ஒரு செவ்வகலத்தைக் கிடையச்சாகக் கொண்டு ஊசலாடும்போது அதன் மற்றச் செவ்வகலம் அலைவு மையம் வழியே செல்லுமாறு அமைந்துள்ளது. அதன் மையவகற்சி $\frac{1}{2}$ என்று நிறுவுக.

(ஐ. ஏ. எஸ். 1951)



படம் 158

தீர்வு : LL^1 எனும் செவ்வலகத்தைக் கிடையச்சாகக் கொண்டு நீள்வட்டத் தகடு ஊசலாடுகிறது. O என்பது தொங்குமையம் என்றும் O' என்பது அலைவு மையம் என்றும் கொள்க. எனவே அதன் இன்னொரு செவ்வகலம் $L_1 L_1'$-ஆனது O' வழியே செல்லும்.

நீள்வட்டத்தின் அச்சுகள் $2a$, ab என்றும், மையவகற்சி e என்றும் கொள்க. தொங்குமையம் O-விலிருந்து புவியீர்ப்பு மையம் C-ன் தூரம் $h = OC = ae$.

$$OO' = \frac{k^2}{h} = \frac{k^2}{ae}$$

ஆனால் $OO' = 2\,OC = 2ae$

$$\therefore \quad \frac{k^2}{ae} = 2\,ae \qquad \ldots \quad (1)$$

C வழியே LL'க்கு இணையான அச்சைப் பற்றிய நி. தி.

$$= \frac{Ma^2}{4}$$

$$\therefore \quad LL' \text{ஐப் பற்றிய நி. தி.} = \frac{Ma^2}{4} + M.\,OC^2$$

அதாவது, $Mk^2 = \frac{Ma^2}{4} + Ma^2 e^2$

$$= Ma^2 (\tfrac{1}{4} + e^2)$$

$$\therefore \quad k^2 = a^2 (\tfrac{1}{4} + e^2) \qquad \ldots \qquad (2)$$

(1), (2) ஆகிய சமன்பாடுகளிலிருந்து,

$$\frac{a^2(\frac{1}{4} + e^2)}{ae} = 2ae$$

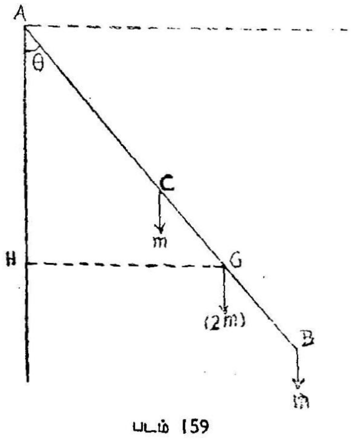
$$a^2 (\tfrac{1}{4} + e^2) = 2a^2e^2$$

$$2e^2 = \tfrac{1}{4} + e^2$$

$$e^2 = \tfrac{1}{4}$$

$$e = \tfrac{1}{2}.$$

மாதிரி 205. $2a$ நீளமுள்ள எடையற்ற ABC என்னும் நேரான கோலொன்று அதன் நிலையான முனை A-யைச் சுற்றி நகரக் கூடியதாயிருக்கின்றது. அதன் மறுமுனை B-யிலும், நடுப்புள்ளி C-யிலும் சம பொருண்மைகள் கட்டப்பட்டுள்ளன. கோலானது கிடைநிலையில் வைக்கப்பட்டு விடப்படுகிறது. அது நிலைக்குத்தாக இருக்கும்போது அதன் சுழல்வேகம் $\sqrt{\left(\frac{6g}{5a}\right)}$ என்றும், தனிச்சம ஊசலியின் நீளம் $\frac{5a}{3}$ என்றும் காட்டுக.



படம் 159

தீர்வு: சுழலச்சைப் பற்றிய சுழியாரை k என்க. சுழலச்சைப் பற்றி C-யிலுள்ள m-ன் நி. தி. $= m.a^2$

சுழலச்சைப் பற்றி B-யிலுள்ள m-ன் நி. தி. $= m\,(2a)^2 = 4\,ma^2$

மொத்தத் தொகுதியின் நி. தி. $= ma^2 + 4\,ma^2 = 5\,ma^2$

$$\therefore \quad (2m)\,k^2 = 5ma^2$$

அல்லது, $k^2 = \frac{5}{2}\,a^2$.

தொகுதியின் புவியீர்ப்புமையம் BC-ன் நடுப்புள்ளியிலிருக்கும்.

∴ சுழலச்சிலிருந்து புவியீர்ப்பு மையத்தின் தூரம்

$$= AG = a + \frac{a}{2} = \frac{3a}{2} = h \text{ என்க.}$$

தனிச்சம ஊசலியின் நீளம் $= \frac{k^2}{h} \frac{\frac{5}{2}a^2}{\frac{3}{2}a} = \frac{5}{3}a.$

t நேரத்தில் நிலைக்குத்துடன் கோலின் சாய்வு θ என்க.

t நேரத்தில் $(2m)$ பொருண்மையினால் செய்யப்பட்ட வேலை

$$= (2mg).\, AH$$
$$= 2mg \times AG \cos\theta$$
$$= 2\, mg \times \tfrac{3}{2}\, a\cos\theta$$
$$= 3\, mg\, a\cos\theta$$

ஆற்றல் சமன்பாடு அமைக்கவும்.

இயக்க ஆற்றல் = செய்யப்பட்ட வேலை.

$$\tfrac{1}{2}(2m)\, k^2 \dot{\theta}^2 = 3\, mg\, a\cos\theta$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{g}{k^2}\, a\cos\theta$$

$$= \frac{3\, ga\cos\theta}{\frac{5}{2}a^2}$$

$$= \frac{6g}{5a}\cos\theta$$

கோல் நிலைக்குத்தாகயிருக்கும்போது $\theta = 0$.

$$\therefore\quad \dot{\theta}^2 = \frac{6g}{5a}$$

அதாவது, நிலைக்குத்து நிலையில் கோலின் சுழல்வேகம்

$$= \dot{\theta} = \sqrt{\frac{6g}{5a}}$$

மாதிரி **206.** ஒரு சீரான மெல்லிய கோலின் ஒரு முனை ஒரு வழவழப்பான பிணையலுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. அது கிடை நிலையில் வைக்கப்பட்டு விடப்படுகிறது. கோலானது நிலைக்குத்துடன் $45°$ சாய்விலிருக்கும்போது பிணையலில் கிடைவச அழுத்தம் மீப்பெரிதாகயிருக்குமென்றும், அப்போது நிலைக்குத்து அழுத்தம் கோலின் எடையைப்போல் $\frac{11}{8}$ மடங்கு இருக்குமென்றும் காட்டுக.

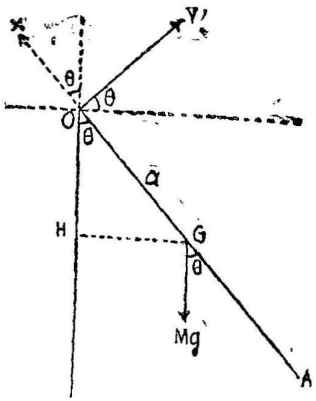
தீர்வு : OA என்னும் கோல் O-வில் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. கோலின் நீளம் $2a$ என்றும் பொருண்மை M என்றும் கொள்க. t நேரத்தில் நிலைக்குத்துடன் கோலின் சாய்வு θ என்று கொள்க. கோலின் புவியீர்ப்பு மையம் G ஆனது அதன் நடுப்புள்ளியாகும். கோல் கீழே விழும்போது G ஆனது O-ஐ மையமாகக் கொண்டு a ஆரையுள்ள வட்டப் பாதையில் நகரும்.

கோலின்மீது செயல்படுகின்ற விசைகளாவன :

(i) அதன் எடை Mg ;

(ii) O வில் கோலின் அழுத்தம்.

O வில் கோலின் அழுத்தத்தை GO வழியே X என்னும் கூறாகவும், GO க்குச் செங்குத்து வழியே Y என்னும் கூறாகவும் பிரிக்கவும்.



படம் 160

O வழியே செல்லும் சுழலச்சைப் பற்றி கோலின் நி. தி.

$$= \frac{Ma^2}{3} + M \cdot OG^2$$

$$= M\frac{a^2}{3} + Ma^2$$

$$= \tfrac{4}{3} Ma^2$$

k என்பது சுழியாரை யெனில்,

$$k^2 = \tfrac{4}{3} a^2.$$

சுழலச்சைப் பற்றி Mg யின் திருப்புத்திறன்

$$= -Mg \cdot GH$$

$$= -Mg\, a \sin\theta.$$

∴ திருப்புத்திறன் சமன்பாடு வருமாறு :

$$Mk^2\ddot{\theta} = -Mg\, a \sin\theta$$

அல்லது $$\ddot{\theta} = -\frac{ga\sin\theta}{k^2}$$

$$= -\frac{ga\sin\theta}{\frac{4}{3}a^2}$$

அதாவது, $$\ddot{\theta} = -\frac{3g\sin\theta}{4a} \quad \ldots (1)$$

$2\dot{\theta}$ ஆல் பெருக்கித் தொகையீடு செய்யவும்.

$$\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{2a}\cos\theta \qquad \ldots \quad (2)$$

G ஆனது a ஆரையுள்ள வட்டப்பாதையில் நகருவதால், GO வழியேயும் GOக்குச் செங்குத்துத் திசையிலும் செயல்படும் விசைகள் முறையே $Ma\,\dot{\theta}^2$, $Ma\,\ddot{\theta}$ ஆகும்.

$$\therefore \quad Ma\,\dot{\theta}^2 = X - Mg\cos\theta \qquad \ldots \quad (3)$$

$$Ma\,\ddot{\theta} = Y - Mg\sin\theta \qquad \ldots \quad (4)$$

(2), (3) ஆகிய சமன்பாடுகளிலிருந்து,

$$Ma.\,\frac{3g}{2a}\cos\theta = X - Mg\cos\theta$$

அல்லது, $X = Mg\cos\theta + \frac{3}{2}Mg\cos\theta = \frac{5}{2}Mg\cos\theta.$

(1), (4) ஆகிய சமன்பாடுகளிலிருந்து,

$$Ma\left(\frac{-3g}{4a}\sin\theta\right) = Y - Mg\sin\theta$$

அல்லது, $Y = Mg\sin\theta - \frac{3}{4}Mg\sin\theta = \frac{1}{4}Mg\sin\theta.$

கிடைவச அழுத்தம் $= X\sin\theta - \cos\theta$

$$= \frac{5}{2}Mg\sin\theta\cos\theta - \frac{1}{4}Mg\sin\theta\cos\theta$$

$$= \frac{9}{4}Mg\sin\theta\cos\theta$$

$$= \frac{9}{8}Mg\sin 2\theta.$$

கிடைவச அழுத்தம் மீப்பெரிதாயிருக்க வேண்டுமாயின் $\sin 2\theta$ மீப்பெரிதாயிருக்க வேண்டும். அதாவது, $\theta = 45°$.

அதாவது, நிலைக்குத்துடன் கோல் $45°$ சாய்விலிருக்கும் போது கிடைத்திசை அழுத்தம் மீப்பெரிதாயிருக்கும்.

நிலைக்குத்து அழுத்தம் $= X\cos\theta + Y\sin\theta$

$$= \frac{5}{2}Mg\cos^2\theta + \frac{1}{4}Mg\sin^2\theta$$

கிடைத்திசை அழுத்தம் மீப் பெரிதாயிருக்கும்போது நிலைக் குத்து அழுத்தம்

$$= \frac{5}{2}Mg\cos^2 45° + \frac{1}{4}Mg\sin^2 45°$$

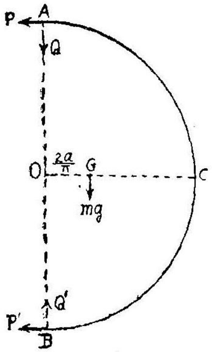
$$= \frac{5}{2}Mg\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot + \frac{1}{4}Mg\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{5}{4}Mg + \frac{1}{8}Mg$$

$= \frac{11}{8} Mg$

$= \frac{11}{8} X$ கோலின் எடை.

மாதிரி 207. m பொருண்மையும் a ஆரையுமுள்ள ஒரு சீரான அரைவட்ட வில்லானது அதன் இரு முனைகளும் ஒரே நிலைக்குத்துக் கோட்டிலுள்ள இரு புள்ளிகளுடன் பொருத்தப் பட்ட நிலையில் ω எனும் மாறுச்சுழல் வேகத்துடன் சுழல்கிறது. மேல்முனையின் மீதுள்ள கிடைத்திசை அழுத்தம் $m\left(\frac{g+\omega^2 a}{\pi}\right)$ என்று காட்டுக.



படம் 161

தீர்வு : ACB என்னும் அரைவட்ட வில்லின் முனைகள் A-யும் B-யும் ஒரு நிலைக்குத்துக் கோட்டிலுள்ள புள்ளிகளில் பொருத்தப்பட்டுள்ளன. A-யில் கிடைத் திசை அழுத்தம் P என்றும், B-யில் கிடைத்திசை அழுத்த P' என்றும் கொள்க.

அரைவட்ட வில்லின் புவியீர்ப்பு மையம் G ஆனது OC-யில் O விலிருந்து $\frac{2a}{\pi}$ தூரத்திலிருக்கும் (நிலையியல் பகுதியைப் பார்க்கவும்). எனவே, G ஆனது O ஐ மையமாகக் கொண்டு $\frac{2a}{\pi}$ ஆரையுள்ள வட்டப்பாதையில் நகரும். அது ω எனும் மாறுச்சுழல் வேகத்துடன் நகருவதால் GO வழியே செயல்படும். $m. \frac{2a}{\pi} . \omega^2$ மட்டுமே பயன்படு விசையாகும்.

B-யைப் பற்றித் திருப்புத்திறன் காண்க.

$$m. \frac{2a}{\pi} \omega. \; OB = P, AB - mg. \frac{2a}{\pi}$$

$$m. \frac{2a}{\pi} \omega^2 . a = P, 2a - mg. \frac{2a}{\pi}$$

$$\therefore \; P = \frac{m}{\pi} a\omega^2 + \frac{mg}{\pi}$$

$$= \frac{m(a\omega^2 + g)}{\pi} .$$

கணத்தாக்கு விசைகளின்கீழ் நிலையான அச்சைச் சுற்றி இயக்கம் (Motion about fixed axis under impulsive forces)

ஒரு நிலையான அச்சைப் பற்றிச் சுழலக்கூடிய ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின்மீது ஒரு கணத்தாக்கு விசை செயல்படுமானால் சுழலச்சைப்பற்றி அப் பொருளின் சுழலுந்த மாறுபாடு அச் சுழலச்சைப் பற்றி அக் கணத்தாக்கு விசையின் திருப்புத் திறனுக்குச் சமமாகும்.

ω, ω' என்பன கணத்தாக்கு விசை செயல்படு முன்னரும் செயல்பட்ட பின்னரும் சுழலச்சைப் பற்றிய சுழல்வேகங்களெனில்,

$$\text{சுழலுந்த மாறுபாடு} = Mk^2(\omega' - \omega)$$

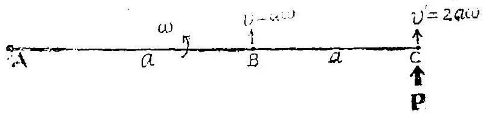
ஆகும். L என்பது சுழலச்சைப் பற்றி கணத்தாக்கு விசைகளின் திருப்புத் திறனெனில், திருப்புத்திறன் சமன்பாடு

$$Mk^2(\omega' - \omega) = L \text{ ஆகும்.}$$

மாதிரி 208. ABC என்னும் ஓர் இலேசான கோலின் இரு முனைகளிலும், நடுப்புள்ளி B-யிலும் மூன்று சம பொருண்மைகள் இணைக்கப்பட்டு ஒரு வழவழப்பான மேசையின்மேல் ஓய்வில் வைக்கப்பட்டுள்ளன. C-ல் மேசைக்குச் செங்குத்தாக ஓர் அடி விழுகிறது. A-யானது நிலையாக வைக்கப்பட்டிருந்தால் இத் தொகுதிக்குச் செலுத்தப்படுகின்ற ஆற்றலும் கோலானது தாராளமாக நகர்வதற்கு விடப்பட்டிருந்தால் செலுத்தப்படுகின்ற ஆற்றலும் 24 : 25 என்னும் விகிதத்திலிருக்குமென்று காட்டுக.

தீர்வு : C-ல் செயல்படும் கணத்தாக்களவை P என்க.

(i) முனை A நிலையாக வைக்கப்பட்டுள்ளது.



படம் 162

A-யானது நிலையாக வைக்கப்பட்டுள்ளதால், கோலானது A-யைச் சுற்றித் திரும்பும். கோலின் சுழல்வேகம் ω என்க.

கோலுக்குச் செங்குத்துத் திசையில் B-ன் வேகம் என்றும், C-ன் வேகம் v' என்றும் கொள்க.

B-யானது *a* ஆரையுள்ள வட்டத்தில் திரும்புமாகையால்,
$v = a\omega$.

C-யானது $2a$ ஆரையுள்ள வட்டத்தில் திரும்புமாகையால்,
$v' = 2a\omega$.

C தாக்கப்படும் முன்னர்க் கோல் ஓய்விலிருப்பதால் தாக்குதலுக்குமுன் சுழலுந்தம் பூச்சியமாகும்.

தாக்குதலுக்குப்பின் மொத்தச் சுழலுந்தம் = *A*-யைப்பற்றி *A*, *B*, *C* ஆகியவற்றின் சுழலுந்தங்களின் மொத்தம்

$$= O + ma\omega . a + m (2\, a\omega) . 2a$$
$$= 5\, ma^2\omega .$$

ஆகவே சுழலுந்த மாறுபாடு $= 5\, ma^2\, \omega$.

கணத்தாக்கு விசையின் *A*-ஐப் பற்றிய திருப்புத்திறன் $= P . 2a$.

ஆகவே, திருப்புத்திறன் சமன்பாட்டிலிருந்து,

$$5\, ma^2\, \omega = P . 2a$$

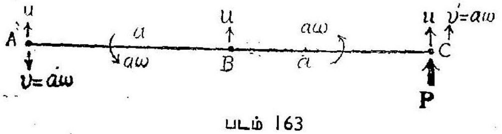
அல்லது, $a\omega = \dfrac{2\,P}{5\,m}$

தொகுதிக்கு அளிக்கப்பட்டுள்ள இயக்க ஆற்றல்

$$= \tfrac{1}{2} mv^2 + \tfrac{1}{2} mv'^2$$
$$= \tfrac{1}{2} m\, (a\omega)^2 + \tfrac{1}{2} m . (2a\omega)^2$$
$$= \tfrac{1}{2} ma^2\omega^2 + \tfrac{1}{2} m . 4a^2\omega^2$$
$$= \tfrac{5}{2} m . a^2\omega^2$$
$$= \tfrac{5}{2} m . \left(\frac{2\,P}{5m}\right)^2$$
$$= \frac{2\,P^2}{5\,m} \qquad \ldots \qquad (1)$$

(ii) **கோலானது தாராளமாக நகரக்கூடியதாயுள்ளது**

C தாக்கப்பட்டதும் *B* ஆனது கோலுக்குச் செங்குத்துத் திசையில் *u* திசைவேகத்துடன் நகர்வதாகக் கொள்க. *BC*



படம் 163

பகுதியானது *B*-யைச் சுற்றி ω எனும் சுழல்வேகத்துடனும், *AB* பகுதியானது *B*-யைச் சுற்றி அதே சுழல்வேகத்துடன் எதிர்த்

திசையிலும் சுழலத் தொடங்கும். அதேசமயம் C-யும், A-யும் B-யின் திசையில் u திசைவேகத்துடன் நகரும்.

ஆகவே, B நகரும் திசையில் C-ன்வேகம் $= u + a\omega$.

A-யின் வேகம் $= u - a\omega$.

B-யைப்பற்றி திருப்புத்திறன் சமன்பாடு காண்க :

$$m(u + a\omega) \cdot a - m.(u - a\omega). a = P. a$$

அதாவது, $2ma^2\omega = Pa$

அல்லது, $$a\omega = \frac{P}{2m}$$

உந்தச் சமன்பாடு வருமாறு :

$$3mu = P.$$

அல்லது, $$u = \frac{P}{3m}$$

ஆகவே, $$u + a\omega = \frac{P}{3m} + \frac{P}{2m} = \frac{5P}{6m},$$

$$u + a\omega = \frac{P}{3m} - \frac{P}{2m} = -\frac{P}{6m}$$

மூன்று பொருண்மைகளும் பெறுகின்ற மொத்த இயக்க ஆற்றல்

$$= \tfrac{1}{2} m(u - a\omega)^2 + \tfrac{1}{2} mu^2 + \tfrac{1}{2} m(u + a\omega)^2$$

$$= \tfrac{1}{2} m\left(-\frac{P}{6m}\right)^2 + \tfrac{1}{2} m\left(\frac{P}{3m}\right)^2 + \tfrac{1}{2} m\left(\frac{5P}{6m}\right)^2$$

$$= \tfrac{1}{2} m. \frac{P^2}{36m^2} + \tfrac{1}{2} m. \frac{P^2}{9m^2} + \tfrac{1}{2} m. \frac{25P^2}{36m^2}$$

$$= \frac{P^2}{72m} + \frac{P^2}{18m} + \frac{25P^2}{72m}$$

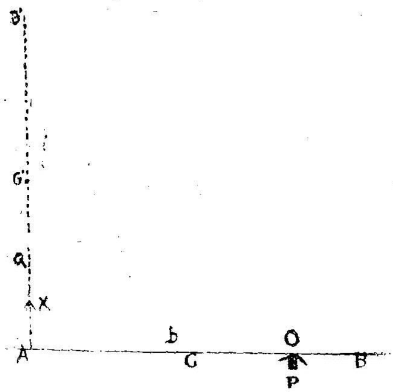
$$= \frac{30P^2}{72m}$$

$$= \frac{5P^2}{12m} \qquad (2)$$

$$\frac{\text{இயக்க ஆற்றல் (1)}}{\text{இயக்க ஆற்றல் (2)}} = \frac{2\,P^2/5\,m}{5P^2/12\,m} = \frac{24}{25}$$

மாதிரி 209. m பொருண்மையும் $2a$ நீளமுமுடைய ஒரு கோல் அதன் ஒரு முனை A யைச் சுற்றித் தாராளமாகச் சுழலக் கூடியதாய் அமைந்துள்ளது. அது நிலைக்குத்து நிலையிலிருந்து விழுகிறது. கிடைமட்ட நிலையை அடைந்ததும் முனை A-யிலிருந்து b தூரத்தில் ஒரு நிலையான மீளியல்பற்றத் தடுப்பின் மேல் மோதுகிறது. மோதலின் தாக்களவை $m\,\frac{2a}{b}\sqrt{\left(\frac{2ga}{3}\right)}$ என்றும் A-யில் தாக்களவையின் அழுத்தம் $m\sqrt{\left(\frac{3ga}{2}\right)}\left[1 - \frac{4a}{3b}\right]$ என்றும் காட்டுக.

தீர்வு: கோலானது கிடைநிலையில் O-விலுள்ள தடுப்பில் மோதுகிறது. மோதலின் காரணமாக ஏற்பட்டுள்ள கணத்தாக்கு விசை P என்க. $AO = b$.



படம் 164

மோதலுக்குச் சற்றுமுன்னர் கோலின் சுழல்வேகம் ω என்க. கோலின் புவியீர்ப்பு மையம் சென்றுள்ள நிலைக்குத்துத் தூரம் $G'A = a$ ஆகையால், செய்யப்பட்ட வேலை mga ஆகும்.

கோல் பெற்றுள்ள இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2}\,mk^2\,\omega^2$

ஆனால் $mk^2 = A$-யைப் பற்றி கோலின் நி.தி. $= m.\,\frac{4a^2}{3.}$

∴ ஆற்றல் சமன்பாடு வருமாறு :

$\frac{1}{2} mk^2 \omega^2 =$ செய்யப்பட்ட வேலை

$$\frac{1}{2} m . \frac{4a^2}{3} \omega^2 = mga$$

அல்லது, $\omega^2 = \frac{3g}{2a}$

அல்லது $\omega = \sqrt{\frac{3g}{2a}}$ ... (1)

A-ல் கணத்தாக்கு அழுத்தம் X என்க.

தடுப்பின்மீது மோதியபின் கோல் ஓய்விற்கு வருவதால், சுழலுந்த மாறுபாடு = A-யைப்பற்றி கணத்தாக்கு விசையின் திருப்புத்திறன்,

என்னும் சுழலுந்தச் சமன்பாட்டிலிருந்து,

$$mk^2 (\omega^1 - \omega) = L$$

$m \frac{4a^2}{3} (O - \omega) = - Pb$ ($\because P$ ஆனது சுழற்சிக்கு எதிர்த் திசையிலுள்ளது)

அல்லது $\frac{4}{3} ma^2 \omega = Pb$ ... (2)

மேலும், மோதலினால் கோலில் ஏற்பட்டுள்ள உந்த மாறுபாடு $= m (O - a\omega) = - ma\omega$

ஆகையால், $- ma\omega = - P - X$

அல்லது, $ma\omega = P + X$ ... (3)

(1), (2) ஆகிய சமன்பாடுகளிலிருந்து,

$$\frac{4}{3} ma^2 . \sqrt{\frac{3g}{2a}} = Pb.$$

அல்லது, $P = \frac{4}{3} . \frac{ma^2}{b} \sqrt{\frac{3g}{2a}}$

$$= m. \frac{2a}{b} \sqrt{\frac{4a^2}{9} . \frac{3g}{2a}}$$

$$= m. \frac{2a}{b} \sqrt{\frac{2ga}{3}}.$$

சமன்பாடு (3)-லிருந்து,

$$K = ma\omega - P$$

$$= ma\sqrt{\frac{3g}{2a}} - m.\frac{2a}{b}\sqrt{\frac{2ga}{3}}$$

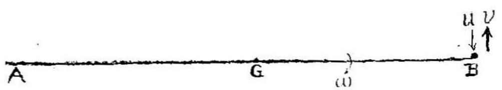
$$= m\sqrt{\frac{3ga^2}{2a}} - m\,\frac{4a}{3b}\sqrt{\frac{9}{4}.\frac{2ga}{3}}$$

$$= m\sqrt{\frac{3ga}{2}} - m.\,\frac{4a}{3b}\sqrt{\frac{3ga}{2}}$$

$$= m\sqrt{\frac{3ga}{2}}\left[1 - \frac{4a}{b}\right].$$

மாதிரி 210. m பொருண்மையும் $2l$ நீளமுமுள்ள ஒரு சீரான கோல் கிடைநிலையிலுள்ளது. அது நிலையான அதன் மையத்தைச் சுற்றித் தாராளமாகத் திரும்பக்கூடும். u வேகத்துடன் கோலுக்கு நிலைக்குத்தாக நகர்ந்து கொண்டிருக்கும் m' பொருண்மையுள்ள ஒரு பந்து கோலின் ஒரு முனையில் மோதுகிறது. மீளியல்புக் குணகம் e எனில், மோதலுக்குப் பின் கோலின் சுழல்வேகம் $\frac{3m'(1+e)u}{(m+3m')l}$ என்றும், பந்தின் நிலைக்குத்து வேகம் $\frac{u(em-3m')}{m+3m'}$ என்றும் காட்டுக.

தீர்வு: AB என்ற கோல் அதன் புவியீர்ப்பு மையம் G யைப் பற்றித் திரும்பக்கூடிய நிலையில் கிடைநிலையிலுள்ளது.



படம் 165

B-ல் பந்து நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கி மோதுகிறது. மோதலுக்குப்பின் கோலின் G-யைப் பற்றிய சுழல்வேகம் ω என்றும், பந்தின் மேல் நோக்கிய துள்ளல் வேகம் v என்றும் கொள்க.

v ஆனது u, w ஆகியவற்றின் திசைகளுக்கு எதிராகயிருக்கும்.

G-யைப் பற்றிய சுழலுந்த மாறுபாடு $= mk^2(\omega^1 - \omega)$, (சூத்திரம்)

$$= m.\ \frac{l^2}{8}(\omega - O)$$

$$= \frac{m}{8}\ l^2\ \omega.$$

ஆனால் உந்தத் திருப்ப மாறுபாடு $= m'u.\ l - m'\ (-v).\ l$
$= m(u + v)\ l.$

∴ இயக்கச் சமன்பாடு வருமாறு :

$$\frac{m}{3}\ l^2\ \omega = m'\ (u + v)\ l.$$

அல்லது $\frac{m}{8}\ l\omega = m'\ (u + v)$ ... (1)

நியூட்டனின் பரிசோதனை விதிப்படி,

மோதலுக்குப்பின் சார்வேகம் $= -e$ (மோதலுக்கு முன் சார்வேகம்)

மோதலுக்குப்பின் கோலுக்குச் செங்குத்தாக மேல் நோக்கிப் பந்தின் வேகம் $= v$.

மோதலுக்குப்பின் கோலுக்குச் செங்குத்தாக முனை B-ன் கீழ்நோக்கிய வேகம் $= l\omega$.

∴ மோதலுக்குப்பின் மேல்நோக்கிய சார்வேகம்

$$= v - (-l\omega) = v + l\omega.$$

மோதலுக்கு முன் கோலுக்குச் செங்குத்தாகப் பந்தின் மேல் நோக்கிய வேகம் $= -u$.

மோதலுக்குமுன் முனை B-ன் வேகம் $= O$.

∴ மோதலுக்குமுன் சார்வேகம் $= -u - O = -u$.

∴ $v + l\omega = -e\,(-u) = eu$ ... (2)

∴ $mv + ml\omega = emu$

(1)-லிருந்து $ml\omega = 3m'\ (u + v)$ ஆகையால்,

$$mv + 3m'\ (u + v) = emu$$

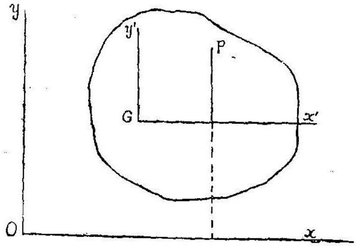
$$mv + 3m'v = emu - 3m'u$$

$$v(m + 3m') = u(em - 3m')$$

$$\therefore \quad v = \frac{u(em - 3m')}{m + 3m'}.$$

ஒரு தளத்தில் இயங்கும் பொருள்களின் இயக்க ஆற்றல் (K. E. of Bodies moving in Two Dimensions)

v திசைவேகத்துடன் நகர்ந்துகொண்டிருக்கும் M பொருண்மையுள்ள ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளைக் கருதுக. G என்பது அப்பொருளின் புவியீர்ப்பு மையம். G வழியே செல்லும் நிலைத்தளத்தில் Ox, Oy எனும் ஏதேனுமிரு செங்குத்து அச்சுகளை எடுத்துக்கொள்க. இவ் வச்சுகளைக் குறித்து (x, y) என்னும் அச்சுத் தூரங்களுள்ள புள்ளியிலுள்ள m பொருண்மையுள்ள P எனும் துகளினைக் கருதுக. இவ் வச்சுகளைக் குறித்து G-யின் அச்சுத் தூரங்கள் $(\bar{x}, \bar{y})$ என்க.



படம் 166

G வழியே Ox, Oy ஆகிய அச்சுகளுக்கு இணையாக Gx', Gy' எனும் செங்குத்து அச்சுகளைக் குறித்துக் கொள்க. இவ் வச்சுகளைக் குறித்து P-ன் அச்சுத் தூரங்கள் (x', y') எனில்,

$$x = \bar{x} + x' \; ; \quad y = \bar{y} + y'$$

ஆகும்.

$$\therefore \quad \frac{dx}{dt} = \frac{d\bar{x}}{dt} + \frac{dx'}{dt} \; ; \; \frac{dy}{dt} = \frac{d\bar{y}}{dt} + \frac{dy'}{dt}$$

பொருளின் இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2} \Sigma mv^2$

$$= \frac{1}{2} \Sigma m. \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{2} \Sigma m \left[\left(\frac{d\bar{x}}{dt} + \frac{dx'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\bar{y}}{dt} + \frac{dy'}{dt}\right)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{2} \Sigma m \left[\left(\frac{d\bar{x}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\bar{y}}{dt}\right)^2 \right]$$

$$+ \frac{1}{2} \Sigma m \left[\left(\frac{dx^1}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy'}{dt} \right)^2 \right]$$

$$+ \frac{1}{2} \Sigma m \left[2 \frac{d\bar{x}}{dt} \cdot \frac{dx'}{dt} + 2 \frac{d\bar{y}}{dt} \cdot \frac{dy'}{dt} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \Sigma m \left[\left(\frac{d\bar{x}}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\bar{y}}{dt} \right)^2 \right]$$

$$+ \frac{1}{2} \Sigma m \left[\left(\frac{dx'}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy'}{dt} \right)^2 \right]$$

$$+ \frac{d\bar{x}}{dt} \cdot \Sigma m \cdot \frac{dx'}{dt} + \frac{d\bar{y}}{dt} \cdot \Sigma m \cdot \frac{dy'}{dt}$$

ஆனால், Gx', Gy' அச்சுகளைக் குறித்து $G = (O, O)$ ஆதலின்

$$\frac{\Sigma\, mx^1}{\Sigma m} = 0, \quad \frac{\Sigma\, my^1}{\Sigma\, m} = 0 \text{ ஆகும்.}$$

அதாவது, $\Sigma mx' = 0$; $\Sigma\, my' = 0$

$\therefore$ இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2} \Sigma m \left[\left(\frac{d\bar{x}}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\bar{y}}{dt} \right)^2 \right]$

$$+ \frac{1}{2} \Sigma m \left[\left(\frac{dx'}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy'}{dt} \right)^2 \right]$$

இப்பொழுது, $\frac{1}{2} \Sigma m \left[\left(\frac{d\bar{x}}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\bar{y}}{dt} \right)^2 \right]$

$$= \frac{1}{2} M \left[\left(\frac{d\bar{x}}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\bar{y}}{dt} \right)^2 \right]$$

G-ல் வைக்கப்படும் M பொருண்மையின் இயக்க ஆற்றல்

$$= \frac{1}{2} Mv^2.$$

$$\frac{1}{2} \Sigma m \left[\left(\frac{dx'}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy'}{dt} \right)^2 \right]$$

$= G$-யைப் பொறுத்து பொருளின் இயக்க ஆற்றல்

அதாவது $\left[\left(\frac{dx'}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy^1}{dt} \right)^2 \right]$

= G-யை நிலையான ஆதியாகக் கொண்டு அதைக் குறித்து P-ன் வேகத்தின் வர்க்கம்

$= (r\omega)^2, r = PG, \omega =$ G-யைப் பற்றி P-ன் சுழல் வேகம்

$= r^2 \omega^2$

$$\therefore \tfrac{1}{2} \Sigma m \left[\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{dt}\right)^2 \right] = \tfrac{1}{2} \Sigma m\, r^2 \omega^2$$

$$= \tfrac{1}{2} \omega^2 \cdot \Sigma m r^2$$

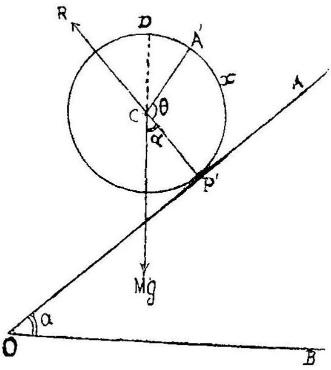
$$= \tfrac{1}{2} \omega^2 \cdot Mk^2.$$

$$= \tfrac{1}{2} Mk^2 \omega^2.$$

$\therefore$ இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} Mk^2 \omega^2$

அதாவது, பொருளின் இயக்க ஆற்றல் = இடப்பெயர்ச்சியினுல் ஏற்படும் இயக்க ஆற்றல் + சுழற்சியினுலேற்படும் இயக்க ஆற்றல்.

சாய்தளத்தில் உருளும் கோளத்தின் இயக்கம்



படம் 167

கிடைத்தளத்துடன் α சாய்விலுள்ள ஒரு சாய் தளத்தில் கீழ்முகமாக ஒரு கோளம் உருளுகிறது. கோளம் வழுக்காமலிருக்குமளவிற்குச் சாய்தளம் உராய்வுடையதாயிருப்பின் இயக்கத்தை ஆராய்க.

a ஆரையும் M பொருண்மையுமுள்ள ஒரு கோளம் AO என்னும் சாய்தளத்தில் கீழ்முகமாக உருளுகிறது.

தொடக்கத்தில் கோளமானது சாய்தளத்துடன் A-ல் தொடுகையிலுள்ளதெனக் கொள்க. அது சாய்தளத்தில் x தூரம் உருண்டதும் θ கோணத்திற்குச் சுழன்றிருப்பதாகக் கொள்க.

$$\therefore x = a\theta.$$

$$\therefore v = \frac{dx}{dt} = a \cdot \frac{d\theta}{dt} = a\omega, \text{ அல்லது, } \omega = \frac{v}{a}.$$

கோளத்தின் இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} Mk^2 \cdot \omega^2$

$$= \frac{1}{2} Mv + \frac{1}{2} M. \frac{2a^2}{5} \cdot \frac{v^2}{a^2}$$

$$= \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{5} Mv^2$$

$$= \frac{7}{10} Mv^2$$

கோளத்தினுல் செய்யப்பட்ட வேலை $= Mg \times CD$

$$= Mg\, x \sin \alpha$$

ஆற்றல் சமன்பாட்டிலிருந்து,

இயக்க ஆற்றல் = செய்யப்படும் வேலை.

$$\frac{7}{10} Mv^2 = Mg\, x \sin \alpha$$

$$\therefore \quad v^2 = \frac{10}{7} g \sin \alpha \cdot x$$

கோளத்தின் முடுக்கம் f எனில், v^2 $u^2+2\, fs$ எனும் சூத்திரத்திலிருந்து,

$$\frac{10}{7} g \sin \alpha \cdot x = 0 + 2f \cdot x$$

அல்லது, $f = \frac{5}{7} g \sin \alpha$.

= மாறிலி.

அதாவது, கோளானது மாரு முடுக்கத்துடன் உருளும்.

ஆனல் $f = \dfrac{d^2x}{dt^2}$ ஆதலின்,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{5}{7} g \sin \alpha$$

தொகையிடு காணின், $\dfrac{dx}{dt} = (\frac{5}{7} g \sin \alpha) \cdot t +$ மாறிலி.

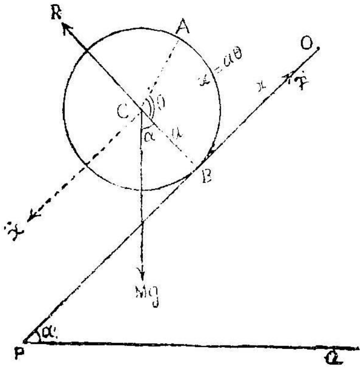
தொடக்கத்தில் $t = 0$, $\dfrac{dx}{dt} = 0$ ஆதலின் மாறிலி $= 0$.

ஆகவே, t நேரத்தில் உருளையின் வேகம்

$$v = \frac{dx}{dt} = (\tfrac{5}{7} g \sin \alpha)\, t.$$

மாதிரி 214. கிடைத்தளத்துடன் α கோணத்திலுள்ள ஒரு சாய்தளத்தில் கீழ்முகமாக ஓர் உருளை உருளுகிறது. அது உருளும்போது அதில் சுற்றப்பட்டு, சாய்தளத்தின் உச்சிப்

புள்ளியுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ள கயிறு பிரிக்கப்பட்டுக் கொண்டிருக்கிறது. கயிற்றின் இழுவிசையையும், உருளையின் முடுக்கத்தையும் காண்க.



படம் 168

தீர்வு: O என்பது சாய்தளத்தில் கயிறு கட்டப்பட்டுள்ள புள்ளி. உருளையின் ஆரை a என்க. x நீளக் கயிறு பிரிக்கப்பட்டபோது உருளை θ கோணத்தில் திரும்பியிருப்பதாகவும் கயிற்றின் இழுவிசை T என்றும் கொள்க.

$$\therefore \quad x = a\,\theta.$$

ஆகவே, $\dot{x} = a\dot{\theta}$;

$$\ddot{x} = a\ddot{\theta} \qquad \ldots (1)$$

x நீளக்கயிறு பிரிக்கப்படுவதற்கு ஆகியுள்ள நேரம் t எனில், சாய்தளத்தின் வழியே உருளையும் முடுக்கம் $\ddot{x}$ ஆகும் சாய்தளம் வழியாகவும், சாய்தளத்திற்குச் செங்குத்தாகவும் விசைப் பிரிப்பு செய்க.

$$M\ddot{x} = Mg \sin \alpha - T \qquad \ldots (2)$$

$$O = R - Mg \cos \alpha \qquad \ldots (3)$$

உருளையின் மையம் C-யைப்பற்றித் திருப்புத்திறன் காண்க.

$$\therefore k^2 \ddot{\theta} = T.\,a$$

ஆனால் $k^2 = \dfrac{a^2}{2}$ ஆகையால்,

$$M\frac{a^2}{2}\ddot{\theta} = T\,.\,a$$

அல்லது, $T = \frac{1}{2} Ma\ddot{\theta}$

$\therefore$ (1), (2) ஆகிய சமன்பாடுகளிலிருந்து,

$$Ma\ddot{\theta} = Mg \sin \alpha - \tfrac{1}{2} Ma\ddot{\theta}$$

அல்லது $\frac{3}{2} a\ddot{\theta} = g \sin \alpha$

$$\therefore \quad a\ddot{\theta} = \tfrac{2}{3} g \sin \alpha$$

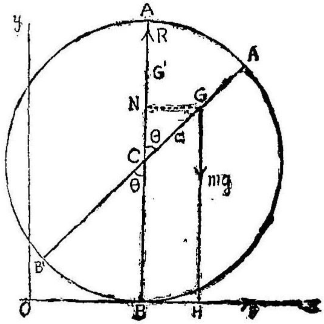
அதாவது, உருளையின் முடுக்கம் $\ddot{x} = a\ddot{\theta} = \frac{2}{3} g \sin \alpha$.

கயிற்றின் இழுவிசை $T = \frac{1}{2} M a \ddot{\theta}$

$$= \frac{1}{2} M \cdot \frac{2}{3} g \sin \alpha$$

$$= \frac{1}{3} Mg \sin \alpha .$$

மாதிரி 215. அச்சிலிருந்து C தூரத்தில் திணிவு மையத்தைக் கொண்டுள்ள ஓர் வட்ட உருளை ஒரு கிடைத் தளத்தில் உருளுகிறது. அது உறுதியற்ற நிலையிலிருந்து உருளத் தொடங்கினால், திணிவு மையம் மிகத் தாழ்ந்த நிலையி லிருக்கும்போது தளத்தின் எதிரமுத்தம் உருளையின் எடையைப் போல் $\left[1 + \frac{4c^2}{(a-c) + k^2} \right]$ மடங்கு என்று காட்டுக. a என்பது உருளையின் ஆரை ; k என்பது திணிவு மையவழி அச்சைப் பற்றி உருளையின் சுழியாரை.



படம் 169

தீர்வு: G என்பது உருளையின் திணிவு மையம். C என்பது G வழி நிலைக்குத்துத் தளம் உருளையை வெட்டுகின்ற குறுக்கு வெட்டு முகப்பின் மையம். CG c ; உருளை யின் பொருண்மை m எனில், அதன் எடை mg ஆனது G வழியே நிலைக்குத்தாகக் கீழ் நோக்கிச் செயல்படும். உராய்வு விசை F ஆனது Ox திசையி லும், தளத்தின் எதிரமுத்தம் R ஆனது தொடுபுள்ளி வழியே நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கியும் செயல்படும்.

O என்பது தொடக்கத்தில் கிடைத்தளத்துடன் இக்குறுக்கு வெட்டுப் பகுதியின் தொடுபுள்ளி. G' என்பது தொடக்கத்தில் திணிவு மையத்தின் நிலை.

O வழிக் கிடைக்கோட்டையும், நிலைக்குத்துக் கோட்டை யும் x, y அச்சுகளாக எடுத்துக் கொள்க.

t நேரத்தில் உருளையானது θ கோணத்தில் திரும்பியுள்ள தாகக் கொள்க.

OB = t நேரத்தில் உருளை சென்றுள்ள தூரம்

$= \text{வில்}\ AA' = a\theta.$

$G = (x, y)$ எனில், $x = OH = OB + BH = a\theta + c\sin\theta$

$y = GH = BC + CN = a + c\cos\theta.$

$$\therefore\ \dot{x} = a\dot{\theta} + c\cos\theta\,\dot{\theta}$$

$$\dot{y} = -c\sin\theta\,\dot{\theta}$$

$$\ddot{x} = a\ddot{\theta} + c\cos\theta\,\ddot{\theta} - c\sin\theta\,\dot{\theta}^2$$

$$\ddot{y} = -c\sin\theta\,\ddot{\theta} - c\cos\theta\,\dot{\theta}^2$$

கிடைத்திசை, நிலைக்குத்து இயக்கச் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

$$m\ddot{x} = F,$$

$$m\ddot{y} = R - mg$$

அதாவது, $m(a\ddot{\theta} + c\cos\theta\,\ddot{\theta} - c\sin\theta\,\dot{\theta}^2) = F$ ... (2)

$$m(-c\sin\theta\,\ddot{\theta} - \cos\theta\,\dot{\theta}^2) = R - mg$$

அல்லது, $R = mg - mc(\sin\theta\,\ddot{\theta} + \cos\theta\,\dot{\theta}^2)$ ... (3)

ஆற்றல் சமன்பாடு காண்க:

$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mk^2\dot{\theta}^2 =$ செய்யப்பட்ட வேலை.

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$$

$$= (a\dot{\theta} + c\cos\theta\,\dot{\theta})^2 + (-c\sin\theta\,\dot{\theta})^2$$

$$= \dot{\theta}^2[a^2 + 2ac\cos\theta + c^2\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta]$$

$$= \dot{\theta}^2[a^2 + c^2 + 2ac\cos\theta]$$

திணிவு மையமானது G'-லிருந்து G என்னும் நிலையை அடைந்திருப்பதால் இறங்கியுள்ள தூரம் $= G'N = G'C - NC = (c - c\cos\theta) = c(1 - \cos\theta)$

$\therefore$ செய்யப்பட்ட வேலை $= mg.\ G'N = mgc(1 - \cos\theta)$

$\therefore$ ஆற்றல் சமன்பாடு வருமாறு:

$$\frac{1}{2}m(a^2 + c^2 + 2ac\cos\theta)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mk^2\dot{\theta}^2$$

$$= mgc(1 - \cos\theta)$$

G-ன் மிகத் தாழ்ந்த நிலையில் $\theta = \pi$ ஆகும்.

அந் நிலையில் $\dot{\theta} = \omega$ என்க.

$$\therefore \quad \tfrac{1}{2} m (a^2 + c^2 - 2ac)\, \dot{\theta}^2 + \tfrac{1}{2} mk^2\, \dot{\theta}^2 = mgc \ (2)$$

அதாவது, $\frac{1}{2}m\,[(a-c)^2 + k^2]\,\omega^2 = 2mgc$

$$\therefore \quad \omega^2 = \frac{4\,gc}{(a-c)^2 + k^2}$$

(3)-லிருந்து, $R = mg - mc\,(\sin\pi\,\ddot{\theta} + \cos\pi\,.\,\omega^2)$

$$= mg + mc\,\omega^2$$

$$= mg + mc\,.\,\frac{4\,gc}{(a-c)^2 + k^2}$$

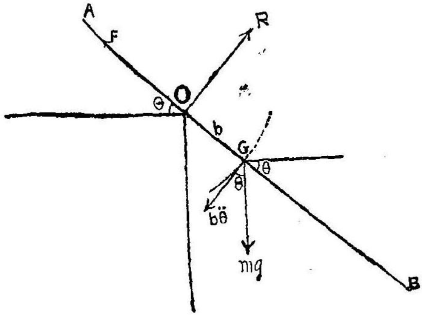
$$= mg + \frac{4\,mg\,c^2}{(a-c)^2 + k^2}$$

$$= \left[1 + \frac{4\,c^2}{(a-c)^2 + k^2}\right] mg$$

$$= \left[1 + \frac{4\,c^2}{(a-c)^2 + k^2}\right] \times \text{ உருளையின் எடை}$$

மாதிரி 216. $2a$ நீளமுள்ள ஓர் உராய்வுடைய சீரான கோல் ஒரு மேசையின்மீது அதன் ஓரத்திற்குச் செங்குத்தாக வைக்கப்பட்டுள்ளது. அதன் புவியீர்ப்பு மையம் தொடக்கத்தில் ஓரத்திற்கு அப்பால் b தூரத்திலுள்ளது. உராய்வுக் குணகம் μ எனில், கோல் $\tan^{-1}\left(\frac{\mu a^2}{a^2 + gb^2}\right)$ கோணத்திற்கு திரும்பியதும் நழுவத் தொடங்குமென்று காட்டுக.

தீர்வு: G என்பது AB என்ற கோலின் ஈர்ப்பு மையம்; அதாவது, நடுப்புள்ளி. $\therefore\ AG = GB = a$.



படம் 170

O என்பது மேசையின் ஓரத்துடன் கோலின் தொடுபுள்ளி·

$\therefore \quad OG = b.$

t நேரத்தில் கோலானது θ கோணத்திற்குத் திரும்பியுள்ளதாகக் கொள்க.

G-ஆனது O-ஐ மையமாகக் கொண்டு b ஆரையுள்ள ஒரு வட்டவில்லாகச் சுழலுமாகையால் கோலுக்குச் செங்குத்தாக அதன் முடுக்கம் $b\ddot{\theta}$ ஆகும். GO-ஐ நோக்கி அதன் முடுக்கம் $b\dot{\theta}^2$

O-வில் மேசையின் எதிரழுத்தம் R கோலுக்குச் செங்குத்தாகச் செயல்படும் உராய்வு விசை F O t திசையில் செயல்படும்.

கோலின் பொருண்மை m எனில் G-ல் கோலின் எடை mg-ஆனது நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கிச் செயல்படும்.

கோலின் வழியாகவும், கோலுக்குச் செங்குத்தாகவும் விசைப் பிரிப்புச் செய்து இயக்கச் சமன்பாடுகள் அமைக்கவும்.

$$m b \dot{\theta}^2 = F - mg \sin \theta \qquad \ldots \qquad (1)$$

$$m b \ddot{\theta} = mg \cos\theta - R \qquad \ldots \qquad (2)$$

O-ஐப் பற்றித் திருப்புத்திறன் காண்க.

$$m k^2 \ddot{\theta} = mg \, . \, b \cos \theta$$

ஆனால் $mk^2 = O$-ஐப்பற்றி கோலின் நி . தி.

$= G$ வழிச் செங்குத்துப்பற்றி நி.தி. $+ m \, . \, OG^2$

$$= m \frac{a^2}{3} + mb^2$$

$$= m\left(\frac{a^2}{3} + b^2\right)$$

$$\therefore \quad m\left(\frac{a^2}{3} + b^2\right)\ddot{\theta} = m gb \cos \theta$$

$2\dot{\theta}$ ஆல் பெருக்கித் தொகையீடு காண்க.

$$\left(\frac{a^2}{3} + b^2\right)\dot{\theta}^2 = 2gb \sin \theta + \text{மாறிலி.}$$

தொடக்கத்தில் $\theta = 0, \dot{\theta} = 0 \quad \therefore$ மாறிலி மறைந்துவிடும்.

$$\therefore \quad \frac{(a^2 + 3b^2)}{3} \dot{\theta}^2 = 2\, gb \sin \theta$$

அல்லது, $\dot{\theta}^2 = \dfrac{6\, gb \sin \theta}{a^2 + 3b^2}$

மேலும், $\ddot{\theta} = \dfrac{3\, gb \cos \theta}{a^2 + 3b^2}$

இம் மதிப்புகளைச் சமன்பாடுகள் (1), (2) ஆகியவற்றில் பிரதியிடுக.

(1)-லிருந்து,

$$mb. \frac{6\, gb \sin \theta}{a^2 + 3b^2} = F - mg \sin\theta$$

அல்லது, $F = mg \sin \theta + \dfrac{6\, mg\, b^2 \sin \theta}{a^2 + 3b^2}$

$$= mg \left(1 + \frac{6\, b^2}{a^2 + 3b^2} \right) \sin \theta$$

$$= mg \left(\frac{a^2 + gb^2}{a^2 + 3b^2} \right) \sin \theta$$

(2)-லிருந்து,

$$mb \frac{3\, gb \cos \theta}{a^2 + 3b^2} = mg \cos \theta - R$$

அல்லது $R = mg \cos \theta - \dfrac{3\, mg\, b^2}{a^2 + 3b^2} \cos \theta$

$$= mg \left(1 - \frac{3\, b^2}{a^2 + 3b^2} \right) \cos \theta$$

$$= mg \left(\frac{a^2}{a^2 + 3b^2} \right) \cos \theta$$

$F = \mu R$ ஆகயிருக்கும்போது கோல் நழுவத் தொடங்கும். ஆகவே, கோல் நழுவத் தொடங்கும்போது,

$$mg \left(\frac{a^2 + gb^2}{a^2 + 3b^2} \right) \sin \theta = \mu mg \left(\frac{a^2}{a^2 + 3b^2} \right) \cos \theta$$

அதாவது, $\tan \theta = \dfrac{\sin \theta}{\cos \theta} = \dfrac{\mu\, a^2}{a^2 + g\, b^2}$

அல்லது, $\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{\mu\, a^2}{a^2 + gb^2}\right)$

பயன்முறைகள் :

1. முறுக்கூசலி (Torsion Pendulum)

நீளமான கோலொன்று அதன் நடுப்புள்ளியில் கட்டப் பட்டுள்ள மெல்லிய கம்பியின் மூலம் கிடைத்தளத்திலிருக்குமாறு தொங்கவிடப்படுகிறது. சமநிலையிலிருந்து அது அசைத்து விடப்பட்டால் ஒரு கிடைத்தள வட்டமாகச் சுற்றக்கூடியதாக அது அமைந்திருக்கும். கோலின் நிலைமத் திருப்புத்திறனைத் தேவையான அளவில் மாற்றிக் கொள்ளத் துணை செய்யும் வகையில் அதன் நடுப்புள்ளியின் இருபுறமும் இரு எடைகள் இணைக்கப்படுவதுண்டு.

சமநிலையில் கம்பியில் எவ்வித முறுக்கமுமின்றி கோலானது கிடைவசத்தில் ஓய்வாகயிருக்கும். ஆனால் சிறிது அசைத்து விடப்பட்டால் கோலானது அதன் நடுப்புள்ளியை ஆரையாக வும், கம்பியை அச்சாகவும் கொண்டு சுற்றத் தொடங்கும். கோல் இவ்வாறு சுற்றும் பொழுது கம்பியில் முறுக்கேறும். இதன் காரணமாக ஒரு சுழலிணை உருவாகிறது. இச் சுழலிணை யானது கோலை மீண்டும் ஓய்வு நிலைக்குக் கொண்டுவர முயலும். இத்தகைய ஓர் அமைப்புக்குப் பெயர் முறுக்கூசலி.

கோலானது சமநிலையிலிருந்து θ கோணத்திற்குச் சுற்றும் பொழுது செயல்படுகின்ற சுழலிணையானது $\lambda\,\theta$, λ ஒரு மாறிலி, என்று பரிசோதனைகளின் மூலம் காணப்பட்டுள்ளது. λ என்னும் மாறிலியானது கம்பியின் தன்மைக்கேற்ப மாறுபடும்.

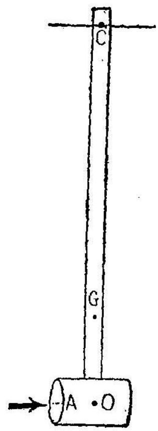
முறுக்கேற்றப்பட்ட கம்பியின் முறுக்கங்கள் சுழலிணையின் காரணமாகத் தளரத் தொடங்குமாகையால் கோல் எதிர்த்திசை யில் சுற்றத் தொடங்கும். கம்பியிலுள்ள முறுக்கம் முழுவதும் தளர்ந்தபோது கோல் மீப்பெரு சுழல் வேகத்துடன் எதிர்த் திசையில் சுற்றிக்கொண்டிருக்குமாகையால் அதே வேகத்துடன் அதன் சுழல் வேகம் மறையும் வரை தொடர்ந்து சுற்றிக் கொண் டிருக்கும். இவ்வாறு கோல் சுற்றும்போது கம்பியானது எதிர்த் திசையில் முறுக்கேற்றப்பட்டு மற்றுமொரு சுழலிணை உருவாகும். கோலின் சுழல்வேகம் மறைந்ததும் இச் சுழலிணையின் விளை வாகக் கம்பியின் முறுக்கம் தளரத் தொடங்கும் ஆகையால் கோல் மீண்டும் முந்திய திசையில் சுற்றத்தொடங்கும். இவ் வாறு கோலானது வலஞ்சுழியாகவும் இடஞ்சுழியாகவும் மாறி மாறிச் சுற்றிக்கொண்டிருக்கும்.

இவ்வியக்கத்தின் சமன்பாடு $Mk^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\lambda\theta$ ஆகும். இது ஒரு சாமானிய சீரிசை இயக்கமாகும். அதன் கால வட்டம் $2\pi\sqrt{\frac{Mk^2}{\lambda}}$.

எறியூசல் (Ballistic Pendulum)

உந்தவியல் தத்துவமானது எறியூசலி யென்னும் அமைப்பில் பயன்படுத்தப்பட்டுத் துப்பாக்கியிலிருந்து வெளிவரும் ரவையின் திசைவேகத்தை அளவிட உதவுகிறது.

ஒரு கனமான உள்ளீடற்ற இரும்பு உருளை யின் திறப்பான ஒரு பக்கத்தின் வழியே உருளைக்குள் சரியாகச் சேரக்கூடிய மர உருளை யொன்று செருகப்பட்டு ஊசற்குண்டாகப் பயன் படுத்தப்படுகிறது. இவ்வூசற்குண்டு ஒரு கோலி னுல் இணைக்கப்பட்டுத் தொங்கவிடப்படுகிறது. இவ் வூசலியானது மிகவும் சக்தி வாய்ந்த விசை செயல்படும்போது மெதுவாகக் கூம்பூசலி போல் ஆடத்தொடங்கும்.



படம் 171

இவ்வூசலியின் தொங்கு மையம், அலைவு மையம், புவியீர்ப்பு மையம் ஆகியவை முறையே C, O, G என்று கொள்க. அலைவு மையமானது ஊசற்குண்டிலிருக்குமாறு இவ் வூசலி அமைக்கப் பட்டிருக்கும். $CO = l$, $CG = h$ என்க.

m பொருண்மையுள்ள ஒரு துப்பாக்கி ரவை v திசை வேகத் துடன் கிடைத்திசையில் ஊசற்குண்டை அலைவு மையத்தில் தாக்கி அதனுள்ளேயே பதிந்து விடுவதாகக் கொள்வோம். ஊசற்குண்டுக்கும், துப்பாக்கி ரவைக்கும் இடையேயுள்ள விசை கள் உள் விசைகளாகும். தாக்குதலின்போது செயல்படுகின்ற புறவிசைகள் ஈர்ப்பு விசையும், C-யிலுள்ள அழுத்தமும் மட்டுமே யாகும். ஈர்ப்பு விசை ஒரு முடிவுறு விசையாதலின் அது எவ் விதக் கணத்தாக்கு விசையையும் அளிக்காது. C-யைப்பற்றி Cயிலுள்ள அழுத்தத்திற்குத் திருப்புத்திறன் எதுவும் கிடையா தாகையால், சுழலுந்தத் தத்துவப்படி,

C-யைப்பற்றி தாக்குதலுக்கு முன்னுள்ள சுழலுந்தம்

$= C$ யைப்பற்றி தாக்குதலுக்குப் பின் தொகுதியின் சுழலுந்தம். O ஐப்பற்றி ஊசலியின் நிலைமத் திருப்புத்திறன் I என்க.

தாக்குதலின் காரணமாக ஊசலியானது ω எனும் சுழல் வேகத்துடன் கூம்பூசலி போன்று அசைவதாகக் கொள்வோம்.

தாக்குதலுக்கு முன் சுழலுந்தம் $= mv.\ CO = mvl.$

தாக்குதலுக்குப் பின் சுழலுந்தம் $= (I + m.\ AC^2)\ \omega = I\omega,$ ஏனெனில், Iயுடன் ஒப்பிடுகையில் m மிகச் சிறியதாகையால் $m.\ AC^2$ஐப் புறக்கணித்து விடலாம்.

$$\therefore \quad mvl = I\omega. \qquad \dots (1)$$

தாக்குதலின்போது ஆற்றல் தத்துவத்தைப் பயன்படுத்த முடியாதாகையால், தாக்குதலை யடுத்து ஆற்றல் தத்துவத்தைப் பயன்படுத்துக.

மீண்டும் m மிகச் சிறியதாகையால் m -ன் இயக்க ஆற்றலைப் புறக்கணித்துவிடுக. ஆகவே, தாக்குதலுக்குப் பின் இயக்க ஆற்றல் $\frac{1}{2} I \omega^2$ ஆகும்.

தாக்குதலின் காரணமாக, ஊசலியானது நிலைக்குத்துக் கோட்டிலிருந்து θ கோணச் சாய்வில் திரும்பியிருக்குமாயின், அதன் புவியீர்ப்பு மையமானது C-யிலிருந்து $CG \cos\theta = h\cos\theta$ ஆழத்திலிருக்கும்.

ஆகவே, புவியீர்ப்பு மையம் உயர்ந்துள்ள தூரம்

$$= h - h\cos\theta = h\,(1 - \cos\theta)$$

$\therefore$ ஊசலியினால் செய்யப்பட்ட வேலை $= Mgh(1 - \cos\theta)$, M என்பது ஊசலியின் பொருண்மை.

$$\therefore \quad \tfrac{1}{2} I\omega^2 = Mgh\,(1 - \cos\theta). \qquad \dots (2)$$

(1)-லிருந்து, $\frac{1}{2} I.\ \frac{m^2 v^2 l^2}{I^2} = Mgh\,(1 - \cos\theta)$

$$v^2 = \frac{2\,I\,Mgh\,(1 - \cos\theta)}{m^2 l^2}$$

அல்லது, $$v = \frac{\sqrt{2\,I\,Mgh\,(1 - \cos\theta)}}{ml} \qquad \dots (3)$$

$$= \frac{\sqrt{2.\ I\,Mgh.\ 2\sin^2\frac{\theta}{2}}}{ml}$$

$$= 2 \frac{\sqrt{I\,Mgh \, . \sin \frac{\theta}{2}}}{ml}$$

ஆனால் $I = Mk^2$ ஆகையால், $v = 2 \frac{\sqrt{Mk^2 . Mgh} . \sin \frac{\theta}{2}}{ml}$

$$= \frac{2\,Mk\sqrt{gh}}{ml} \sin \frac{\theta}{2}$$

இப்பொழுது, $T = 2\pi \sqrt{\frac{k^2}{gh}} = \frac{2\pi k}{\sqrt{gh}}$ ஆதலின், $k = \frac{T . \sqrt{gh}}{2\pi}$

$$\therefore \quad v = \frac{2M}{ml} . \frac{T\sqrt{gh}}{2\pi} . \sqrt{gh} \sin \frac{\theta}{2}$$

$$= \frac{Mgh\,T \sin \frac{\theta}{2}}{\pi\,ml} \qquad \ldots (4)$$

(3), (4) ஆகிய சூத்திரங்களுள் ஏதேனுமொன்றைப் பயன்படுத்தி துப்பாக்கி ரவையின் திசை வேகத்தைக் கணக்கிடலாம்.

மாதிரி **217.** ஓர் எறியூசல் 80 ராத்தல் பொருண்மையும் அதன் தொங்கு அச்சைப் பற்றிய நிலைமத் திருப்புத்திறன் 1000 ராத்தல் அடி^{2} -ம் கொண்டதாயுள்ளது. அதன் அலைவு நேரம் 2.2 வினாடிகள். $\frac{1}{8}$ ராத்தல் பொருண்மையுள்ள ஒரு குண்டு அதன் அலைவு மையம் வழியே ஒரு கிடைக்கோட்டின் வழியாகச் சுடப்பட்டதால் ஊசலியானது 16°-க்குத் திரும்புகிறது. குண்டின் வேகத்தைக் காண்க.

தீர்வு: இங்கு $M = 80$, $T = 2{\cdot}2$, $m = \frac{1}{8}$, $\theta = 16°$.

ஆனால் $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ ஆதலின், $2{\cdot}2 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$

$$\therefore \frac{l}{g} = \frac{(2.2)^2}{4\pi^2} = \frac{4{\cdot}84}{4\pi^2} = \frac{1{\cdot}21}{\pi^2}$$

ஆனால் $T = 2\pi \sqrt{\frac{k^2}{gh}}$ ஆதலின், $\frac{k^2}{gh} = \frac{l}{g}$

$$\text{அல்லது,} \quad \frac{k^2}{h} = l$$

$$\text{அல்லது} \quad hl = k^2$$

$$\frac{h}{l} = \frac{k^2}{l^2}$$

நி. தி. $= Mk^2 = 1000$

$$\therefore \quad k^2 = \frac{1000}{M} = \frac{1000}{80} = \frac{25}{2}$$

$$\therefore \frac{h}{l} = \frac{25/2}{\left(\frac{1.21\,g}{\pi^2}\right)^2}$$

$$= \frac{25}{2} \times \frac{\pi^4}{(1.21)^2 g^2}$$

$$\text{ஆகவே,} \quad v = \frac{Mgh\,T \sin\frac{\theta}{2}}{\pi\, ml}$$

$$= \frac{Mg}{\pi m} \cdot \frac{h}{l} \cdot T \sin\frac{\theta}{2}$$

$$= \frac{80 \times g}{\pi \times \frac{1}{8}} \times \frac{25}{2} \times \frac{\pi^4}{(1.21)^2\, g^2} \times 2.2 \times \sin 8^\circ$$

$$= \frac{250 \times \pi^8 \times 2.2 \times \text{ in } 8^\circ}{(1.21)^2}$$

= 1,624 அடி/வினாடி.

விசைச் சக்கரம் (Fly wheel)

ஒரு வட்டமான சக்கரமானது அதன் திணிவு மையம் வழியே செங்குத்தாகச் செல்லும் ஒரு நிலையான அச்சைப்பற்றிச் சுழலுமாறு அமைக்கப்பட்டுள்ளது. சக்கரம் சுற்றும் அதன் அச்சும் சேர்ந்து சுற்றும். இத்தகைய ஓர் அமைப்புக்கு விசைச் சக்கரம் என்று பெயர். பொறியியலில விசைச் சக்கரத்தின் பயன் அளவிடற்கரியது. அச்சின் சுழற்சியைச் சீராக்குவதே விசைச் சக்கரத்தின் முக்கிய விளைவாகும். விசைச் சக்கரமின்றி இயக்கம் சீராகயில்லாமல் உதறல்களுடனிருக்கும்.

மாதிரி 218. 100 ராத்தல் பொருண்மையும் 4 அடி விட்டமுமுள்ள ஒரு விசைச் சக்கரமானது 1 அடி விட்டமுள்ள ஓர் இலேசான அச்சாணியின் முனையுடன் பொருத்தப் பட்டுள்ளது. அச்சாணியில் கட்டப்பட்டு அதன்மீது சுற்றப் பட்டுள்ள ஒரு நீளமான கயிற்றின் மறுமுனையில் 20 ராத்தல் எடையொன்று தொங்குகிறது. அச்சாணியின் மீது கயிறு சுற்றிக் கொள்ளுமாறு விசைச் சக்கரமானது வினாடிக்கு 2 சுற்றுகளென்ற வேகத்துடன் சுற்றிக் கொண்டிருக்கும்போது விசை நிறுத்தப்பட்டு, சக்கரமானது தன்வேகத்துடன் சுற்று கிறது. அச்சாணியானது கணநேர ஓய்விற்கு வருமுன்னர் எத்தனை சுற்றுகள் சுற்றுமென்று காண்க.

தீர்வு: சக்கரத்தின் ஆரை $= 2$ அடி.

$\therefore$ சக்கரத்தின் நி. தி. $= \dfrac{Ma^2}{2} = \dfrac{100 \times 2^2}{2} =$ 200 ராத். அடி^{2}.

அச்சாணி இலேசானதாகவிருப்பதால் அதற்கு நி. தி. கிடையாது. சக்கரம், அச்சாணி ஆகியவற்றின் தொடக்கச் சுழல்வேகம் $= 2$ சுற்று/வினாடி $= 4\pi$/வினாடி.

அச்சாணியின் ஆரை $= \frac{1}{2}$ அடி.

ஆகவே, தொங்கவிடப்பட்டுள்ள எடையின் வேகம் = அச் சாணியின் தொடுகோட்டு வேகம்

$$= \omega r$$
$$= 4\pi \times \tfrac{1}{2}$$
$$= 2\pi \text{ அடி/வினாடி.}$$

சக்கரம், அச்சாணி ஆகியவற்றின் தொடக்க இயக்க ஆற்றல்

$$= \tfrac{1}{2} M k^2 \omega^2 + \tfrac{1}{2} m v^2$$
$$= \tfrac{1}{2} \times 200 \times 16\pi^2 + \tfrac{1}{2} \times 20 \times 4\pi^2$$
$$= 1600\pi^2 + 40\pi^2$$
$$= 1640\pi^2.$$

ஓய்வுக்கு வருமுன்னர் 20 ராத்தல் எடை மேலே நகர்ந்த தூரம் x அடியெனில் அதனுல் செய்யப்பட்ட வேலை $= 20\,gx$ அடி. ராத்தலிகள்.

$\therefore$ ஆற்றல் தத்துவப்படி,

$$1640\pi^2 = 20\,gx$$

அல்லது, $x = \dfrac{1640\,\pi^2}{20 \times 32} = \dfrac{41}{16}\pi^2$ அடி.

ஓய்வுக்கு வருமுன்னர் அச்சாணி n சுற்றுகள் சுற்றுவ தாகக் கொள்க.

$\therefore\ n \times$ அச்சாணியின் சுற்றளவு $= x$

$$n \times 2\pi \times \tfrac{1}{2} = \frac{41}{16}\pi^2$$

அல்லது, $n = \dfrac{41\,\pi}{16} = \dfrac{41 \times 22}{16 \times 7} = 8.05$

பயிற்சி 21

1. $2a$ நீளமுள்ள ஒரு சீரான கோல் அதன் ஒரு முனையைப் பற்றித் தாராளமாகத் திரும்பக்கூடியதாக அமைந்துள்ளது. அதன் முதல் தடவை நிலைக்குத்தாகவிருக்கும்போது அதன் சுழல் வேகம் $\sqrt{3g/2a}$ என்று காட்டுக.

2. ஒரு ராத்தல் பொருண்மையுள்ள திண்ம உருளை யொன்று அதன் கிடையான அச்சைப்பற்றிச் சுற்றக்கூடியதாக அமைக்கப்பட்டுள்ளது. அதன்மீது சுற்றப்பட்டுள்ள ஒரு கயிற் றின் முனைகளில் 3 ராத்தல், 5 ராத்தல் பொருண்மைகள் கட்டப் பட்டுள்ளன. அது வழுக்காமல் நகருமெனில், அப் பொருண்மை களின் பொதுவான முடுக்கம் $4g/17$ என்று காட்டுக.

3. ஒரு விசைச் சக்கரமானது (fly wheel) சீரான வட்டத் தகடு போன்று உள்ளது. அதன் ஆரை 2 அடி ; எடை 200 ராத்தல். அதன் சுழல்வேகத்தை விநாடிக்கு 10 சுற்றுகள் என்பதிலிருந்து 20 சுற்றுகளாக மாற்றுவதற்கு அவ் விசைச் சக்கரத்தின்மீது செய்யப்படவேண்டிய வேலை $4500\ \pi^2$ அடி ராத்தல்கள் என்று காட்டுக.

4. ஒரு விசைச் சக்கரத்தின் அச்சின்மீது சுற்றப்பட்டுள்ள 10 அடி நீளமான கயிறு, அது முழுவதும் அச்சிலிருந்து கழற்றப் படும்வரை 50 ராத்தல் எடைக்குச் சமமான விசையினால் இழுக்கப்படுகிறது. சக்கரமானது நிமிடத்திற்கு 100 சுற்றுகள் வீதம் சுற்றினால் அதன் நிலைமத் திருப்புத்திறன் $\dfrac{90\,g}{\pi^2}$ அடி ராத் தல் அலகுகள் என்று காட்டுக.

5. 2 அடி விட்டமும் 2 அங்குலப் பருமனும் கொண்ட சீரான இரும்பு வட்டத்தகடு ஒன்று அதன் அச்சைப்பற்றி நிமிடத்திற்கு 150 முறை சுற்றுகிறது. இரும்பின் அடர்த்தியானது ஒரு கன அடிக்கு 478 ராத்தல்களெனில், தகட்டின் இயக்க ஆற்றல் 497 π^3 அடி $\frac{1}{12}$ ராத்தல்கள் என்று காட்டுக.

6. 50 செ.மீ. ஆரையும் 100 கிராம் பொருண்மையும் கொண்ட ஒரு சீரான வட்டத்தகடு அதன் மையவழி அச்சைப் பற்றி நிமிடத்திற்கு 90 முறை சுற்றுகிறது. அதன் இயக்க ஆற்றல் $9\pi^2/160$ ஜௌல்களெனக் காட்டுக.

7. 40 செ.மீ. ஆரையும் 20 கி.கி. பொருண்மையுமுள்ள ஒரு வட்டவடிவ விசைச் சக்கரத்தின் சுழல்வேகத்தை வினாடிக்கு 10 சுற்றுகளிலிருந்து 20 சுற்றுகளாக மாற்றுவதற்கு அதன்மீது செய்யப்பட வேண்டிய வேலை 960 π^2 ஜௌல்கள் என்று காட்டுக.

8. 3 அடி விட்டமுள்ள ஒரு கப்பியின்மீது பல சுற்றுகள் சுற்றப்பட்ட ஒரு கயிற்றின் நுனியில் 10 ராத்தல் பொருண்மையுள்ள ஒரு பொருள் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. கப்பியானது ஒரு கிடையச்சின்மீது சுழலக்கூடியதாக அமைக்கப்பட்டுள்ளது. ஓய்விலிருந்து புறப்பட்ட அப்பொருண்மையானது 5 வினாடிகளில் 16 அடி இறங்குகிறதெனில், கப்பியின் அச்சில் எவ்வித உராய்வுமில்லையென்று கொண்டு கப்பியின் நிலைமத் திருப்புத் திறன் 540 ராத். (அடி)^2 அலகுகள் என்று காட்டுக.

9. M பொருண்மையும் a ஆரையுமுள்ள ஒரு சீரான வட்ட உருளையானது ஒரு கிடையச்சின்மீது தாராளமாகச் சுழலக் கூடியதாயுள்ளது. ஒரு வழவழப்பான கயிறு அதில் கட்டப்பட்டு அதன்மீது சுற்றப்பட்டுள்ளது. கயிற்றின் நுனியில் m பொருண்மையுள்ள பொருளொன்று கட்டப்பட்டுள்ளது. பொருண்மை m ஆனது h நிலைக்குத்துத் தூரத்திற்கு இறங்கியபோது உருளையின் சுழல்வேகம் $\frac{2}{a}\sqrt{\frac{m\,gh}{M+2m}}$ என்று காட்டுக.

(மதுரை, பி.எஸ்ஸி., 1972, ஏப்.)

10. a, b பக்கங்களுடைய ஒரு செவ்வகத் தகட்டின் ஓர் ஓரம் கிடைநிலையில் பொருத்தப்பட்டு, தகடானது அவ்வோரத்தைப்பற்றிச் சுழலக்கூடியதாக அமைக்கப்பட்டுள்ளது. தொடக்கத்தில் தகட்டின் தளம் கிடையாகவிருக்குமாறு வைக்கப் பட்டு விடப்படுகிறது. தகடு நிலைக்குத்தாகவிருக்கும்போது அதன் சுழல்வேகம் $\sqrt{3g/b}$ என்று காட்டுக.

11. a ஆரையுள்ள ஒரு கோளம் ஒரு கிடைத் தொடு கோட்டைப் பற்றி ஊசலாடுகிறது. தனிச்சம ஊசலியின் நீளம் $\frac{7a}{5}$ என்று காட்டுக.

12. a ஆரையும், $60°$ மையக் கோணமும் கொண்ட ஒரு வட்டவில் போன்ற கம்பியின் நடுப்புள்ளியைத் தொங்கு மையமாகக் கொண்ட கூட்டுசலிக்குச் சமமான தனிச்சம ஊசலியின் நீளம் $2a$ என்று காட்டுக.

(சென்னை, பி.எஸ்ஸி., '70, ஏப்.)

13. ஒரு சீரான கோல் அதன் ஒரு முனையிலுள்ள கிடைத் தள அச்சின்மீது ஊசலாடுகிறது. அது ஒரு வினாடி யூசலியாக ஆடவேண்டுமெனில் அதன் நீளம் $\frac{48}{\pi^2}$ அடி இருக்கவேண்டு மென்று காட்டுக.

14. ஓர் உள்ளீடற்ற வட்ட உருளையானது கிடைமட்டத்தி லுள்ள ஒரு பிறப்பிக்கும் கோட்டைப் பற்றிச் சுழல்கிறது. தனிச்சம ஊசலியின் நீளம் உருளையின் விட்டத்திற்குச் சமமென்று காட்டுக.

15. ஒரு நீள்வட்டத் தகட்டின் அரையச்சுகள் 5 அங்., 3 அங். ஆகும். அதன் ஒரு குவியத்தின் வழியே செல்லும் ஒரு கிடையச்சிலிருந்து அது தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. ஒரு சிறு அலைவின் காலவட்டம் $\frac{7\pi}{16\sqrt{3}}$ வினாடி என்று காட்டுக.

16. a ஆரையுள்ள ஒரு திண்ம அரைக் கோளமானது அதன் சமதள முகத்தின் ஒரு விட்டம் பற்றி ஓர் ஊசலியாக ஆடக்கூடியதாக அமைக்கப்பட்டுள்ளது. அதன் தனிச்சம ஊசலியின் நீளம் $16a/15$ என்று காட்டுக.

17. ஒரு சீரான கனசதுரம் கிடைத்தளமான அதன் ஓர் ஓரத்தைப்பற்றித் திரும்பக் கூடியதாயுள்ளது. அது ஒரு வினாடியில் ஒரு முழுச் சுற்றுச் சுற்றவேண்டுமாயின் அதன் ஓரத்தின் நீளம் $\frac{6\sqrt{2}}{\pi^2}$ அடியிருக்க வேண்டுமென்று காட்டுக.

18 ஓர் அடி நீளப் பக்கமுடைய ஓர் ஒழுங்கு அறுகோண வடிவிலுள்ள ஒரு சீரான தகடு அதன் ஒரு முனைவழியே அதன்

தளத்திற்குச் செங்குத்தாகக் கிடையாகச் செல்லும் ஓர் அச்சைப்பற்றி ஊசலாடுகிறது. அது ஒரு நிமிடத்தில் செய்யும் அலைவுகள் $\frac{48\sqrt{6}}{\pi}$ என்று காட்டு.

19. h உயரமும் $90°$ உச்சிக் கோணமுமுடைய ஒரு நேர் வட்டத் திண்மக்கூம்பு அதன் உச்சி வழியே செல்லும் ஒரு கிடையச்சைப்பற்றி ஊசலாடுகிறது. தனிச் சம ஊசலியின் நீளம் h என்று காட்டுக.

20. $2l$ நீளமும் M பொருண்மையுள்ள AB என்னும் ஒரு சீரான கோலின் முனை B-யில் m என்னும் பொருண்மை இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இத்தொகுதியானது A வழியே செல்லும் ஒரு கிடை அச்சைப்பற்றி ஊசலாடுகிறது. ஒரு சிறு அலைவின் நேரம் $4\pi\sqrt{\frac{(M+3m)}{3(M+2m)g}}$ என்று காட்டுக.

(சென்னை பி.எஸ்ஸி. 1968 ஏப்.)

21. ஒரு சீரான வட்டத்தகடு அதன் தளத்திலுள்ள ஒரு கிடையச்சைப்பற்றி ஊசலாடுகிறது. அலைவுநேரம் மீச்சிறிதாயிருப்பின் மையத்திலிருந்து இவ்வச்சின் தூரம் அதன் ஆரையில் பாதியாகுமென்று காட்டுக.

22. 7 அடி உயரம், 6 அடி அகலம், 160 ராத்தல் எடையுமுள்ள ஒரு மரக்கதவும் நிலைக்குத்துக் கோட்டிலமைக்கப் பட்டுள்ள பிணையல்களைப் பற்றித் திரும்பக் கூடியதாயுள்ளது. பிணையல் கோட்டிலிருந்து 2 அடி தூரத்தில் கதவுக்குச் செங்குத் தாக 8 ராத்தல் எடைக்குச் சமமான விசையொன்று செயல் படுத்தப்படுகிறது. கதவு $90°$-க்குத் திரும்பியபோது அதன் சுழல் வேகம் $\frac{4\sqrt{\pi}}{15}$ /வினாடி யென்று காட்டுக.

23. 5 செ.மீ. ஆரையும் 1 கிலோ கிராம் எடையுமுள்ள ஒரு வட்டத்தகடு ஒரு தொடு கோட்டைப்பற்றி வினாடிக்கு 6 சுற்றுக் கள் வீதம் சுற்றுகிறது. அதை ஒரு நிமிடத்தில் ஓய்வுக்குக் கொண்டுவரக்கூடிய உராய்வுச் சுழலிணை $625\,\pi$ செ.மீ. டைன் கள் என்று காட்டுக.

24. 3 அடி ஆரையுள்ள ஒரு சீரான வட்டத்தகட்டிலிருந்து அதே மையத்தைக் கொண்ட 1 அடி ஆரையுள்ள ஒரு வட்டம்

வெட்டியெடுக்கப்படுகிறது. எஞ்சிய பகுதியானது முற்றிலும் உராய்வுடைய ஓர் ஆணியில் உள்வட்ட ஓரம் தொடுகையி லிருக்குமாறு தொங்கவிடப்பட்டு ஒரு நிலைத்தளத்தில் ஊசலாட விடப்படுகிறது. ஒரு சிறு அலைவு நேரம் $2\pi\sqrt{6}$ வினாடி யென்று காட்டுக.

25. h உயரமும் a அரையுச்சிக் கோணமு முடைய ஒரு திண்மக் கூம்பு அதன் அடிப்பக்கத்தின் ஒரு விட்டத்தைப்பற்றி ஊசலாடுகிறது. தனிச்சம ஊசலியின் நீளம் $\frac{1}{5}h(2 + 3\tan^2\alpha)$ என்று காட்டுக.

26. ஒரு வட்டத்தகடு அதன் விளம்பிலுள்ள ஒரு புள்ளி வழியே தகட்டிற்குச் செங்குத்தாகச் செல்லும் ஒரு கிடை யச்சைப்பற்றித் திரும்பக்கூடியதாகவிருக்கின்றது. அப்புள்ளி வழி விட்டம் அப்புள்ளிக்கு நேர் மேலே நிலைக்குத்தாகவிருக்கும் போது தகடு இயங்கத் தொடங்கிறது. இந்த விட்டம் θ கோணத்திற்குத் திரும்பியதும் அப்புள்ளியிலுள்ள அழுத்தத்தின் இவ்விட்டம் வழிப்பிரிவு, இவ்விட்டத்திற்குச் செங்குத்து வழிப் பிரிவு ஆகியவை முறையே $\frac{1}{3}W(7\cos\theta - 4)$ $\frac{1}{3}W\sin\theta$ என்று காட்டுக. (W என்பது தகட்டின் எடை)

27. $2a$ நீளமும் W எடையுமுள்ள ஒரு சீரான கோல் அதன் ஒரு முனையைப்பற்றித் திரும்பக் கூடியதாயுள்ளது. அது அத் திரும்பு முனைக்கு மேலே நிலைக்குத்து நிலையிலிருந்து திரும்பத் தொடங்குகிறது. அது θ கோணத்திற்குத் திரும்பிய தும் திரும்பு முனையில் அழுத்தத்தின் கிடைப்பிரிவு, நிலைக் குத்துப் பிரிவு ஆகியவை முறையே $\frac{3}{4}W\sin\theta\,(2 - 3\cos\theta)$, $\frac{1}{4}W(1 - 3\cos\theta)^2$ என்று காட்டுக.

28. $2a$ கோணமுடைய ஒரு நேர் வட்டக்கூம்பு அதன் அடிப்பக்க மையம் வழியே அச்சுக்குச் செங்குத்தான ஓர் அச்சைப்பற்றிச் சுழலக்கூடியதாயுள்ளது. கூம்பின் அச்சு கிடையாக விருக்கும்போது அது சுற்றத் தொடங்கினுல், அச்சு நிலைக்குத்தாக விருக்கும்போது சுழலச்சின் மீதுள்ள அழுத்த மும், கூம்பின் எடையும் $1 + \frac{1}{2}\cos^2\alpha : 1 - \frac{1}{3}\cos^2\alpha$ என்ற விகிதத்திலிருக்குமென்று காட்டுக.

29. $2a$ நீளமுள்ள AB என்னும் ஒரு சீரான கோல் அதன் முனை A யைச் சுற்றித் திரும்பக்கூடிய நிலையில் சமநிலையி லுள்ளது. A-யிலிருந்து $\frac{4}{3}\left(\frac{n+1}{3}\right)a$ தூரத்தில் P எனும் கணத்

தாக்கு விசை செயல்படுத்தப்பட்டால் A-யில் கணத் தாக்க ளவை $\frac{1}{n}P$ இருக்குமென்று காட்டுக.

30. m பொருண்மையும் $2l$ நீளமுமுள்ள ஒரு நேரான கோல் அதன் ஒரு முனையைப்பற்றி ஒரு கூட்டுசலிபோல் ஊசலாடக்கூடியதாயுள்ளது. அது கிடைமட்ட நிலையிலிருந்து ஊசலாடத் தொடங்குகிறது. அது நிலைக்குத்து நிலையை அடைந்ததும் அதன் நடுப்புள்ளியில் கொடுக்கப்படுகின்ற அடி அக் கோலைப் பின்முகமாக முன்னைப்போல் பாதிச் சுழல் வேகத்துடன் நகர வைக்கிறது. அடியின் கணத்தாக்களவை $m\sqrt{6gl}$ என்று காட்டுக.

31. $2a$ நீளமும் nM பொருண்மையுமுள்ள ஒரு கோல் ஒரு மேசையின் மேல் அதன் ஒரு முனை நிலையாக வைக்கப்பட்ட நிலையில் ஓய்விலிருக்கின்றது. M பொருண்மையுள்ள துக ளொன்று அதனுடன் தொடுகையிலுள்ளது. அதன் மறுமுனை யில் கிடைவசமாக ஓர் அடி கொடுக்கப்படுகிறது. அது மீப் பெரு வேகத்துடன் திரும்பத் தொடங்க வேண்டுமாயின் அத் துகளானது நிலையான முனையிலிருந்து $2a\sqrt{1/n}$ தூரத்தில் வைக்கப்பட வேண்டுமென்றும், அப்போது கோலும் துகளும் பெறுகின்ற இயக்க ஆற்றல்கள் சமமாகயிருக்கு மென்றும் காட்டுக.

32. ஓர் இரயில் f முடுக்கத்துடன் நகரத் தொடங்கும் போது அதன் பெட்டிகளுக்குள் ஒன்றின் கதவு இரயிலின் நீளத் திற்குச் செங்குத்தாகத் திறந்த நிலையிலுள்ளது. கதவு $2a$ அகல முடையதாகவும், இரயில்பெட்டியுடன் வழவழப்பான பிணையல் களினால் இணைக்கப்பட்டதாகவுமிருப்பின், அது θ கோணத் திற்குத் திரும்பியதும் அதன் சுழல் வேகம் $\sqrt{\left(\frac{3f}{2a}\sin\theta\right)}$ என்று காட்டுக.

33. 4 அடி நீளமும் 6 ராத்தல் எடையுமுள்ள ஒரு மெல்லிய சீரான கோல் அதன் ஒரு முனை வழி அச்சின் மீது சுழலக்கூடிய தாய் நிலைக்குத்து நிலையில் தொங்குகிறது. அது ஒரு முழுச் சுற்று சுற்றுமாறு அலைவு மையத்தின் மீது கிடைவசமாகத் தாக்கப்படுகிறது. தாக்குதலின் கணத் தாக்களவை $48\sqrt{3}$ ராத்தல் அடி வினாடி என்று காட்டுக.

34. M பொருண்மையும் $2a$ நீளமுமுள்ள AB என்னும் ஒரு சீரான கோல் ஒரு வழவழப்பான கிடைத்தள மேசையின் மீது நிலையாக வைக்கப்பட்டுள்ள அதன் முனை A-யைப்பற்றிச் சுழலக்கூடியதாய் ஓய்விலுள்ளது. மேசையின் மேல் u திசை வேகத்துடன் நகர்த்து கொண்டிருக்கும் m பொருண்மையுள்ள மீளியல்புடைய துகளொன்று கோலின் மீது A-யிலிருந்து C தூரத்தில் செங்குத்தாக மோதுகிறது. மோதலுக்குப் பின் கோலின் சுழல்வேகம் $3muc\ (4ma^2 + 3\ muc^2)$ என்று காட்டுக.

35. M பொருண்மையும் $2a$ நீளமுமுள்ள OA என்னும் ஒரு சீரான கோல் ஒரு வழவழப்பான கிடைத்தள மேசையின்மீது அதன் முனை O-வில் பொருத்தப்பட்டுள்ள ஒரு வழவழப்பான பிணையலைச் சுற்றிச் சுழலக்கூடியதாக ஓய்வு நிலையிலுள்ளது. O-விலிருந்து b தூரத்தில் m பொருண்மையுள்ள ஒரு மீளியல் பற்ற துகள் ஒன்று கோலுடன் தொடுகையிலுள்ளது. O-விலிருந்து x தூரத்தில் கோலின்மீது கோலுக்குச் செங்குத்தாக P கணத்தாக்களவையுள்ள ஓர் அடி கிடைத்திசையில் கொடுக்கப்பப்படுகிறது. மோதலுக்குப்பின் கோலின் சுழல் வேகம் $\dfrac{Px}{(M \cdot \frac{4}{3} a^2 + mb^2)}$ என்று காட்டுக.

36. 3 அடி நீளமும் 5 ராத்தல் பொருண்மையுமுள்ள சீரான கோலொன்று நிலையாக வைக்கப்பட்டுள்ள ஒரு முனையைப்பற்றிச் சுழலக்கூடியதாய் நிலைக்குத்தாகத் தொங்கு கிறது. அதன் கீழ்முனையின் மீது 20 அலகுக்குச் சமமான கணத்தாக்களவையுடைய ஓர் அடி கொடுக்கப்படுகிறது. அதன் தொடக்கச் சுழல்வேகம் விநாடிக்கு 4 ஆரையன் களொன்றும், அடிபட்ட பின்னர் $60°$ கோணத்திற்குத் திரும்பி யதும் அது முதல் தடவையாக ஓய்வு நிலைக்கு வருமென்றும் காட்டுக.

37. ஒரு நீளமான மெல்லிய கயிற்றின் மூலம் தொங்க விடப்பட்டுள்ள 2 கிலோகிராம் எடையுள்ள ஒரு மரக்கட்டையி னுள் 10 கிராம் பொருண்மையுள்ள குண்டு ஒன்று சுடப்படுகிறது. தாக்குதலுக்குப் பின் கட்டையின் புவி யீர்ப்பு மையம் 6 அங்குல நிலைக்குத்து உயரத்திற்கு உயருகிறது. குண்டின் வேகம் $804\sqrt{2}$ அடி/விநாடி என்று காட்டுக.

13. அலகுகளும் பரிமாணங்களும்

(Units and Dimensions)

நீளம் (length), பொருண்மை (mass), நேரம் (time) ஆகியவற்றின் அலகுகள் 'அடிப்படை அலகுகள்' என்றழைக்கப்படுகின்றன. திசைவேகம், முடுக்கம், உந்தம் போன்ற வேறு எந்த இயக்கவியல் கணியமும் இம்மூன்று அலகுகளின் வாயிலாகக் குறிப்பிடப்படக் கூடுமாதலின் அவை யாவும் இம்மூன்று அலகுகளின் வழிவந்த 'வழியலகுகள்' (derived units) என்றழைக்கப்படுகின்றன. இம் மூன்று அலகுகளையும் முறையே L, M, T என்னும் ஆங்கில எழுத்துகளால் குறிப்பிடுவோம். ஆகவே திசைவேகம், முடுக்கம், விசை ஆகியவற்றின் அலகுகளைப் பின்வருமாறு குறிப்பிடலாம்.

[திசைவேக அலகு] = [1 அடி/விநாடி] = $[L/T] = [LT^{-1}]$

[முடுக்க அலகு] = [1 அடி/(விநாடி)^2] = $[L/T^2] = [LT^{-2}]$

[விசையலகு] = [ஓர் அலகு பொருண்மை × ஓர் அலகு முடுக்கம்] = $[MLT^{-2}]$

[பரப்பு] = [நீளம் × நீளம்] ஆகையால், [பரப்பு] = $[L \times L] = [L^2]$

ஆகவே, பரப்பு என்பது இரு பரிமாணமுடையதெனக் கூறப்படுகிறது.

[கன அளவு] = [நீளம் × அகலம் × உயரம்] = $[L \times L \times L] = [L^3]$

ஆகவே, கன அளவு என்பது முப்பரிமாணமுடையதென்று கூறப்படுகிறது.

அதாவது $[L^2]$, $[L^3]$ என்பன முறையே பரப்பு, கன அளவு ஆகியவற்றின் பரிமாணங்கள் என்று கூறப்படுகின்றன. இதுபோல், $[LT^{-1}]$ என்பது திசைவேகத்தின் பரிமாணம் என்றும், $[LT^{-2}]$ என்பது முடுக்கத்தின் பரிமாணம் என்றும், $[MLT^{-2}]$ என்பது விசையின் பரிமாணம் என்றும் குறிப்பிடப்படுகின்றன.

பௌதிகக் கணியங்களை முன்கண்டவாறு குறிப்பிடுவதற்குப் பரிமாணக் குறியீட்டுமுறை என்று பெயர்.

சில முக்கியப் பௌதிகக் கணியங்களின் பரிமாணப் பட்டியல் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

[திசைவேகம்]	$= [LT^{-1}]$
[முடுக்கம்]	$= [LT^{-2}]$
[விசை]	$= [MLT^{-2}]$
[விசையின் திருப்புத்திறன்]	$= [ML^2T^{-2}]$
[நேர்கோட்டு உந்தம்]	$= [MLT^{-1}]$
[சுழலுந்தம்]	$= [ML^2T^{-1}]$
[வேலை] = [ஆற்றல்]	$= [ML^2T^{-2}]$
[சுழல்வேகம்]	$= [T^{-1}]$
[நிலைமத் திருப்புத்திறன்]	$= [ML^2]$

அலகு மாற்றம் (Change of units)

இயந்திரவியலில் சாதாரணமாகப் பயன்படுகின்ற நீளம், பொருண்மை, நேரம் ஆகியவை அடங்கிய சில அலகுகளுக் கிடையேயுள்ள தொடர்புகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

(i) நீளம்

1 அங்குலம்	=	25.4 மில்லி மீட்டர்கள் = 2.54 செ.மீ.
1 அடி = 12 அங்.	=	30.48 செ.மீ.
1 கெஜம் = 3 அடி	=	0.9144 மீட்டர்
1 பர்லாங்கு = 220 கெ.	=	0.201168 கிலோ மீட்டர்கள் (கி. மீ.)
1 மைல் = 1760 கெ. = 5280 அடி	=	1.6093 கிலோ மீட்டர் (கி.மீ.)
1 மில்லிமீட்டர் (மி.மீ.)	=	0.03937 அங்குலம்
1 சென்டிமீட்டர்	=	0.3937 அங்குலம்
1 மீட்டர்	=	3.28034 அடி
	=	39.37 அங்குலம்
1 ஹெக்டாமீட்டர்	=	109.861 கெஜம்
	=	0.497 பர்லாங்கு
1 கிலோமீட்டர்	=	0.6214 மைல்
	=	4.9712 பர்லாங்கு

1 கடல் மைல் (நாட்)	=	6075$\frac{4}{5}$ அடி
1 லீக் (League)	=	3 கடல் மைல்கள் (நாட்டுகள்)
1 டிகிரி (1°)	=	20 லீக்குகள்

(ii) பரப்பளவு

1 சதுர அடி	=	144 சதுர அங்குலம்
1 சதுர கெஜம்	=	9 சதுர அடி
1 ஏக்கர்	=	4840 சதுர கெஜம்
1 சதுர மைல்	=	640 எக்கர்
1 ஏர் (Are)	=	100 சதுர மீட்டர்
1 ஹெக்டேர்	=	100 ஏர்
	=	2.471 ஏக்கர்
	=	11,968 சதுரகெஜம்

(iii) பொருண்மை

1 ராத்தல்	=	16 அவுன்சு = 453.6 கிராம்
1 குவார்ட்டர்	=	28 ராத்தல்
1 அந்தர்	=	4 குவார்ட்டர் = 50.80235 கி.கி.
	=	112 ராத்தல்
1 டன்	=	20 அந்தர் = 1.01605 மெட்ரிக் டன்
	=	2240 ராத்தல்
1 கிராம்	=	1000 மில்லிகிராம் = 0.035374 அவுன்சு
1 கிலோகிராம்	=	1000 கிராம் = 2.20462 ராத்தல்கள்
1 குவின்டால்	=	100 கிலோகிராம்
1 மெட்ரிக்டன்	=	10 குவின்டால் = 0·9842 டன்
	=	1000 கிலோகிராம்

(iv) கன அளவு

1 லிட்டர்	=	1000 மில்லி லிட்டர் = 1000·028 கன செ.மீ.
1 காலன் (Gallon)	=	4·54496 லிட்டர்

விடைகள்

பயிற்சி 1

(1) 40 மீட். (2) $\sqrt{3}$ மீட்./வி, முதல் திசைவேகத்துடன் 120°-ல். (3) 2 மீட்./வி., தெற்குக்கு மேற்காக 30°-ல். (5) 120°. (6) u-வுடன் 150° ; $v : u = 2 : \sqrt{3}$. (7) $11\sqrt{5}$ அடி/வி. (8) சாலையுடன் $\tan^{-1}\frac{5}{11}$ கோணத்தில். (9) 6 மை./மணி. (10) 200 அடி. (11) 15 நிமி., 12 நிமி. (12) 5 நிமி., 4 நிமி. (13) $\sqrt{29}$ கி.மீ./மணி., ஆற்றுடன் $\tan^{-1}\frac{5}{2}$ திசையில் ; $50\sqrt{29}$ மீட். (17) நிலைக்குத்துடன் $\tan^{-1}\frac{16}{7}$. (18) நிலைக்குத்துடன் $\tan^{-1}\left(\frac{11}{3\sqrt{3}}\right)$. (19) நிலைக்குத்துடன் 30° ; மறுபக்கம் நிலைக்குத்துடன் 30°. (21) வடகிழக்கிலிருந்து $5\sqrt{2}$ கி.மீ./மணி. (22) கிழக்கு நோக்கி மனிதன் வேகத்தைப்போல் $\frac{1}{\sqrt{2}}$ மடங்கு வேகம். (23) வடக்குடன் கிழக்கில் $\cot^{-1}(2-\sqrt{3})$; காற்றின் வேகம் அவருடைய வேகத்தைப்போல் $(\sqrt{3}-1)$ மடங்கு. (25) மேற்குடன் தெற்கில் $\tan^{-1}(\frac{3}{4})$; 5 கி.மீ./மணி. (27) கிழக்குக்குத் தெற்காக $\tan^{-1}(\frac{4}{3})$ சாய்வில் 5 கி.மீ./மணி. (28) மதியத்திற்குப் பின் 24 நிமி. (29) 14.4 நிமி. (30) ஒவ்வொருவரும் 50 மீட். (31) 36 நிமி., $24\sqrt{5}$ கி.மீ. (32) $\frac{16\sqrt{82}}{41}$ கி.மீ. (33) மேற்குக்கு வடக்கே $\tan^{-1}(\frac{1}{3})$ திசையில் $2\sqrt{10}$ கடல் மைல்கள் ; மேற்குக்குத் தெற்கே $\tan^{-}(\frac{7}{3})$ திசையில். (34) வண்டியுடன் $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ சாய்வில் $15\sqrt{29}$ கி.மீ./மணி.

பயிற்சி 2

(1) 36 அடி/வி. ; 16 அடி/வி². (2) $449\frac{1}{2}$ அடி. (3) $2\frac{1}{2}$ வினடி. (21) 900 அடி ; $7\frac{1}{2}$ வினடி. (22) $221\frac{35}{36}$ அடி. (23) 80 அடி/வி. (24) $4\frac{1}{2}$ வி. (25) $\frac{5}{4}$ வி, $\frac{15}{32}g$ அடி மேலே.

(26) (i) 800 அடி (ii) 1300 அடி (iii) 900 அடி. (35) $\sin^{-1}(\frac{3}{4})$; 9 அடி. (36) 65 $\frac{5}{48}$ அடி ; 5 $\frac{5}{24}$ விநாடி. (38) நிலைக்குத்துடன் 45°. (40) கர்ணத்தில் கீழிலிருந்து மேல்நோக்கி முக்கோணத்தின் அடிப்பக்கத்திற்குச் சமமான தூரத்தில்.

பயிற்சி 3

(1) $1\frac{1}{2}$ ராத். எடை. (2) 38.5 ராத். எடை. (3) 2000 அடி. (4) 110 ராத். எடை. (5) 240 கி. எடை. (6) 30 கி. எடை. (7) $\frac{2}{3}g$ செ.மீ./வி². (8) 4 விநாடி. (9) 6 $\frac{2}{3}$ ராத்., 30 ராத்தலி. (10) $\frac{4}{5}$ மீட். (11) 9 : 16. (12) 160,000 டைன்கள். (14) 64 மீட். (15) 88 மீட். (16) $8\frac{3}{7}$ டன் எடை. (17) 1.8 மைல். (18) 16 $\frac{11}{14}$ டன் எடை. (19) 605 அடி. (20) 3.1 டன் எடை.

பயிற்சி 4

(1) 8 அடி/வி². ; 120 ராத்தலிகள் ; 240 ராத்தலிகள். (2) $7\frac{1}{8}$ ராத். ; $4\frac{7}{8}$ ராத். (3) 8 அடி/வி² ; $7\frac{1}{2}$ ராத். எடை ; 32 அடி/வி. ; 192 அடி. (4) $\frac{9}{2}$ செ.மீ. (5) 32 அடி/விநாடி ; 1 விநாடி ; 48 அடி. (6) 16 அடி. (7) 5 கி. (8) 3 வி. (9) 1 வி. (10) $\frac{4m}{405}$. (11) 12 விநாடி ; 9 × 981 செ.மீ. (12) $5\frac{1}{3}$ அடி/வி². ; $3\frac{1}{3}$ ராத். எடை ; $2\frac{1}{2}$ ராத். எடை. (13) $\frac{4\,m_1 m_2 - M\,(m_1 + m_2)}{4\,m_1 m_2 + M\,(m_1 + m_2)}\,g$; $\frac{2\,M(m_2 - m_1)\,g}{4\,m_1 m_2 + M(m_1 + m_2)}$. (14) $\frac{g}{10}$ செ.மீ./வி² ; $\frac{9}{10}$ கி., 327 செ.மீ./வி. (15) 1 : 2. (17) $1\frac{1}{2}$ வி. (19) 17 ராத். (20) 96 அடி. (21) $\frac{3}{8}$. (22) [illegible] அடி/வி² ; $\frac{22}{5}$ ராத். எடை. (23) $\frac{1}{3}$ வி. (24) $\frac{5}{4}g$ செ.மீ. (25) $\frac{8}{3}$ அடி/வி². ; $5\frac{1}{3}$ அடி. (26) 40 அடி ; 18 ராத். எடை. (28) 45° தளத்தில் கீழ்முகமாக 1.66 அடி/வி². முடுக்கத்துடன். (29) $8(\sqrt{3} - 1)$ அடி/வி². (30) $\frac{(m_1 \sin\alpha_1 - m_2 \sin\alpha_2)}{m_1 + m_2}\,g$; $\frac{m_1 m_2 (\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2)}{m_1 + m_2}$; $\frac{2\,m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2)\sin\frac{(\alpha_1 + \alpha_2)}{2}$.

பயிற்சி 5

(1) 4522 ஜௌல்கள். (2) [illegible] ஜௌல்கள். (3) [illegible] வாட். (4) $1\frac{1}{9}$ கி.கி./டன். (5) [illegible] கி.கி./டன். (6) [illegible]

வாட். (7) 80 ப.தி. (8) 128. (9) 150. (10) 806.4. (11) $\frac{219}{1225}$ அடி/வி^{2}. (12) 75 மை./மணி. (13) $\frac{61}{280}$ அடி/வி^{2}. (14) 30·3 ப.தி. (15) 8. (16) $17\frac{6}{7}$. (17) 16.9. (18) 9·4 ப.தி. (19) 140 ப.தி. (20) 8×10^5 லிட்டர்.

(21) $\sqrt{\left(\frac{1100\,gh}{x} - 2gd\right)}$; $\left(\frac{550\,h}{x} - d\right)$. (23) 240;

(25) $\frac{h}{2}$, $\frac{2}{3}h$. (27) 20 அடி-ராத்./விநாடி. (28) $77\frac{19}{33}$

(29) 3750 அடி-ராத். (30) $\frac{7}{1760}$ ப.தி. (34) 180 டன்.

பயிற்சி 8

(1) $\frac{56}{3}\sqrt{10}$ அடி/வி. (2) $12\sqrt{5}$ அடி/வி. (3) 80 அடி/வி. (4) $40\sqrt{5}$ அடி/வி.; 45°. (5) 4 மீட். (6) 3 வி.; 36 அடி. (8) $2\sqrt{3}\,g$; 60°. (9) 32 அடி; $1\frac{1}{4}$ விநாடி. (11) $40\sqrt{6}$ அடி/வி.; 45°. (14) $528\sqrt{3}$ அடி. (15) $(144 + 48\sqrt{34})$ அடி. (23) 20 அடி.

பயிற்சி 11

(1) 256 ராத்தல்-விநாடி; 50 ராத். எடை. (2) 110 ராத்தல்-விநாடி. (3) $390\frac{5}{8}$ ராத். எடை (4) $200\sqrt{3}$ ராத்.எடை. (5) $754\frac{2}{7}$ கி.எடை. (6) 3.75 ராத். (7) 11 அலகுகள்; 550 ராத்தலிகள். (8) 30 அலகுகள். (9) $5\frac{3}{32}$ ராத். எடை. (10) $\frac{4}{3}$ அடி/விநாடி. (11) 2 டன். (12) 1·6 டன். (13) $\frac{25}{32}$ டன் எடை. (14) 10·85 டன். (15) 7·07 டன். (16) 250 செ.மீ./வி. (18) 25 அடி. (19) 2,000 அடி/வி. (20) 625×10^4 டைன்கள். (21) 176·6 கி. எடை. (23) $\frac{10}{3}$ விநாடியில் 109 மீட்டர் உயரத்தில்; 1,090 செ.மீ./வி. (26) 2,000 கி. எடை. (32) $m(v+u)$; $m\,\frac{(v+u)}{t}$. (34) $\frac{Mu\cos\alpha}{M+m}$, $u\sin\alpha$; $\frac{Mu\cos\alpha}{M+m}$, $\frac{1}{2}mu^2\,\frac{(M+m\sin^2\alpha)}{M+m}$. (36) $\frac{3}{7}$ வி. (38) ஆதி நிலைகளிலிருந்து 17 அவு. பொருள் $\frac{98}{17}$ அடி கீழேயும், 15 அவு. பொருள் $\frac{98}{17}$ அடி மேலேயும் இருக்கும். (40) $\frac{4}{3}$ விநாடியில் 8 அடி/வி. வேகம். (41) 15,125 அலகுகள். (44) எதிர்த்திசையில் $67\frac{1}{2}$ மை./மணி.

பயிற்சி 13

(1) 6 ராத்எடை. (2) $\frac{420}{\pi}$. (3) 150 செ.மீ./வி. (5) $\frac{\sqrt{82}+8}{8}$ அடி. (6) $\frac{11}{135}$ டன் எடை. (7) $\sqrt{2ag}$. (12) $\frac{10}{\pi^2}$ அடி. (13) $40\sqrt{2}$ அடி/வி. (14) $\tan^{-1}(\cdot 112)$, $0\cdot 112$. (16) $6\cdot 18$ அங். (17) $50\cdot 4$ டன் எடை; $9\frac{1}{2}$ அங்.; 63 டன் எடை. (20) $0\cdot 56$ செ.மீ. (21) 352 ராத். எடை; $\frac{33}{7}$ அங். (22) கவிழாது. (24) $\frac{m}{2}\left(g \pm \frac{3V^2}{2R}\right)$. (25) $12\frac{29}{48}$ அடி. (27) 5.77 ராத். எடை; $2\cdot 06$ வி. (29) $31\cdot 01$ மீட்.; $972\pi^2$ டைன். (30) $\frac{lg}{g - 4\pi^2 n^2 a}$. (33) $48\cdot 3$, $\cos^{-1}\left(\frac{5}{24}\right)$. (34) 8 ஆரையன்/வி.; $\cos^{-1}\left(\frac{1}{8}\right)$. (39) $\frac{1}{2}\sqrt{ga}$. (40) (i) $\sqrt{5ga}$, (ii) $\sqrt{4ga}\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$. (41) $25\cdot 9$ அடி/வி. (42) $\sqrt{gl}$; $\frac{1}{2}mg(3\sqrt{3}-2)$. (43) நிலைக்குத்துடன் கயிறு $\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$ கோணத்திலிருக்கும் போது. (44) $\cos^{-1}(0\cdot 2)$.

பயிற்சி 15

(1) $10\frac{2}{3}$ அடி; $\frac{2\pi}{3}\sqrt{7}$. (2) 4 வி. (3) வீச்சு $= \sqrt{\frac{v_1^2 x_2^2 - v_2^2 x_1^2}{v_1^2 - v_2^2}}$, காலம் $= 2\pi\sqrt{\frac{x_2^2 - x_1^2}{v_1^2 - v_2^2}}$. (4) 6 செ.மீ./வி^{2}. (5) $\frac{5}{3}\sqrt{10}$ மீட்; $\frac{2\pi}{3}$ வி. (6) $\frac{5}{4}$ மீட்.; $\frac{3}{2}$ மீட்./வி. (8) 4.7 வி.; $4\cdot 22$ செ.மீ. (10) $5\cdot 72$ மீட்.; 13 மீட்/வி. (11) 26 செ.மீ./வி. (13) 36 வி. (14) 16 செ.மீ.; $\frac{8\pi}{3}$ செ.மீ./வி.; $\frac{4\pi}{\sqrt{3}}$ செ..மீ./வி. (15) $\frac{\pi}{3}$. (16) $3\sqrt{2}$ செ.மீ./வி; 2π வி. (17) $x = \sqrt{2}\sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$. (22) $2\pi\sqrt{3}$ மீட்./வி.; $4\pi^2$ மீட்./வி.^{2} (29) $\frac{6}{\pi}$ அடி; $\frac{200\pi}{3}$ அடி/வி^{2}; $10\sqrt{3}$ அ./வி. (30) $\frac{\pi}{4}$ வி; $\frac{2}{9}$ அடி ராத்தல். (31) $\lambda = 3mg$; $T = 2\pi\sqrt{\frac{a}{3g}}$; $V = \sqrt{\frac{ag}{12}}$. (32) $2\cdot 5$ செ.மீ.;

3·142 வி. (33) $\frac{VT}{2\pi}$; $\frac{2\pi V}{T}$; $\frac{1}{2} V \sqrt{3}$. (34) $2\pi\sqrt{\frac{l}{5g}}$; $\sqrt{\frac{gl}{5}}$. (35) 0·393 வி. ; 8 அடி/வி. (37) $\sqrt{t^2 + t_1^2}$. (38) 4·51 காலே ; 2·18 அடி/மணி. (49) $\frac{2\cdot 45}{\pi^2}$ மீட்.

பயிற்சி 16

(1) 4·32 வி. (2) (i) நீளம் $\frac{1}{2,160}$ மடங்குக் குறைக்க வேண்டும் ; (ii) ஈர்ப்பு முடுக்கம் 0·0148 அடி/வி.^{2} கூடுதலாக வேண்டும். (3) 0·027″ அதிகமாக்க வேண்டும். (4) 2,420 அடி. (5) 17·4 வி. (6) சுமார் 28 வி. (7) $l_1 = \left(\frac{x}{x+1}\right) l$. (8) 13 19 மைல். (9) 4,890 அடி ; 5 விநாடி.

பயிற்சி 18

(1) $P \propto \frac{1}{r^{2n+3}}$. (2) $P \propto \frac{1}{r^7}$. (3) $P \propto \frac{1}{r^{2n+3}}$. (4) $P \propto \frac{1}{r^5}$. (5) $P \propto \left(\frac{2n^2 a^2}{r^5} - \frac{n^2-1}{r^3}\right)$. (6) (i) $P \propto \frac{1}{r^3}$; (ii) $P \propto \frac{1}{r^3}$; (iii) $P \propto \frac{1}{r^3}$ (iv) $P \propto r^{2n-3}$.

மேற்கோள் நூற்பட்டியல்
(Bibliography)

1. PRINCIPLES OF MECHANICS — *John L. Synge and Byron A. Griffith*
2. CLASSICAL MECHANICS — *D. E. Rutherford*
3. MECHANICS — *J. L. Meriam*
4. INTRODUCTION TO MECHANICS — *V. D. Deshpande*
5. STATICS AND THE DYNAMICS OF A PARTICLE — *William Duncan*
6. DYNAMICS OF A PARTICLE — *S. L. Loney*
7. DYNAMICS — *A. S. Ramsey*
8. DYNAMICS — *S. Narayanan*
9. INTRODUCTION TO DYNAMICS — *M. Ray and S. D. Nizam*
10. TEXT BOOK TO DYNAMICS — *F. Chorlton*
11. DYNAMICS — *Smart*
12. DYNAMICS — *Kar*

கலைச்சொற்கள்

A

Acceleration	—	முடுக்கம்
,, angular	—	கோண முடுக்கம்
,, due to gravity	—	ஈர்ப்பு முடுக்கம்
,, radial	—	ஆரை முடுக்கம்
,, transverse	—	குறுக்கு முடுக்கம்
,, uniform	—	சீர்முடுக்கம்
,, variable	—	மாறு முடுக்கம்
Amplitude	—	வீச்சு
Angle	—	கோணம்
Angular acceleration	—	கோண முடுக்கம்
Angular momentum	—	சுழல் உந்தம்
Angular velocity	—	சுழல் வேகம்
Apse	—	கவியம்
Apsidal angle	—	கவியக் கோணம்
Apsidal distance	—	கவியத் தூரம்
Areal velocity	—	பரப்பளவு வேகம்
Arm	—	புயம்
Attraction	—	கவர்ச்சி

B

Ballistic Pendulum	—	எறியூசல்
Bob	—	ஊசற்குண்டு
Body	—	பொருள்

C

Centre of gravity	—	புவியீர்ப்பு மையம்
,, Inertia	—	சடத்துவ மையம்
,, mass	—	திணிவு மையம், பொருண்மை மையம்
,, oscillation	—	அலைவு மையம்
,, suspension	—	தொங்கல் மையம், தொங்கு மையம்

Centrifugal force	—	மையவிட்டோடும் விசை
Centripetal force	—	மைய நோக்கு விசை
Central force	—	மைய விசை
Centroid	—	திணிவு மையம்
Circular motion	—	வட்டவியக்கம்
Coefficient of elasticity	—	மீட்சிக்கெழு, மீளியல் குணகம்
,, friction	—	உராய்வுக் குணகம்
,, restitution	—	மீளமைவுக் குணகம்
Component	—	கூறு, பிரிவு
,, horizontal	—	கிடைக்கூறு, கிடைப்பிரிவு
,, vertical	—	நிலைக்குத்துக்கூறு, நிலைக் குத்துப் பிரிவு
Compound Pendulum	—	கூட்டுசலி
Cone	—	கூம்பு
,, hollow	—	உள்ளீடற்ற கூம்பு
,, solid	—	திண்மக் கூம்பு
Conical Pendulum	—	கூம்பூசலி
Conservation of energy	—	ஆற்றல் காப்பு
Conservation of momentum	—	உந்தக் காப்பு
Conservative force	—	காப்புநிலை விசை
Contact	—	தொடுகை
Coplanar forces	—	ஒருதள விசைகள்
Cylinder	—	உருளை

D

Density	—	அடர்த்தி
Dimension	—	பரிமாணம்
Direct impact	—	நேரடி மோதுகை, நேரடி மோதல்
Directed line segment	—	திசைகொண்ட நேர் கோட்டுத் துண்டம்
Directrix	—	இயக்குவரை
Displacement	—	இடப்பெயர்ச்சி
Distance	—	தூரம்
Dynamics	—	இயக்கவிசையியல்

E

Eccentric angle	—	மையவகற்சிக் கோணம்
Eccentricity	—	மையவகற்சி

Efficiency	— வினைத்திறன்
Elastic	— மீளியல்புடைய
Energy	— ஆற்றல்
,, conservation of	— ஆற்றல் காப்பு
,, kinetic	— இயக்க ஆற்றல்
,, mechanical	— பொறிமுறை ஆற்றல்
,, potential	— நிலை ஆற்றல்

F

Fly wheel	— விசைச் சக்கரம்
Focus	— குவியம்
Foot	— அடி, பாதம்
,, pound	— அடி ராத்தல்
Frame of reference	— குறியீட்டச்சு
Friction	— உராய்வு

G

Gravitation	— ஈர்ப்பு
Gravitational force	— ஈர்ப்பு விசை

H

Hodograph	— ஒழுங்குப் படம்
Hooke's law	— ஹூக்கின் விதி
Horizontal line	— கிடைக் கோடு
,, plane	— கிடைத் தளம்
Horse Power (H. P.)	— பரித்திறன் (ப. தி.)

I

Impact	— மோதுகை, மோதல்
Impressed forces	— செயல்படுத்தப்பட்ட விசைகள், பொருத்தப்பட்ட விசைகள்
Impulse	— தாக்களவை
Impulsive force	— கணத்தாக்கு விசை
Inelastic	— மீள்சக்தியற்ற, மீளியல்பற்ற
Inertia	— நிலைமம், சடத்துவம்
,, moment of	— நிலைமத் திருப்புத்திறன்
Inextensible	— நீளியல்பற்ற
Instant	— கணம்

Interval	— இடைவெளி, இடைநேரம்
Inverse	— நேர்மாறான, எதிர்மாறு, தலைகீழ்
Inverse Square Law	— தலைகீழ் வர்க்கவிதி

K

Kepler's laws	— கெப்ளரின் விதிகள்
Kilogram	— கிலோகிராம்
Kilowatt	— கிலோவாட்
Kinematics, Kinetics	— இயக்கவியல்
Kinetic energy	— இயக்க ஆற்றல்

L

Lateral thrust	— பக்க அழுத்தம், பக்கவாட்டு அழுத்தம்
Latus rectum	— செவ்வகலம்
Law	— விதி
Linear motion	— நேர்கோட்டியக்க

M

Machine	— பொறி, இயந்திரம்
Magnitude	— அளவு
Major axis	— பேரச்சு
Mass	— பொருண்மை, திணிவு, நிறை
Mechanics	— இயந்திரவியல், நிலையியக்கவியல்
Minor axis	— சிற்றச்சு
Modulus	— குணகம், எண்ணளவு
Moment	— திருப்புத்திறன்
Moment of Inertia	— நிலைமத் திருப்புத்திறன்
,, momentum	— உந்தத் திருப்புத்திறன்
Motion	— இயக்கம்

N

Newton's laws of Motion	— நியூட்டனின் இயக்க விதிகள்
Normal acceleration	— செங்கோட்டு முடுக்கம்
Normal reaction	— நேர்குத்தெதிர் விசை

O

Orbit — பாதை
Origin — ஆதி
Oscillation — அலைவு, ஊசல்

P

Particle — துகள்
Pendulum — ஊசலி
,, ballistic — எறியூசலி
,, compound — கூட்டூசலி
,, conical — கூம்பூசலி
,, simple — தனியூசலி
,, torsional — முறுக்கூசலி
Period — காலம்
Periodic time — காலவட்ட நேரம்
Phase — கலை
Plane — தளம்
Planet — கோள்
Planetary motion — கோளியக்கம்
Position vector — திசையி நிலை
Potential energy — நிலை ஆற்றல்
Pound — ராத்தல்
Poundal — ராத்தலி
Power — சக்தி
,, horse — பரித்திறன்
Pressure — அழுத்தம்
Principle — தத்துவம்
Projectile — எறிபொருள்
Pulley — கப்பி

Q

Quantity — கணியம்

R

Radial acceleration — ஆரை முடுக்கம்.
Radial velocity — ஆரைத் திசைவேகம்
Radius of gyration — சுழியாரை
Radius vector — ஆரைத் திசையி

Range — வீச்சு
Relative velocity — சார்வேகம்
Relative angular velocity — சார்கோண வேகம்
Relative acceleration — சார்முடுக்கம்
Resolved parts — பிரித்த பகுதிகள், கூறுப் பிரிவுகள்
Resultant — விளைவு
Retardation — எதிர் முடுக்கம்
Regid body — கட்டிறுக்கப் பொருள்
Rotating axis — சுழலச்சு
Rough — உராய்வுடைய
Rule — விதி

S

Scalar — திசையிலி
Seconds Pendulum — வினாடி யூசலி
Simple Harmonic Motion (S. H. M.) — சாமானிய சீரிசை இயக்கம் (சா. சீ. இ.)
Simple Pendulum — தனியூசலி
Slope — சரிவு
Smooth — வழவழப்பான
Space — வெளி
Spring — வில்

T

Tangential velocity — தொடுகோட்டு வேகம்
Tangential acceleration — தொடுகோட்டு முடுக்கம்
Time — காலம், நேரம்

U

Uniform velocity — சீர்வேகம், மாறுவேகம்
Uniform acceleration — சீர்முடுக்கம், மாறுமுடுக்கம்
Unit — அலகு
,, absolute — தனி அலகு
,, gravitational — ஈர்ப்பலகு
Unit vector — திசையி அலகு

V

Vector	— திசையி
Velocity	— திசைவேகம்
,, areal	— பரப்பு வேகம்
,, radial	— ஆரை வேகம்
,, relative	— சார் வேகம்
,, uniform	— சீர் வேகம்
Vertical	— நிலைக்குத்தான
Vertical plane	— நிலைக்குத்துத் தளம், நிலைத் தளம்
Virtual work	— கற்பித வேலை

W

Weight	— எடை, நிறை
Work	— வேலை